

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

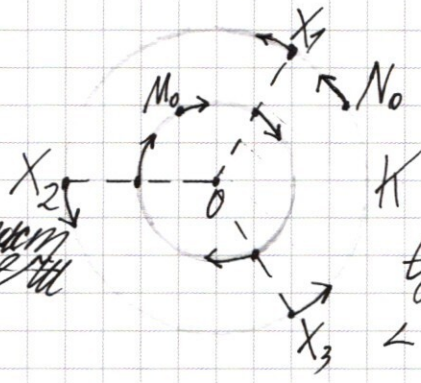
3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: $M_0(-1; \sqrt{3})$
 $N_0(2\sqrt{3}; 2)$

$X(x, y)$ - координаты точек
 $x - ?$; $y - ?$



$K(4; 0)$
 $\angle K O M_0 = 30^\circ$
 $\angle K O N_0 = 120^\circ$

r - радиус окружности муравья, R - эска.
 $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ $R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$W_m = \frac{r}{T}$ $W_n = \frac{R}{T}$
 $\frac{W_n}{W_m} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

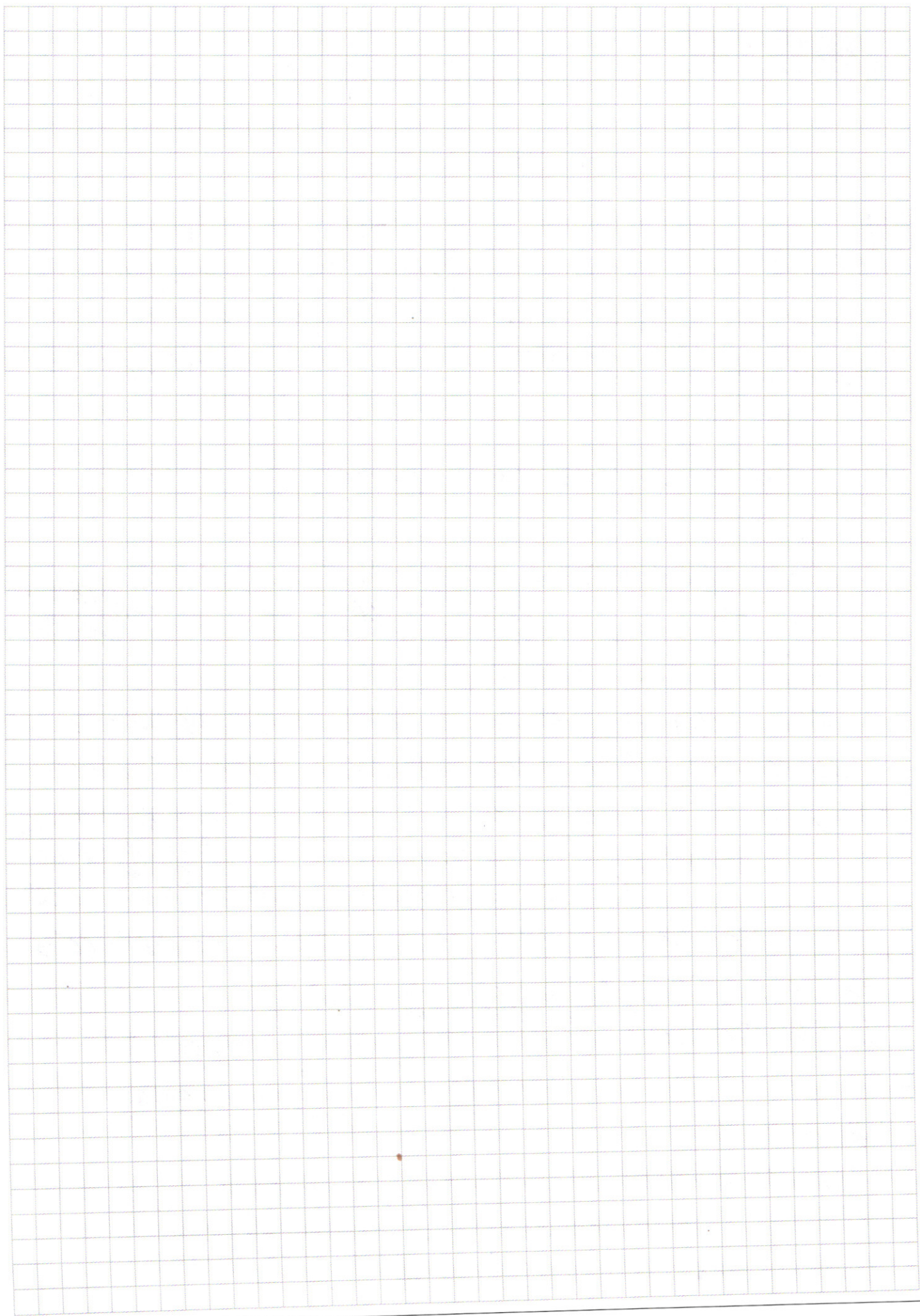
$2W_n = W_m \Rightarrow$ за то время, пока муравей
меняет свой угол на $\Delta\alpha$, эска. меня-
ет на $\frac{\Delta\alpha}{2}$, тогда:

$\pm 120^\circ + \frac{\Delta\alpha}{2} = 120 - \Delta\alpha$
 $\Delta\alpha = 60^\circ \Rightarrow$ первое кратчайшее

расстояние на угле $\angle K O X_1 = 120 - 60 = 60^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow X_1(R \cos(60^\circ); R \sin(60^\circ))$ $X_1(2; 2\sqrt{3})$

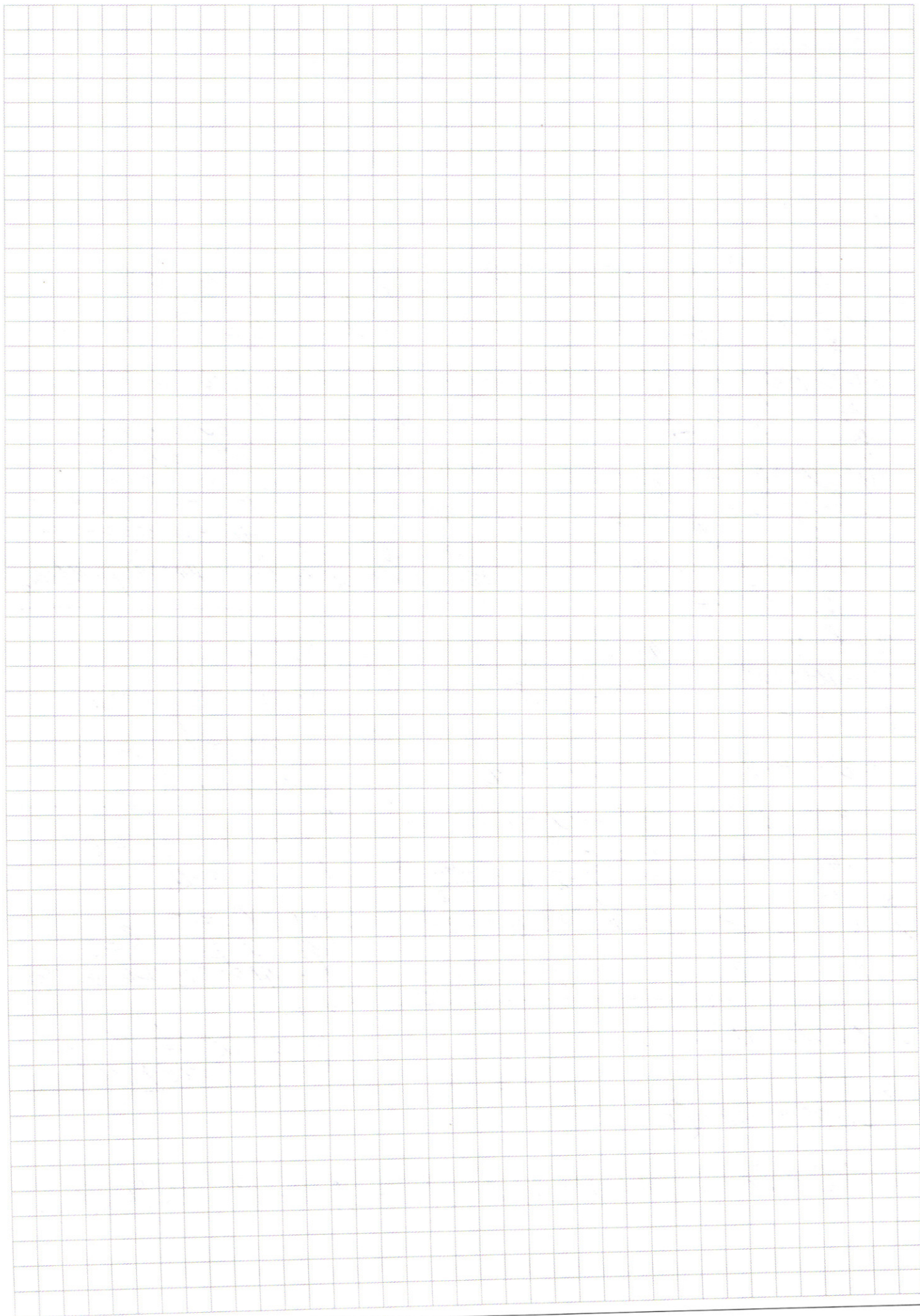
Следующая X_2 $\angle K O X_2 = 180^\circ$
 $X_2(-4; 0)$

Аналогично $X_3(2; -2\sqrt{3})$, а потом X_4
при X_1 , значит потом будет бесконечно
ответ: $(2; 2\sqrt{3}); (-4; 0); (2; -2\sqrt{3})$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[3] При $x \neq -3$:

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\frac{(x+3)\sqrt{x^3-x+10}}{\sqrt{x^3-x+10}} = \frac{(x+3)(x+2)}{\sqrt{x^3-x+10}}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4+4x$$

$$\begin{cases} x^3-x^2-5x+6=0 \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

Перебор (или Горнера):

$$x=2: 8-4-10+6=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D = 1-4 \cdot (-3) = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} + 10 = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{13}}{8} - \frac{3 \cdot 13}{8} + \frac{13\sqrt{13}}{8} + \frac{19\sqrt{13}}{2} + \frac{19}{2}$$

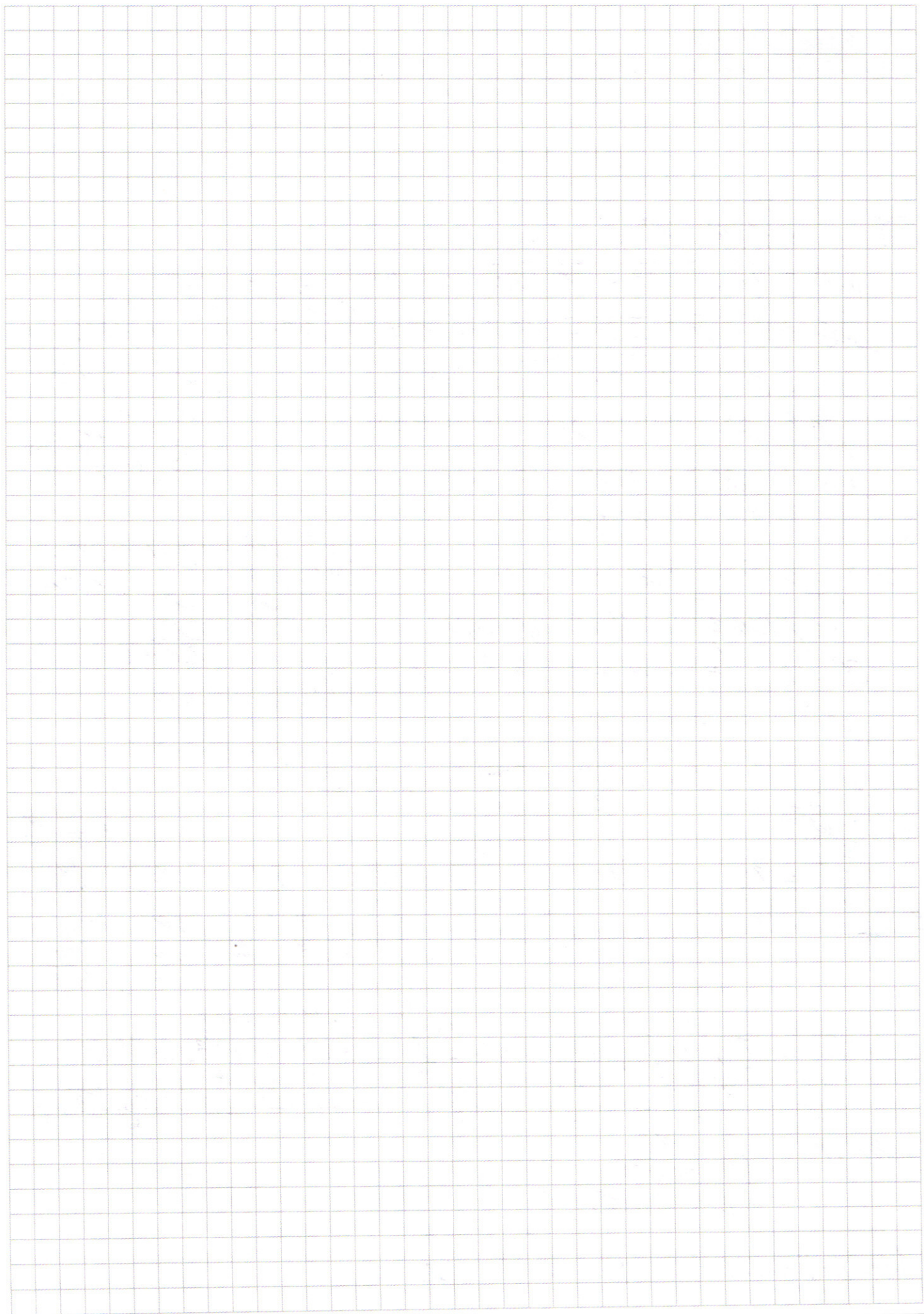
$$\frac{19}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{16\sqrt{13} - 40}{8} \geq 0 \quad \sqrt{13} \text{ м.к.} \quad \frac{13}{8} > \frac{9}{8} \quad \text{и} \quad 19^2 > 13$$

$$\sqrt{13} > 3 \quad \frac{19}{2} > \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + 10 = -\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{13}}{8} - \frac{3 \cdot 13}{8} - \frac{13\sqrt{13}}{8} + \frac{76}{8} + \frac{8\sqrt{13}}{2} = \frac{76}{8} - \frac{40}{8} + \frac{(4-52)\sqrt{13}}{8} = \frac{36 - 48\sqrt{13}}{8} < 0$$

$$\text{м.к.} \quad \frac{1}{\sqrt{13}} < \frac{1}{\sqrt{13}} \quad 36 < 36\sqrt{13}$$

Ответ: $2; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$$1400 = 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Очевидно, что в числе не может быть 0, т.к. тогда произведение 0.

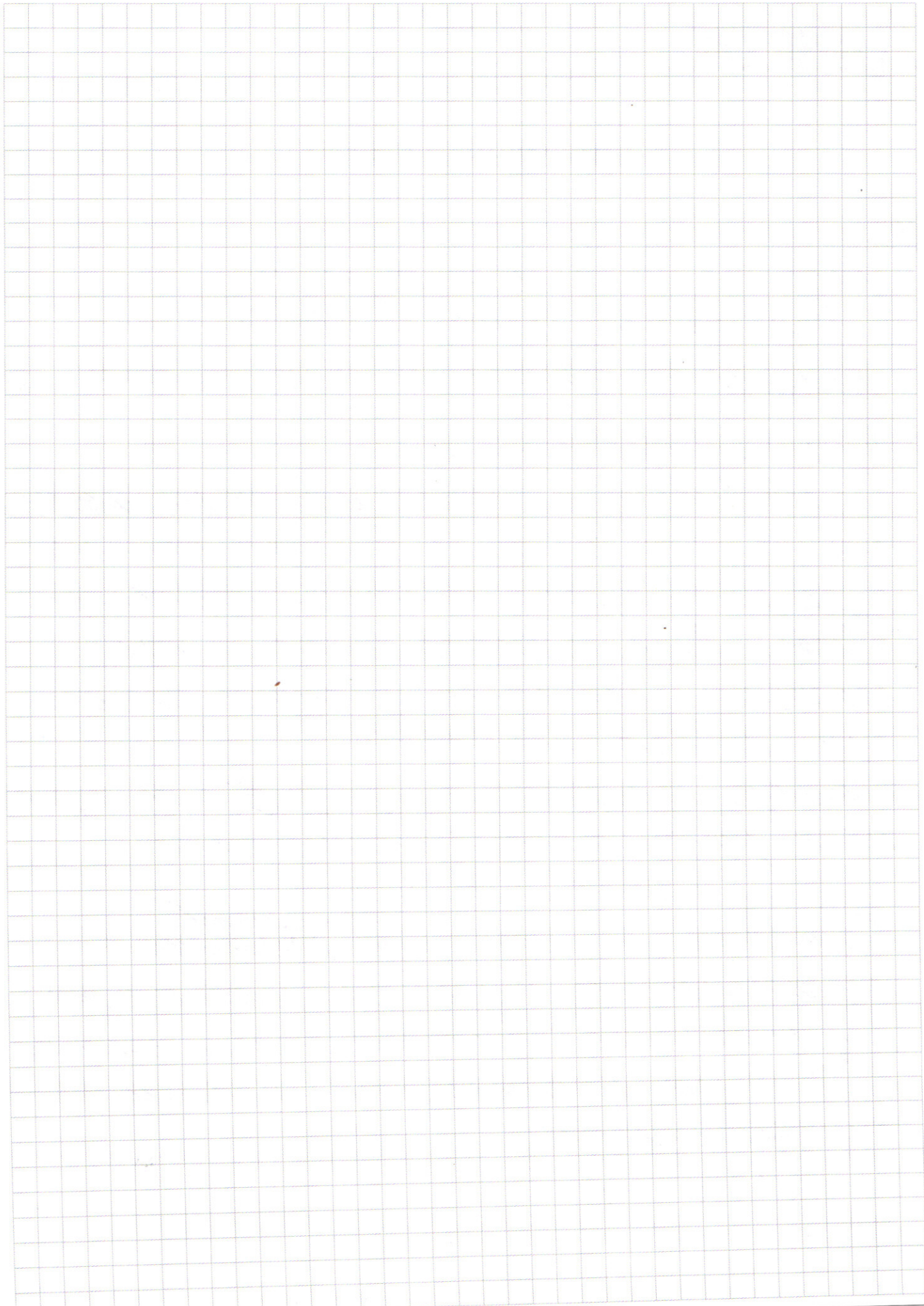
Значит в числе можно быть: 1-а 7, 2-е 5; и 2^3 в виде (8 и 8/28 и 4 и 1а 2/3и 2), остальные цифры. ~~Наб~~ - т.к. в числе нет 0, то можно любую цифру ставить на любое место.

Набор цифр 1, 1, 1, 1, 5, 5, 8, 7, для него вариантов возможно:

(C_n^k - это C из n по k)

Ставим 7: это C_8^1 (7 вариантов), остались незаполнены 7 цифр, ставим 8, это C_7^1 , осталось 6 пустых, ставим 5-ки-это C_6^2 , а на остальные места 1-цы, перемножим:

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

Для набора цифр 1, 1, 2, 4, 5, 5, 8, 7, это
 $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

это делается аналогично
предыдущему:
каждо равнос. цифр
каждо цифр, оставшихся
после прошлой расстановки.

Для набора 1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7 это:

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1$$

Ответ - это их сумма:

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 + C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 + C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^3 =$$

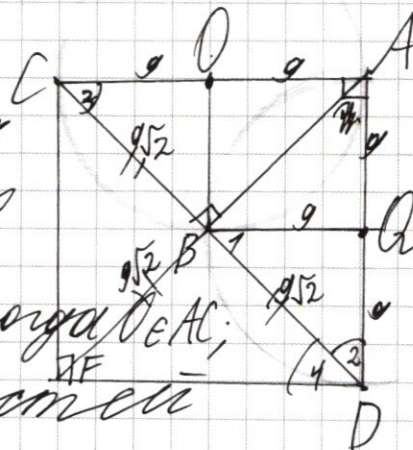
$$= 8 \cdot 7 \cdot 15 + 8 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 4 + 8 \cdot 21 \cdot 10 =$$

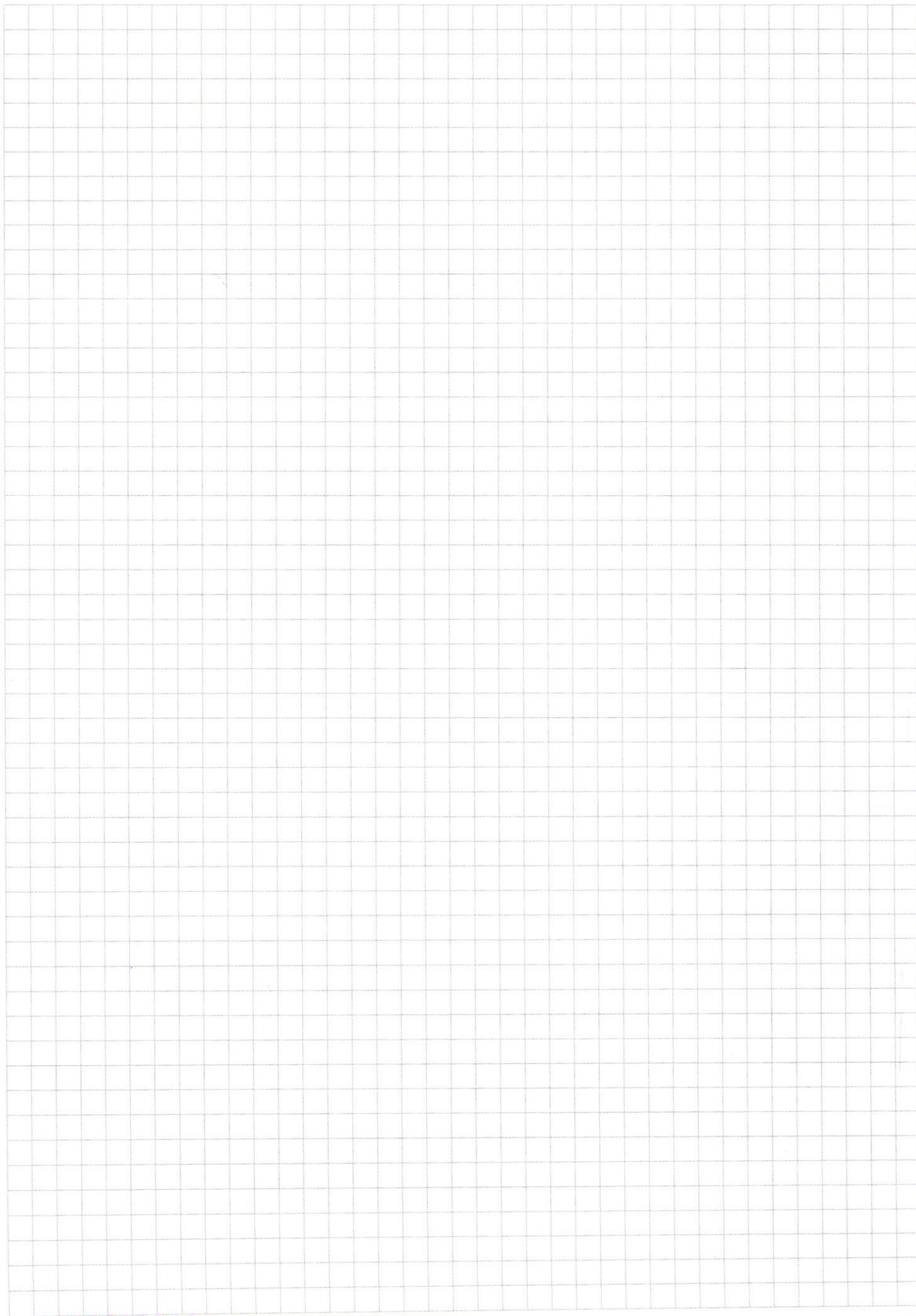
$$= 840 + 3360 + 1680 = 5880$$

Ответ: 5880

6

III. к тут спрашивается
конкретная длина по
достаточно решить
для любого случая (когда $\angle C \in AC$;
 $\angle F \in AD$) $\angle A \in$ - о. окружности





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$AB = BG = DG \Rightarrow \triangle BGD \text{ р/д (осн. BD)}$ по опр. р/д
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ по опр. р/д

$\left. \begin{array}{l} CO + AO = 18 \\ AB + BD = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AD \text{ (осн. CD)} \text{ и р/д (угл.)} \Rightarrow$ по усл.

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 2 = 45^\circ$ $\Rightarrow \angle 1 = 45^\circ$; $\Rightarrow \angle 2 = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle BGD = 90^\circ \Rightarrow \triangle BGD \text{ р/д} \Rightarrow BD = \sqrt{2 \cdot 9} = 9\sqrt{2}$ по св-ву
 $\triangle BGD$ по усл.
 $\angle B = 90^\circ$ по опр. р/д

аналогично $\triangle COB \text{ р/д} \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

$BF = 9\sqrt{2} \text{ м. к } BD - BF$

$\Rightarrow \triangle CFD \text{ р/д (} \angle F = 90^\circ \text{)}$ по признаку
 $\triangle CFD$ по усл.

$AB \angle 3 = 45^\circ$; $\angle CAD = 90^\circ$

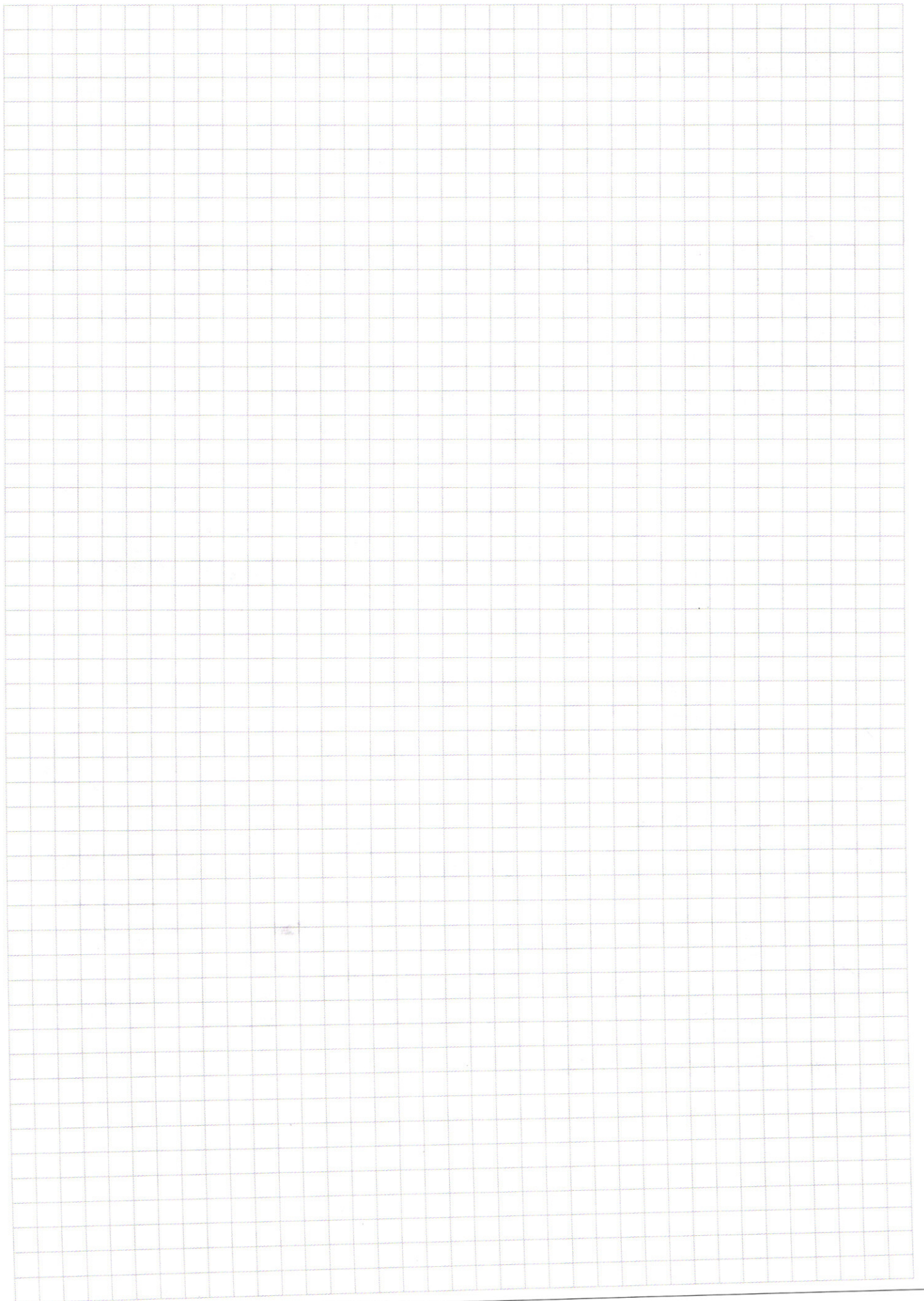
$\angle 2 = 45^\circ$ в $\triangle BGD$: $\angle BGD = 90^\circ$;
 $BG = DG = 9$ т. к. р/д

$\triangle FBD$: $\angle FBD = \angle CAD = 90^\circ$ $\Rightarrow$ верт. пр.
 $FB = 9\sqrt{2} = BD$ по опр. перт.

$\Rightarrow \triangle FBD \sim \triangle BGD \Rightarrow \angle 4 = 45^\circ$

$CF = CD \cdot \sin(45^\circ) = \frac{2 \cdot 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 18$ по реш.

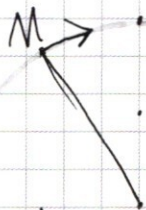
Ответ: 18.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

$$\frac{32x}{4x} + \frac{12y}{4y} = \frac{3}{1} \quad R=2$$

$$\frac{12x}{12x} - \frac{12y}{12y} = \frac{1}{1}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$$

$$48b = 3(a+b)^2 \cdot b$$

$$3(a+b) = 4ab$$

$$12 = (a+b)ab$$

$$ab = \frac{12}{a+b}$$

$$3(a+b) = \frac{4 \cdot 12}{(a+b)}$$

$$(a+b)^2 = \frac{16}{3}$$

$$a+b = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{12}{4b} = \frac{12}{4b}$$

$$12 = 4ab$$

$$3 = ab$$

$$3 = a \cdot (4 - a)$$

$$3 = 4a - a^2$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$a = \frac{4 \pm 2}{2} = 3 \quad a = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$b = 1$$

$$b = 3$$

$$a+b = -4$$

$$12 = -4ab$$

$$-3 = ab$$

$$-3 = a \cdot (4 - a)$$

$$-3 = -a^2 + 4a$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$a = \frac{4 \pm 2}{2} = 3 \quad a = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$a = 3 - 2 = 1 \quad a = -2 - \sqrt{7}$$

$$b = -4 - \sqrt{7} + 2 = -2 - \sqrt{7}$$

$$b = -2 - \sqrt{7}$$

$$r=2$$

$$R=4$$

$$S = 2\pi R \quad X(1; 2\sqrt{3}) (1; -2\sqrt{3}) (-4; 0)$$

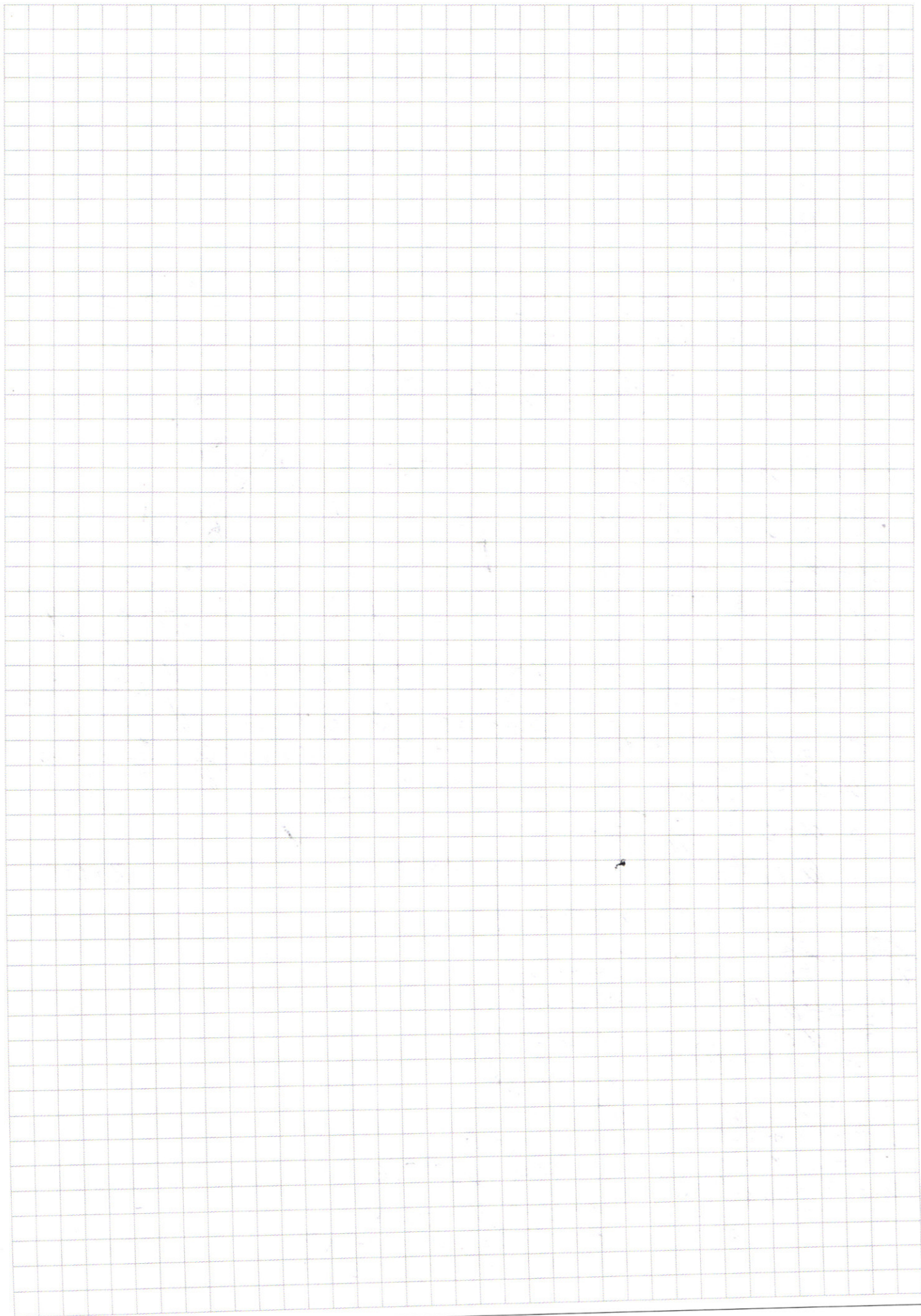
$$ax + by = c \quad \frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} - \text{Прям}$$

$$dx + ey = f \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} - \text{Парал}$$

$$a=0$$

$$b=0$$

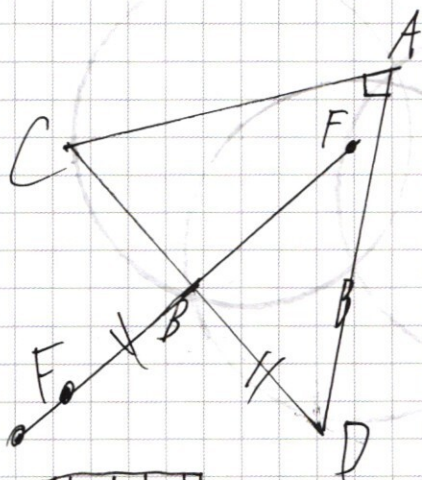
$$a+b=0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x > 0, y > 0$$

$$(x-3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 25$$

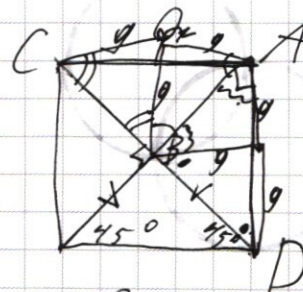
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y - 25 = 0$$

$$x = \frac{36 - 4y^2 \pm \sqrt{16y^4 - 32y}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3360 \\ 840 \\ \hline 4200 \\ 1680 \\ \hline 5880 \end{array}$$



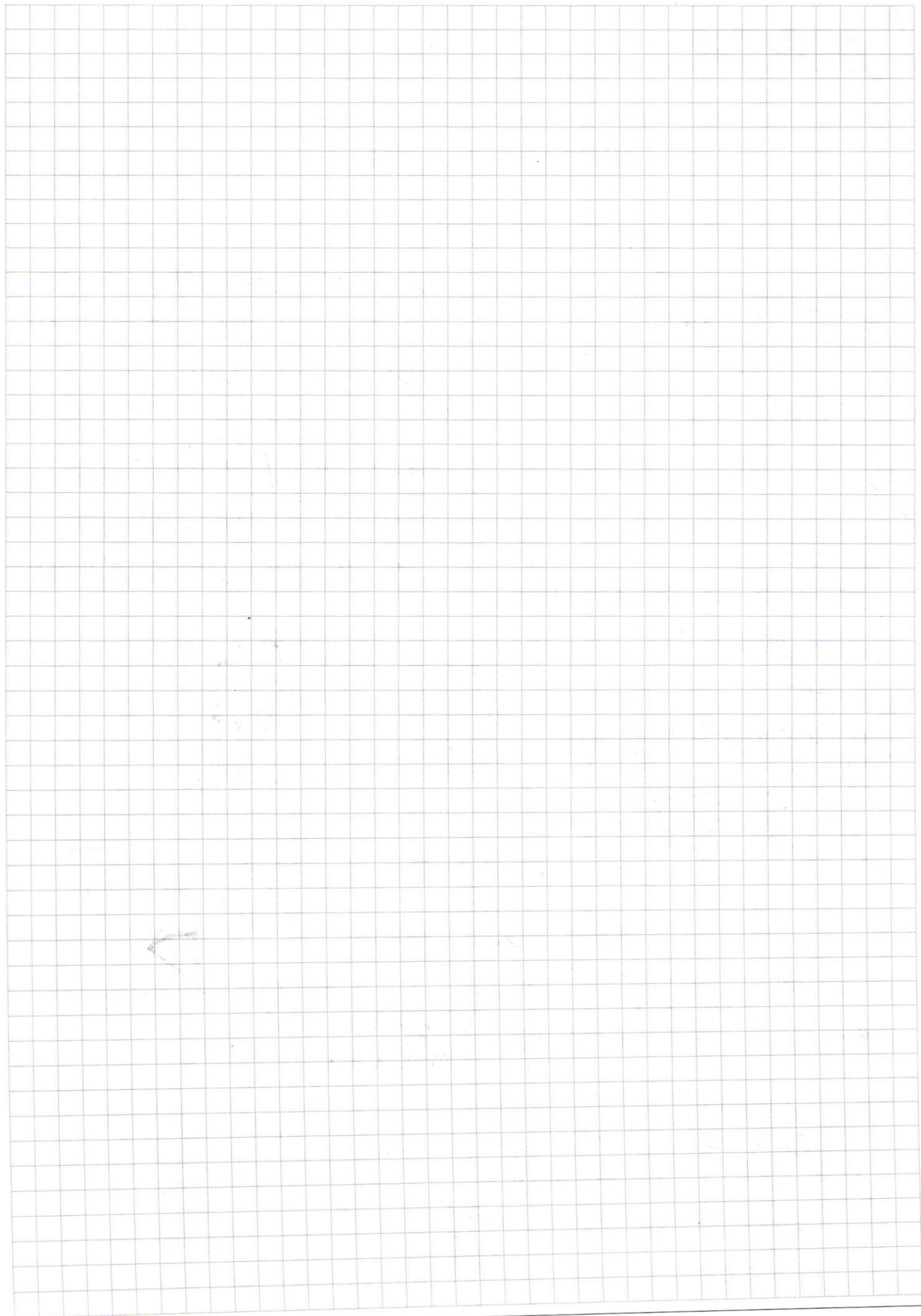
$$\begin{array}{r} 6 \\ 120 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$W = \frac{U}{R}$$



$$720 = 90 + 780 + 16 = 4 + 20 + 6$$

$$\begin{array}{r} 55555 \\ 20 \\ \hline 111110 \\ 21 \\ \hline 2310 \\ 21 \\ \hline 3360 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = \cancel{(x+3)}(x+2)$$

$$x^3-x+10 = x^2+4+4x$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$\leftarrow 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 7 \ 2 \ 2 \ 2$$

$$\leftarrow 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 7 \ 4 \ 2 \ 1$$

$$\leftarrow 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 7 \ 8 \ 1 \ 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \ 2 \ 1 \\ \swarrow \searrow \swarrow \searrow \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ \swarrow \searrow \swarrow \searrow \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \cdot 4 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$C_n$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$x = -3$$

$$-27+3+10 < 0$$

$$\Rightarrow x \neq -3$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ a \neq 0$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h$$

$$1400 = 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$2^3 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$C_4 = 4$$

$$2) \ .1100. \ .1010. \ .1001. \ .1000. \ .0110. \ .0101.$$

$$\ .1010. \ .0110. \ .0011. \ .1001. \ .0101. \ .0011.$$

$$= 6$$

$$3) \ .113 \ .52 \ 39$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$B_{n02} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\begin{cases} x^3-x^2-5x+6=0 \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2-5x+6 \\ -x^3-2x^2 \\ \hline -x^2-5x+6 \\ -x^2-3x \\ \hline -3x+6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1) \ 1-1-5+6=1 \\ -1) \ -1-1+5+6=7 \end{array}$$

$$2) \ 8-4-10+6=0$$

$$(x^2+x-3)(x-2) = x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6 = x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

