МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$ черновик 7558 1111

$\Downarrow$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x=-3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$x^3-x^2-5x+6 \,|\, x-2$, частное x^2+x-3

x^3-2x^2

x^2-5x+6

x^2-2x

$-3x+6$

$-3x+6$

0

$D = 1+4\cdot 3$

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2 \geq 0$

$-1-\sqrt{13} \geq -4$

$1+\sqrt{13} \leq 4$

$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)+10 > 0$

$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 > 1$

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} > \frac{-1+3}{2} = 1$

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} < 11$ $\quad -1+\sqrt{13} < 22$ $\quad \sqrt{13} < 23$

$1400 = 2\cdot 700 = 2^2\cdot 350 = 2^3\cdot 175 = 2^3\cdot 5\cdot 35 = 2^3\cdot 5^2\cdot 7$

175 | 5, 35

7558

$\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 1$

222557

123

1223

$2^3 = 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$2^3 = 2\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

2·4

2·2·2

$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$

$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

112

$\frac{4\cdot 3}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}$

7, 5, 3

7, 5

112
121
211

1122

5

5 7

7 5

123
132

$C_2^1 + C_1^1$

$\frac{2!}{(2-1)!\cdot 1!} = 2+$

$\frac{1!}{0!\cdot 1!}$

2123 6

1122
1212

3

2112
2211
2121

231
213
312

$4\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 1$ 12

1223
1232
1322

2321
2312

Задача №3 на другой стороне

1122 1212 1221

☑ черновик ☐ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача №3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\Downarrow$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

Запомним, что $x=-3$ ← корень

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$\Downarrow$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$\Downarrow$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

Угадываем корень $x=2$

$$(2^3-2^2-5\cdot 2+6=0)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ \quad x^2-5x+6 & \\ \quad \underline{x^2-2x} & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad \underline{-3x+6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^3-x^2-5x+6 = (x-2)(x^2+x-3)$ $\Leftarrow$

Разложим x^2+x-3 на мн-ли. $D = 1-4\cdot(-3)=13$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Т.о. $(x^3-x^2-5x+6) = (x-2)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)=0$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Проверка:

$(-3)\cdot\sqrt{(-3)^3-(-3)+10} = -3^2-5\cdot 3+6$

↑ не подходит, т.к. $-27+13<0$.

~~$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$; $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ не подходит, т.к. $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2<0$~~

$(2+3)\cdot\sqrt{2^3-2+10} = (2+3)(2+2)$ подходит

$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+3\right)\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3-\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)+10} = \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+3\right)\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+2\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолж.)

$x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ не подходит, т.к.

~~[illegible]~~ при $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ $x+2$ отрицательно

$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2\right)$, а $x+3$ положительно $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2} > -3\right)$

А стало быть левая часть ур-я положит, а правая - отрицат.

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ подходит $\left(\sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)+10} > 0, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}+3>0, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}+2>0\right)$

Ответ: $x = \{2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\}$

№5

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Заметим, что чтобы произв. цифр было равно 1400, то надо, чтобы в числе встречалось 2^3, 5^2 и 7 в каком-то виде в виде цифр (например, $2^3 = 8 \cdot 1$ или $2^3 = 4\cdot 2\cdot 1$ или $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2$)

Заметим, что обязательно в числе должна быть цифра 7 и 2 цифры 5 (иначе не будет произведение делиться на 1400)

~~[illegible]~~ Осталось 5 пустых позиций, куда надо расставить 2^3.

Есть 3 варианта представления 2^3, как произведения 5 цифр:

$2^3 = 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$2^3 = 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$

Т.о. нам надо расставить 7, 5, 5, 8, 1, 1, 1, 1 на 8 мест или 7, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1 на 8 мест или 7, 5, 5, 2, 2, 2, 1, 1 на 8 мест. А потом сложить все 3 кол-ва вариантов расстановки.

1 вариант: надо выбрать 1 место для семерки, 2 места для пятерки, 1 место для восьмерки и 4 места для единицы.

Итого вариантов для 1: $\underset{\text{для 1 цифры}}{8} \cdot \underset{\text{для 2 цифры}}{7} \cdot \underset{\text{для 2 пятерок}}{\frac{6\cdot5}{2}} \cdot \underset{\text{для 4 единиц}}{\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \underline{56\cdot15}$

2 вариант: $\underset{\text{для 7-ки}}{8} \cdot \underset{\text{для 4-ки}}{7} \cdot \underset{\text{для 2-ки}}{6} \cdot \underset{\text{для пятерок}}{\frac{5\cdot4}{2}} \cdot \underset{\text{для единиц}}{\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}} = \underline{8\cdot7\cdot6\cdot10}$

3 вариант: $\underset{\text{для 7-ки}}{8} \cdot \underset{\text{для пятерок}}{\frac{7\cdot6}{2}} \cdot \underset{\text{для 2-к}}{\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}} \cdot \underset{\text{для 1-ц}}{\frac{2\cdot1}{2}} = \underline{8\cdot7\cdot3\cdot10}$

Т.о. всего чисел: $56\cdot15 + 8\cdot7\cdot6\cdot10 + 8\cdot7\cdot3\cdot10 =$
$= 8\cdot7\cdot15 + 8\cdot7\cdot6\cdot10 + 8\cdot7\cdot3\cdot10 = 8\cdot7(15+60+30) =$
$= 56\cdot105 = 5880$

Ответ: 5880

№4

Рассмотрим 2 случая: $x \geq 1$ и $x \leq 1$

1 случай: $x \geq 1$

Нер-во имеет вид: $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \geq 1 - x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \geq \frac{1-x}{x^2} \quad (\text{т.к. } x^2 > 0) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолж.)

$\Updownarrow$

$$2x^2+\frac{2}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+4\geq\frac{1-x}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\geq\frac{1-x}{x^2}\\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

$\Updownarrow$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

$\Updownarrow$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

$\Updownarrow$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-1{,}5\right)\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

Вспомним, что $a+b\geq2\sqrt{ab}$ для $a, b>0$ $\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{1}=2$ (т.к. $x\geq1$)

Заметим, что $\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-1{,}5\right)>0$, $2\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$, значит $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-1{,}5\right)>0$.

Так же заметим, что $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\leq0$ для $x\geq1$

Т.о. для $x\geq1$ нер-во $2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1\geq0$ выполнено всегда (т.к. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-1{,}5\right)>0\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$)

(2 случай: $x<1$

нер-во имеет вид $2x^4+x^2-2x-3x^2(1-x)+1\geq0$

$\Updownarrow$

$$2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1\geq0$$

$\Updownarrow$

1

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \ge 0$. Решим ур-е $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=0$

Легко угадывается корень $x=-1$

$(2\cdot(-1)^4+3\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2-2(-1)+1=0)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 & x+1 \\
\cline{2-2}
-\;2x^4+2x^3 & 2x^3+x^2-3x+1 \\
\quad x^3-2x^2-2x+1 & \\
\quad -\;x^3+x^2 & \\
\qquad -3x^2-2x+1 & \\
\qquad -\;-3x^2-3x & \\
\qquad\quad x+1 & \\
\qquad\quad -\;x+1 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$2x^3+x^2-3x+1=0$ - решим это ур-е.

угадывается корень $x=\frac{1}{2}$ $\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+1=0\right)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2-3x+1 & x-0{,}5 \\
\cline{2-2}
-\;2x^3-x^2 & 2x^2+2x-2 \\
\quad 2x^2-3x+1 & \\
\quad -\;2x^2-x & \\
\qquad -2x+1 & \\
\qquad -\;-2x+1 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$2x^2+2x-2=2(x^2+x-1)$

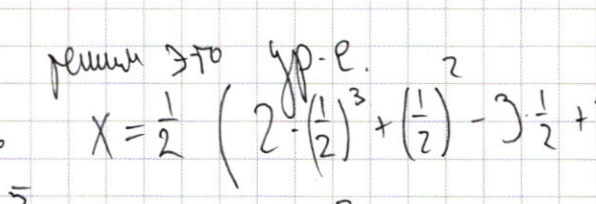
Решим ур-е $x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot(-1)=5 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$2(x^2+x-1)=2\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Т.о. $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-0{,}5)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ge 0$

Решим методом интервалов



Получаем

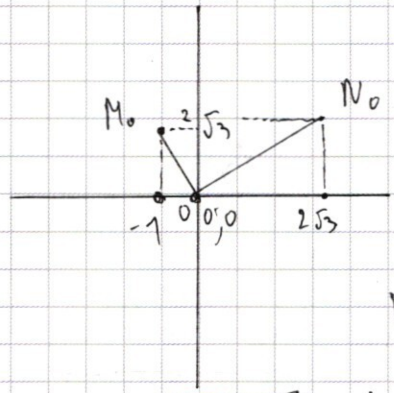
$\begin{cases} x<1 \\ x\in\left(-\infty;-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \end{cases}$

Т.о. Ответ:

$\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ \begin{cases} x<1 \\ x\in\left(-\infty;-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \end{cases} \end{array}\right.$ - это Ответ (нормальный на след. стр.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

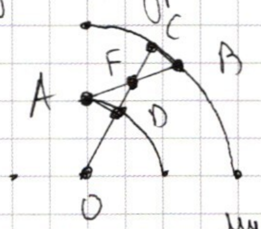


Заметим, что жук и муравей ползают вокруг точки O $\Rightarrow$ M_0O и N_0O - радиусы их окружностей-траекторий.

Из Тр. Пифагора $M_0O = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$, $N_0O = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$. Запишем ур-я этих окружностей:

$\omega_{\text{муравья}}$: $x_м^2 + y_м^2 = 4$, $\omega_{\text{жука}}$: $x_ж^2 + y_ж^2 = 16$

От нас хотят, чтобы расстояние между жуком (ж) и муравьем (м) было кратчайшим. Это выполняется только в том случае, когда жук и муравей находятся на одной прямой, проведенной из точки O:



$DC < AB$, т.к. $\angle ADF > \angle DAF$ и $\angle BCF > \angle CBF$

Таким образом, расстояние между жуком и муравьем (кратчайшее) будет равно 2 $(4-2)$

Т.о. $|x_ж - x_м|^2 + |y_ж - y_м|^2 = 4$ - Тр. Пифагора, где $x_ж, x_м, y_ж, y_м$ - коорд. муравья и жука, когда между ними кратчайшее расстояние

И еще: $\frac{x_ж}{x_м} = \frac{y_ж}{y_м}$ (т.к. они находятся на 1 прямой)

Т.о. $x_ж^2 - 2x_ж x_м + x_м^2 + y_ж^2 - 2y_ж y_м + y_м^2 = 4$

$$\Downarrow$$

$$16 + 4 - 2(x_ж x_м + y_ж y_м) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$x_ж x_м + y_ж y_м = 8$$

Т.к. $\frac{x_{ж}}{x_{м}} = \frac{y_{ж}}{y_{м}}$, то $x_{ж} = \frac{y_{ж}}{y_{м}} \cdot x_{м}$

Тогда $\frac{y_{ж}}{y_{м}} \cdot x_{м}^2 + y_{ж} \cdot y_{м} = 8$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_{ж}}{y_{м}}(4 - y_{м}^2) + y_{ж} \cdot y_{м} = 8$$

$$\Updownarrow$$

$$y_{ж}\left(\frac{4-y_{м}^2}{y_{м}} + \frac{y_{м}^2}{y_{м}}\right) = 8$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_{ж}}{y_{м}} = 2 \Rightarrow \frac{x_{ж}}{x_{м}} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$y_{ж} = 2y_{м},\ x_{ж} = 2x_{м}.$$

Какое было ~~расстоянием~~ между м. и ж. сначала? $\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2} =$ $= \sqrt{20}$. $M_0O^2 + N_0O^2 = 20$. Т.о. по обратной т. Пифагора $\angle M_0ON_0 = 90°$. Пусть до точки $(x_{м}, y_{м})$ муравей прошел по окружности угол α. $\Rightarrow$ путь его: $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot R_{\omega_{мур}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2$

Жук прошел угол ~~__~~ $90° - \alpha \Rightarrow$ путь его: $\frac{90°-\alpha}{2\pi} \cdot R_{\omega_{жук}} = \frac{90°-\alpha}{2\pi} \cdot 4$.

Т.к. $v_{м} = v_{ж}$, $t_{м} = t_{ж}$, то $\frac{90°-\alpha}{2\pi} \cdot 4 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2$

$$\Updownarrow$$

$$360° - 4\alpha = 2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = 60°$$

Пусть ~~__~~ точка ~~точка~~ $(x_{м}; y_{м})$ ~~__~~ — точка A. Тогда $\triangle AOM_0$ — равнобедр. с углом $60° \Rightarrow$ равносторонний. Тогда $(x_{м}; y_{м})$ — симметричн. координаты $(-1; \sqrt{3})$ относительно оси ординат (по y) $\Rightarrow (x_{м}; y_{м}) = (1; \sqrt{3}) \Rightarrow (x_{ж}; y_{ж}) =$ ~~__~~ $(2; 2\sqrt{3})$. Логично, что есть еще 1 случай, симметричный относительно точки O (т.к. прямая пересекает окр-сти в 4-х точках). Т.о. $(x'_{ж}; y'_{ж}) = (-2; -2\sqrt{3})$

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$ и $(-2; -2\sqrt{3})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y=a-3(a+b)x \\ (a+b)by=1-4bx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{4}(a+b)x+\frac{a}{12} \\ y=-\frac{4}{a+b}x+\frac{1}{(a+b)b} \end{cases} \Big| (a+b)\neq 0,\ b\neq 0$$, иначе система не имеет решений $(0=1)$

Т.о. ~~и~~ система будет иметь ∞ много решений, если $-\frac{1}{4}(a+b)x+\frac{a}{12}=$ $=-\frac{4}{a+b}x+\frac{1}{(a+b)b}$. У нас имеются 2 многочлена $f(x)$ и $g(x)$

$f(x)=-\frac{1}{4}(a+b)x+\frac{a}{12}$, $g(x)=-\frac{4}{a+b}x+\frac{1}{(a+b)b}$

Они равны $\Rightarrow$ равны их свободные члены и равны коэффициенты при ~~[illegible]~~ x. (По т. Безу и всё такое...)

Т.о. $\begin{cases} -\frac{1}{4}(a+b)=-\frac{4}{(a+b)} \\ \frac{1}{(a+b)b}=\frac{a}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{4}=\frac{4}{a+b} \\ (a+b)ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=16 \\ (a+b)ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \\ (a+b)ab=12 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ab=3 \\ ab=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{b} \\ a=-\frac{3}{b} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{3}{b}+b=4 \\ \frac{3}{b}+b=-4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{b}+b=4 \\ -\frac{3}{b}+b=-4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} b^2-4b+3=0 & D=4 \\ b^2+4b+3=0 & D=4 \\ b^2-4b-3=0 & D=28 \\ b^2+4b-3=0 & D=28 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

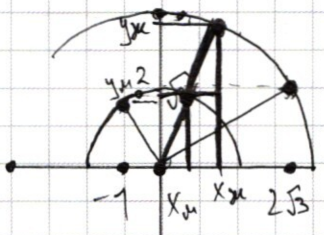
$$\left[\begin{array}{l} b = \dfrac{4 \pm 2}{2} \\ b = \dfrac{-4 \pm 2}{2} \\ b = \dfrac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \\ b = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm \dfrac{3}{\left(\frac{4 \pm 2}{2}\right)} \\ a = \pm \dfrac{3}{\left(\frac{-4 \pm 2}{2}\right)} \\ a = \pm \dfrac{3}{\left(\frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}\right)} \\ a = \pm \dfrac{3}{\left(\frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}\right)} \end{array}\right.$$

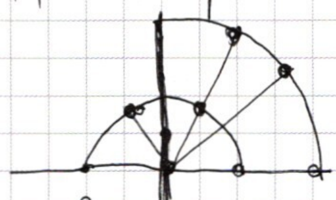
↑

Это ответы.

$\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = 2$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{4\cdot 3+4} = 4$



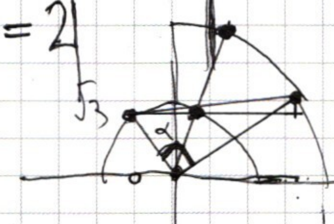


$(2\sqrt{3}+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2$

$12 + \cancel{4\sqrt{3}} + 1 + 4 - \cancel{4\sqrt{3}} + 3$

20

$$\begin{cases} x_м^2+y_м^2=4 \\ x_ж^2+y_ж^2=16 \\ |x_ж-x_м|^2+|y_ж-y_м|^2=2 \\ \dfrac{x_ж}{x_м}=\dfrac{y_ж}{y_м} \end{cases}$$



$\cancel{x_ж^2} - 2x_жx_м + \cancel{x_м^2} + \cancel{y_ж^2} - 2y_жy_м + \cancel{y_м^2} = 4$

$16 + \cancel{4} - 2(x_жx_м + y_жy_м) = \cancel{4}$ $(2-\sqrt{3})^2$

$2\pi R$

$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2$

$x_жx_м + y_жy_м = 8$

$x_м^2 = 4 - y_м^2$

$x_ж = \frac{y_ж}{y_м}\cdot x_м$

$\frac{(90-\alpha)}{2\pi}\cdot 4$

$y_м = \frac{y_ж}{2}$

$\frac{y_ж}{y_м}\cdot x_м^2 + y_жy_м = 8$

$\frac{x_ж}{x_м} = 2$

$\frac{90^\circ-\alpha}{2\pi}\cdot 4 = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2$

$x_ж = 2x_м$

$\frac{y_ж}{y_м}\cdot(4-y_м^2) + y_ж\cdot y_м = 8$

$360^\circ - 4\alpha = 2\alpha$

$x_м = \frac{x_ж}{2}$

$y_ж\left(\frac{4-y_м^2}{y_м} + y_м\right) = 8$

$y_ж = 2y_м$

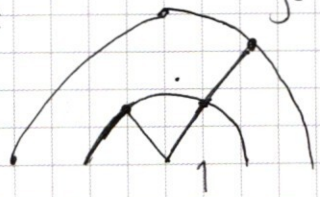
$6\alpha = 360$

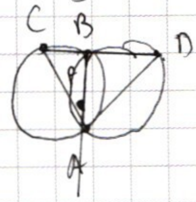
$\alpha = 60^\circ$

$y_ж\left(\frac{4-y_м^2}{y_м} + \frac{y_м^2}{y_м}\right) = 8$

$\frac{y_ж}{y_м} = 2$

$y_ж\cdot\frac{4}{y_м} = 8$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11

(Нумеровать только чистовики)

$3(a+b)x + 12y = a$

$4bx + (a+b)by = 1$

$12y = a - 3(a+b)x$

$y = -3(a+b) \cdot x + a$

$y = -\frac{1}{4}(a+b) \cdot x + a$

$y = (1 - 4bx) / (a+b) \cdot b$

$y = -\frac{4}{(a+b)} x + \frac{1}{b(a+b)}$

$-\frac{1}{4}(a+b) \cdot x + a = -\frac{4}{(a+b)} \cdot x + \frac{1}{b(a+b)}$

$\begin{cases} \frac{a+b}{4} = \frac{4}{a+b} \\ a = \frac{1}{b(a+b)} \end{cases}$

$\frac{1}{4a} = 4 - a$

$1 = 16a - 4a^2$

$4a^2 - 16a + 1 = 0$

$a + b = 4$

$ab(a+b) = 1$

$4ab = 1$

$b = \frac{1}{4a} = 4 - a$

$a = 16 - a$

$a = 8$

$b = -4$

$(4a+1)(a+1$

$16 \cdot 16 - 16$

$15 \cdot 16$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \,|\, x+1$

$2x^4+2x^3$

x^3-2x^2-2x+1

x^3+x^2

$-3x^2-2x+1$

$-3x^2-3x$

$x+1$

$2x^3+x^2-3x+1$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)$

$-8+2+10$

$4+4+\cancel{4+6+4+8+6}$

$2x^3+x^2-3x+1 \,|\, x+1$

$2x^3+2x^2$

$2x^2-x+1$

$-x^2-3x+1$

$-x^2-x$

$2x+1$

$2\cdot 100^4+100^2-200-$

$-3\cdot 100^2$

$2x^3+x^2-3x+1 \,|\, x-0{,}5$

$2x^3-x^2$

$2x^2+2x-2$

$2x^2-3x+1$

$2x^2-x$

$-2x+1$

$-2x+1$

6

$16\cdot 14$

$x=0,\ x=-1$

$x+1>0$

$8-4-10+6$

$\cancel{2x^3+x^2-3x+1 \,|\, x-1}$

$(x+1)^2\left(2x^2-x+1+\frac{x}{x+1}\right)\geq 0$

$7\cdot 8\cdot 4$

$2x^2-x+1+\frac{x}{x+1}\geq 0$

$\frac{-1+\sqrt5}{2}$

$16\cdot 16$

$-2+1+3+1$

$-1+\sqrt5 \vee -2$

$2x^2-x+1+\frac{x}{x+1}\geq 0$

$D=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2-8=$

$2x^2-x\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+1\geq 0$

$\sqrt5 \vee -1$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac14-1-$

$x=$

$=1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-8=$

$-3\cdot\frac14\cdot\frac12+1$

$\frac{-1+\sqrt5}{2}\vee -1$

$\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}-7<0$

$\sqrt5 \vee 2$

$\frac{1}{(x+1)^2}<\frac{1}{x+1}$

$\frac{-1+\sqrt5}{2}\vee\frac12$

$-1+\sqrt5 \vee 1$

$\frac{1}{(x+1)^2}$

$\frac18+\frac14-1\cdot\frac38+1$

$1-2x-2-7x^2-14x-7<0$

$\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)}-7<0$

$-7x^2-16x-8<0$

$2x^3+x^2-3x+1 \,|\, x-\frac12$

$2x^2$

$1-2(x+1)-7(x+1)^2<0$

$2\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^2}-\cancel{2\cdot\frac12}-3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac12-1\right)\cancel{+1}$

$\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^3}-3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac12$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 13 (Нумеровать только чистовики)

$8\cdot 7\cdot \frac{5\cdot 5}{2}\cdot$ 123

$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2+4}}{}$ 7558

$D = t^2 + 4$

$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $t = C_8^1 + C_7^1$

1232 $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $3\cdot 2\cdot 1$ $x = t - \frac{1}{x}$

$2\cdot(-1)^4 + 3(-1)^3 - 2(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1$ $x^2 = t^2 - 2\frac{t}{x} + \frac{1}{x^2}$

$t^2 - 2\frac{t}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x^2}$

$C_8^4 + C_8^2 + C_8^1 + C_8^1$ $x - \frac{1}{x} = t$ $x^2 - 1 = tx$ $x^2 - tx - 1 = 0$

$C_4^1 + C_4^2 + C_4^1$ $2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 3x + 2 \geq 1 - x$ $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$

$2\frac{4!}{3!\cdot 1!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} +$ $2x^2 + 4 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \geq \frac{1-x}{x^2}$ $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ $C_4^2 + C_2^2$

$2 + 1 + 2 - 3\cdot 1\cdot 2 + 1 \geq 0$ 1122 11 $\frac{4!}{2!\cdot 2!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!}$

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \geq \frac{1-x}{x^2}$ $x + \frac{1}{x} = t$ $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}$

$C_4^1 + C_3^2 + C_1^1$

$2\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2} + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}$ $2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2} - \frac{t}{x} = -2 - \frac{1}{11}$

$\frac{t}{x} = \frac{1}{x^2} + 2$ $\frac{3\cdot 2}{2}$

$2t^2 + 4 + 3t - 2 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $2(t^2 - 2) - 3t + 4 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $C_4^1 + C_2^1 + C_1^1$ $t = \frac{1}{x} + 2x$

$2t^2 + 3t + 2 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $2t^2 - 4 - 3t + 4 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $t \geq 2$ $x - \frac{1}{x} = t$

$2t^2 + 3t + 2 \geq \frac{1}{x^2} -$ $2t(t - 3) \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $x + \frac{1}{x} = 3$ $\frac{1}{x} =$

$2(t^2 + t + 1) \geq \frac{1}{x^2} - x$ $2t(t - 1{,}5) \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $6 + 2 + 1$ $x^2 + 1 = 3$ $x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 = 2$ $x = \sqrt{2}$

$2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $\frac{1}{x} = t - x$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\times\begin{array}{r} 105 \\ 56 \\ \hline 630 \\ 525 \\ \hline 5880 \end{array}$

$2t(t - 3) \geq \frac{1}{x^2} - t + x$ $x - \frac{1}{x} = t$

$t = x + \frac{1}{x} \geq 2$ $\frac{1}{x} = x - t$

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$

$2x^4$

$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 3x - \frac{3}{x} - 2 \geq \frac{1-x}{x^2}$

$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 \geq \frac{1-x}{x^2}$

$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 \geq 1 - x$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №14

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)