

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$M_0(-1; \sqrt{3})$
 $N_0(2\sqrt{3}; 2)$
 $O(0; 0)$
Найти мин.
расст. между
точками

1) мин. расст. между точками на кон. окружностях
можно быть, когда эти точки лежат на
одном радиусе $\Rightarrow$ надо найти все такие
положения, где муравей и пчела находятся
на одном радиусе.

2) пусть их скорости - v , их угловые скорости в рад/с -
 $\omega_{хс}$ и $\omega_{м}$; радиусы окр-ей $R_{хс}$ и $R_{м}$.
Найдем эти радиусы по теореме Пифагора.

$$R_{м} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \quad (-2 \text{ не берем т.к. радиус - скаляр})$$

$$R_{хс} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$3) \quad \omega_{м} = \frac{v}{R_{м}} = \frac{v}{2} \quad (\text{в рад/с})$$

$$\omega_{хс} = \frac{v}{R_{хс}} = \frac{v}{4}$$

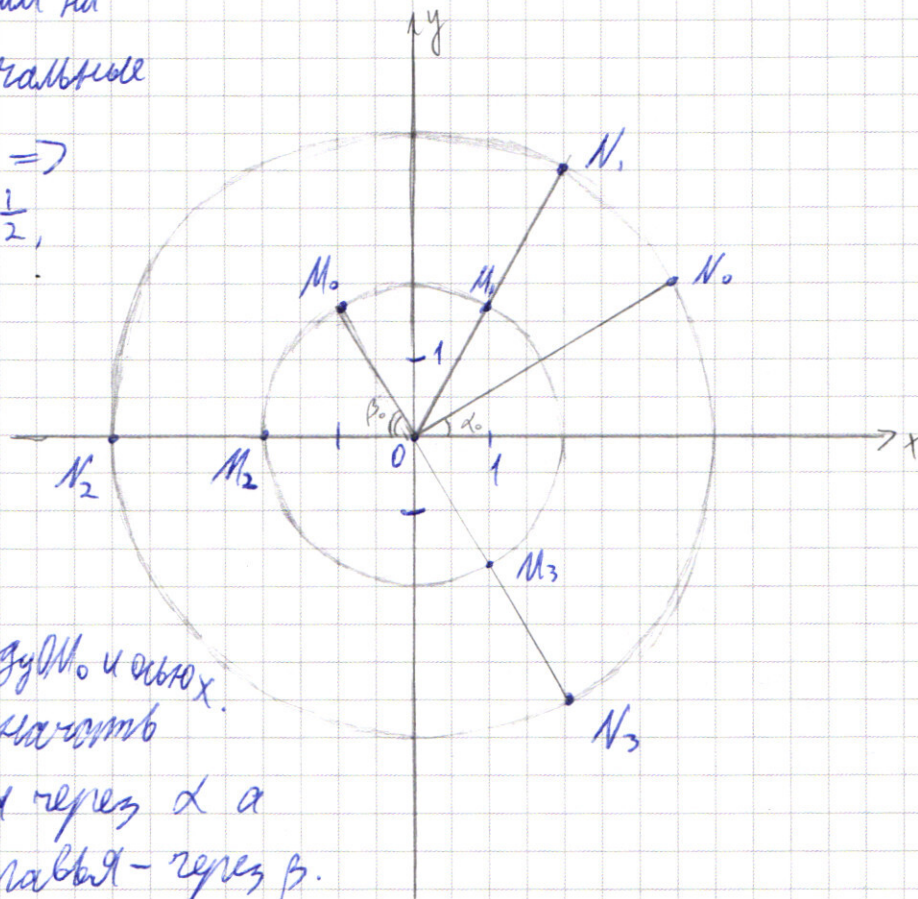
пусть $\omega_{м}$ и $\omega_{хс}$ - угловые скорости в град/с
получим, что $\omega_{м} = \frac{\pi \cdot \omega_{хс}}{180^\circ}$

$$\omega_{хс} = \frac{\pi \cdot \omega_{хс}}{180^\circ}$$

4) $\frac{\omega_{м}}{\omega_{хс}} = \frac{\omega_{м}}{\omega_{хс}} = 2$ т.к. они движутся в
разных направлениях ω угловая скорость

сближения $\omega_s = \omega_u + \omega_k$. Пусть $\omega_k = \omega$. Тогда $\omega_s = 3\omega$

5) обозначим на
картинке начальные
точки. $\angle M_0 N_0 = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{1}{2}$,
где α_0 - угол
между ON_0
и осью x ,
 $\Rightarrow \alpha_0 = 30^\circ$
 $\alpha_{p_0} = 60^\circ$, где



β_0 - $\angle$ между OM_0 и осью x .

Будем обозначать
углы по ходу через α
углы по обратному - через β .

6) $\angle M_0 ON_0 = 180^\circ - \alpha_0 - \beta_0 = 90^\circ \Rightarrow$ до 1 сближения по ходу надо вместе пройти 90° .

$$t_1 = \frac{90^\circ}{\omega_s} = \frac{30^\circ}{\omega}$$

тогда $\alpha_1 = \alpha_0 + \omega t_1 = 60^\circ$. (N_1 и M_1 - полные жужка и шурвал)

7) до следующего сближения им надо вместе пройти $360^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow t_2 = \frac{360^\circ}{\omega_s} = \frac{120^\circ}{\omega}$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega t_2 = \alpha_1 + 120^\circ = 180^\circ$$

до очередного сближения им надо будет пройти
раз вместе пройти $360^\circ \Rightarrow \alpha_n = \alpha_{n-1} + 120^\circ$

$$\text{тогда } \alpha_3 = \alpha_2 + 120^\circ = 300^\circ$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + 120^\circ = 420^\circ = 60^\circ \text{ (т.к. это больше полн. окр-ти)}$$

получим, что места встречи всегда будут

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

присоединить при $\alpha = 60^\circ$; $\alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 300^\circ$, т.е. в

8) Найти координаты N_1 ; N_2 ; N_3 .

$$\alpha_1 = 60^\circ \Rightarrow x_{N_1} = R \cos \alpha_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$y_{N_1} = R \sin \alpha_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow x_{N_2} = R \cos \alpha_2 = -R \cos 0^\circ = -4$$

$$y_{N_2} = R \sin \alpha_2 = R \sin 0^\circ = 0$$

$$\alpha_3 = 300^\circ \Rightarrow \alpha_3 \text{ (Л. д. с группой см.)} = 60^\circ$$

матри

$$x_{N_3} = R \cos \alpha = 2$$

$$y_{N_3} = -R \sin \alpha = -2\sqrt{3}$$

т.е. $N_1 (2; 2\sqrt{3})$

$N_2 (-4; 0)$

$N_3 (2; -2\sqrt{3})$

ответ: $(2; 2\sqrt{3})$ $(-4; 0)$ и $(2; -2\sqrt{3})$

N.2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

при каких a, b совм.

1) ум. сист. упр-й или совм. реш.,

если коэфф. при соотв. неизм.

проп-ны, т.е. надо найти все

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

2) $b=0$ - не реш. т.к. тогда во втором упр-и $1=0$

3) рассмотрим 2 случая, $a+b=0$ и $a+b \neq 0$.

4) если $a+b=0$:

$$\begin{cases} 12y=a \\ 4bx=1 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{a}{12} \\ x=\frac{1}{4b} \end{cases} \text{ - решение системы при } \forall a, b \text{ н.е. } a, b \in \mathbb{R}$$

5) если $a+b \neq 0$, справедливо $\textcircled{4}$

$$\text{н.е. } \frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a \quad | \cdot 4b(a+b)$$

$$3(a+b)^2 = 48 = 4ab(a+b)$$

распишем это как систему

$$\begin{cases} 4ab(a+b) = 48 \\ 3(a+b)^2 = 4ab(a+b) \\ 3(a+b)^2 = 48 \end{cases} \text{ и решим систему } \begin{cases} 4ab(a+b) = 48 : 4 \\ 3(a+b)^2 = 4ab(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ 3(a+b) = 4ab \end{cases} \begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ a+b = \frac{4}{3}ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab \cdot \frac{4}{3}ab = 12 \\ a+b = \frac{4}{3}ab \end{cases} \begin{cases} 4a^2b^2 = 9 \\ a+b = \frac{4}{3}ab \end{cases} \begin{cases} ab = \pm 3 \\ a+b = \frac{4}{3}ab \end{cases}$$

распишем как

$$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=\frac{4}{3}ab \end{cases} \begin{cases} ab=-3 \\ a+b=\frac{4}{3}ab \end{cases} \begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases} \begin{cases} ab=-3 \\ a+b=-4 \end{cases}$$

В 1-й сист. a и b легко подбираются: $\begin{cases} a=1, 3 \\ b=3, 1 \end{cases}$

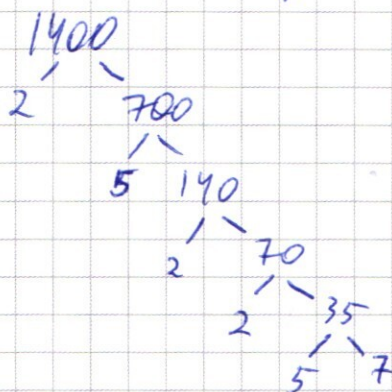
2-я равносильна ур-ю $x^2 + 4x - 3 = 0$, где корни x_1, x_2 равны a и b в любом порядке.

$$D = 4^2 + 3 = 7 \quad \begin{cases} a = \frac{-2 - \sqrt{7}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{7}}{2} \\ b = \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отвѣт: $(1; 3) (3; 1) \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{2}; \frac{-2+\sqrt{7}}{2} \right) \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{2}; \frac{-2-\sqrt{7}}{2} \right)$
N.5.

1) разделим 1400 на простые множители.



2) мы получили 6 простых чисел, чтобы составить из них 8 знач. число, не считая произведений, надо добавить 2 единицы.

Тогда число будет сост. из:

2 ед-и
3 двойки
2 пятёрки
1 семерка.

Найдём кол-во таких чисел.

7 может стоять на одной из 3-х мест (8 комбинаций)

тогда 5 могут стоять на 2 и 7 местах если рядом 6 комб.

если перед одну то 5

:

$6+5+4+3+2+1$ комб.

считали место с 7 несуществующим т.к. оно произв.

и 1400

1 могут быть на 2 и 5 местах

аналогично $4+3+2+1$ комб.

ост. 3 места для 3-х двоек.

Всего $8(6+5+4+3+2+1)(4+3+2+1)$ комбинаций.

3) Возьмем также случай, когда вместо 3 двух
звонка, четверка и единица, т.е.

3	1-цы	аналогично
1	2-ка	
1	4-ка	$8 \cdot 7 \cdot 6(4+2+1)$ комбинаций.
2	5-ка	
1	7-ка	

4) Еще возьмем случай, когда вместо 3 2-х
1 8-ка и 2 1-цы, т.е.

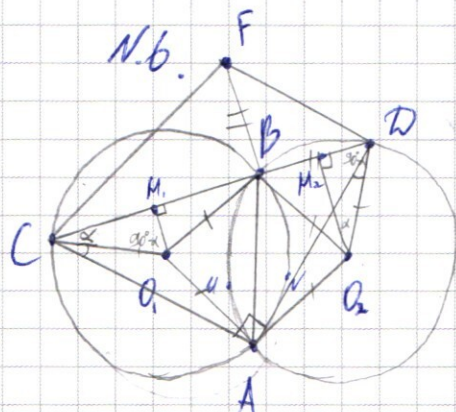
4	1-цы	тогда
2	5-ка	
1	7-ка	$8 \cdot 7 \cdot (5+4+3+2+1)$ комбинаций.
1	8-ка	

5) Получим, что всего нулевых чисел

$$\begin{aligned} & 8 \cdot (6+5+4+3+2+1)(4+3+2+1) + 8 \cdot 7 \cdot 6(4+2+1) + 8 \cdot 7(5+4+3+2+1) = \\ & = 8 \cdot 21 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 15 = 8 \cdot 21(10+20+5) = 8 \cdot 21 \cdot 35 = \\ & = 5880. \end{aligned}$$

Отв: 5880 чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

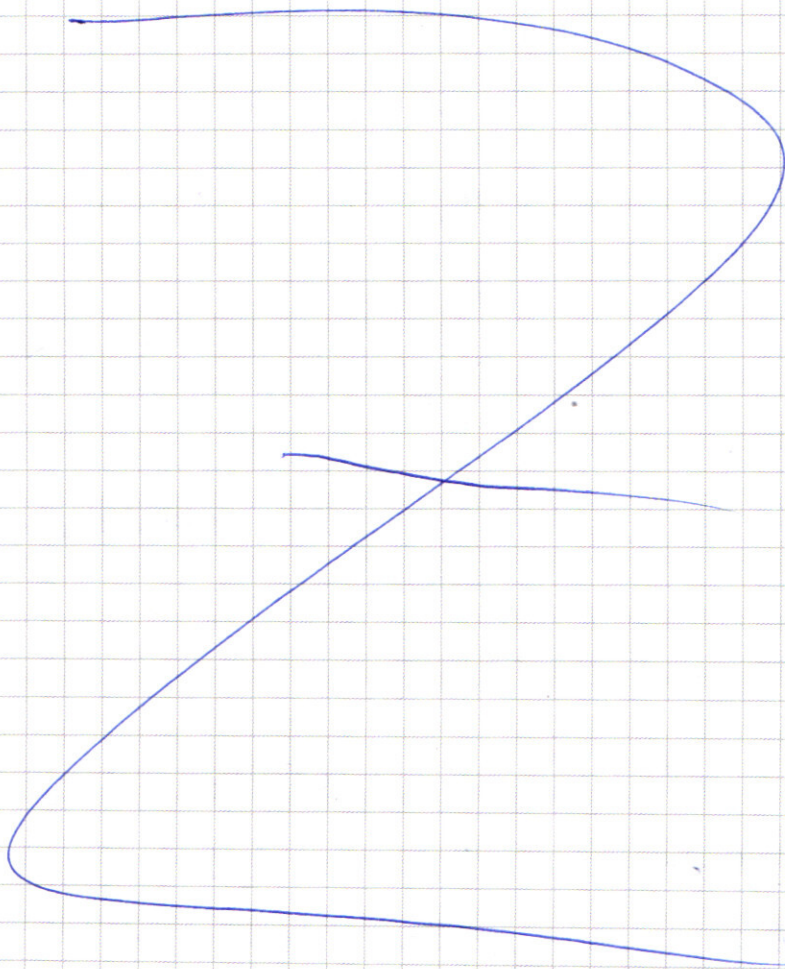


$$\begin{aligned} R &= g \\ B &\in CD \\ \angle CAQ &= 90^\circ \\ FB &\perp CD \\ BF &= BP \\ \hline CF &= ? \end{aligned}$$

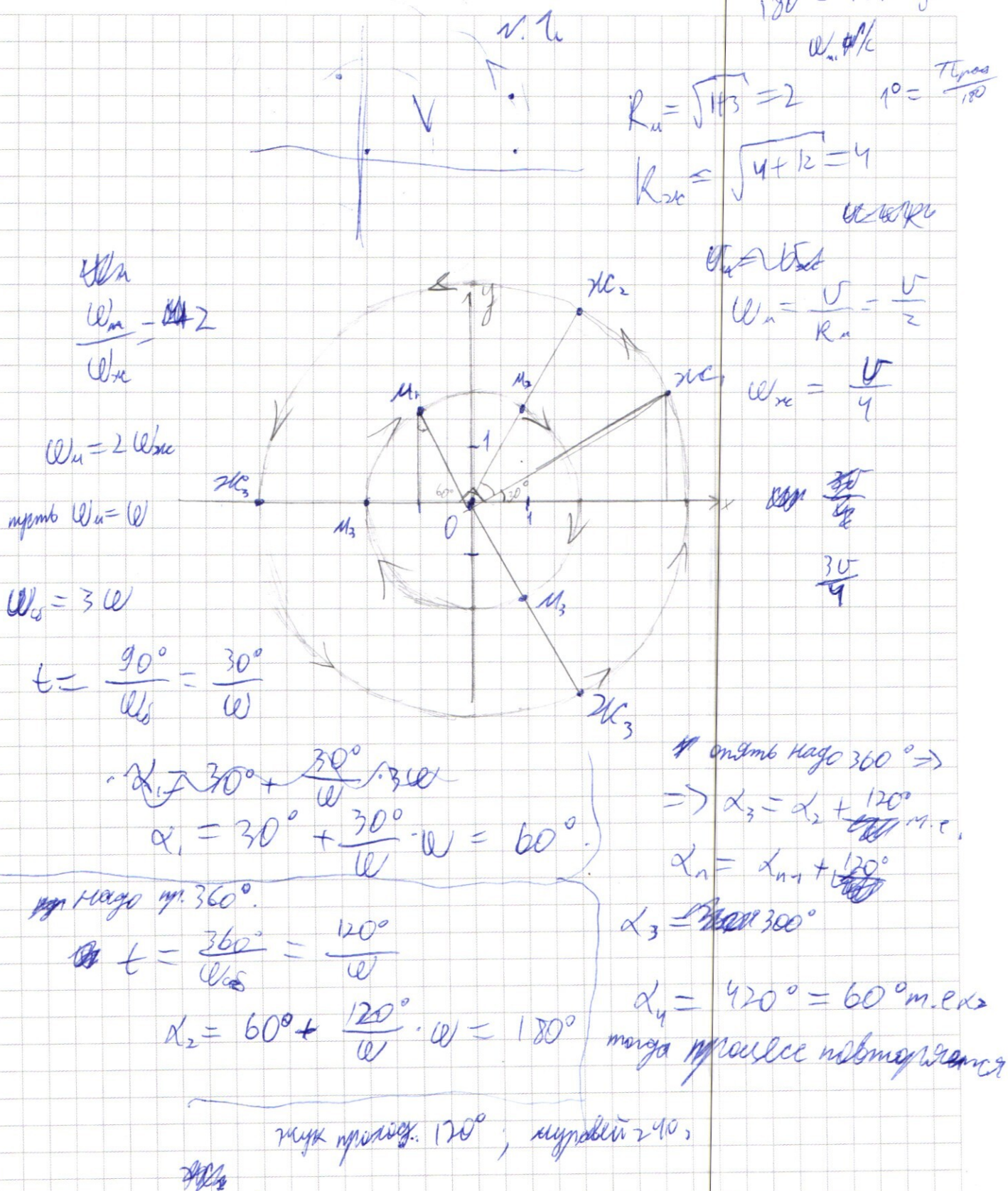
- CF = ?
- 1) возьмем произв. т. M и N на выпукл. дуге AB.
 - 2) соединим O, A; O, B; O₂A; O₂B; AB. т.к. O, B; O, A; O₂B и O₂A - рад. линии окр., O, B = O₂B = O₂A = O, A
тогда $\triangle AOB = \triangle AO_2B \Rightarrow \angle AOB = \angle AO_2B \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ANB = \angle AMB$
 - 3) из 2 $\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB$ (т.к. они равны окр. на выпукл. дуге)
тогда $\triangle CAO - \text{пр.} \Rightarrow CA = AO$
 - 4) соединим O, C и O₂D. Тогда $\triangle ACO = \triangle AO_2D \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle O, AC = \angle O_2AD \Rightarrow \angle O, CB = \angle O_2DA$
 - 5) $\angle O, CB + \angle O_2DB = \angle ACD + \angle ADC - \angle CAO + \angle O_2DA = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow O, C \perp O_2D$
 - 6) пусть $\angle O, CB = \alpha$. Тогда проведем высоты O, H₁ и O₂H₂
в $\triangle O, CB$ и $\triangle O_2BD$
Тогда $\angle COH_1 = 90^\circ - \alpha = \angle BDO_2 \Rightarrow \angle O, H_1 = \angle O_2H_2$

7) По условию, $BC = 2CM_1 = 2 \cdot OC \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 2R \sin \alpha = 18 \sin \alpha$
 $BD = 2DM_2 = 2 \cdot OD \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha = 18 \cos \alpha$

8) По м. Теореме CF = $\sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{18^2 \sin^2 \alpha + 18^2 \cos^2 \alpha} = 18$
 Ответ: 18.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$b \neq 0$

N.2.

$$3bx + 2y = 0$$

$$bx + 4y = 0$$

$$4bx + 6y = 1$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ b(4x + (a+b)y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4x + (a+b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ (a+b)b = 12 \\ a = 1 \end{cases} \begin{cases} 3+3b = 4b \\ b^2 + b = 12 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4 \\ a+b = 12 \\ a = \frac{1}{b} \end{cases} \text{ - 5 neg}$$

$$\begin{cases} a+b = \pm 4 \\ ab = 3 \\ a+b = 4 \\ ab = -3 \\ a+b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a+b=0 \\ 12y=a \\ 12y=a \\ 4bx=1 \end{matrix}$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$\frac{12}{a+b} = ab$$

$$\begin{cases} a=1, 3 \\ b=3, 1 \\ a=\frac{-2-\sqrt{3} \pm i\sqrt{7}}{2} \\ b=\frac{-2+\sqrt{7} \pm i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \frac{12}{ab+b^2} = a \\ \frac{12}{ab+b^2} = a=0 \end{matrix}$$

$$\frac{3a+3b}{4b} - a = 0$$

$$3a+3b-4ab = 4b$$

$$3a-b-4ab = 0$$

$$4b(a+b)$$

$$3a-b - \frac{48}{a+b} = 0$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\begin{matrix} D = 4^2 + 12 = 28 \\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2} \end{matrix}$$

$$(a+b)^2 \cdot 3 = 48 = 4ab(a+b)$$

$$3(a+b) = 4ab$$

$$3a+3b=4ab$$

$$a+b = \frac{4}{3}ab$$

$$ab(a+b) = 12$$

$$6ab = 3b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 16$$

$$\frac{4}{3}a^2b = 12$$

$$a^2b^2 = 9$$

$$ab = \pm 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

-27 +3 +10 < 0

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

х.з.

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

~~Реш~~

$$x \neq -2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

-8

$$-1-1+5+6$$

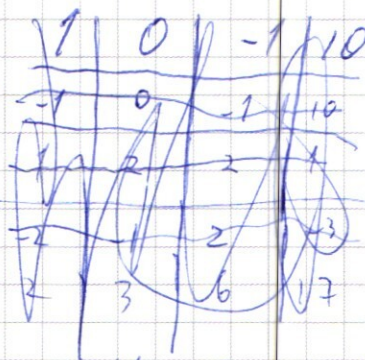
$$1-1-5+6$$

а.з.

$$-8-4+10+6$$

$$8-4+10+6=0$$

$$\text{орб: } x^3-x+10 > 0$$



$$-8+2+10$$

$$x = -2 \quad 7(43)$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = 0$$

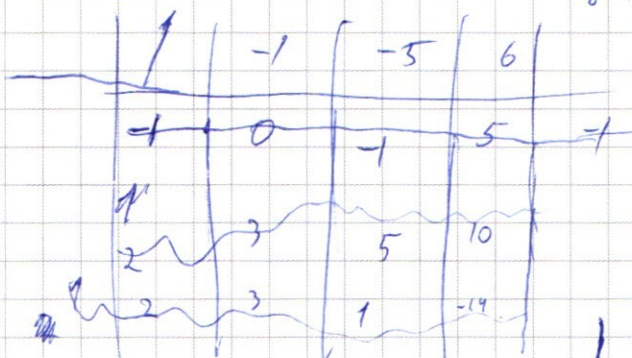
$$x^3-x+10=0$$

$$a=0$$

$$a=-\frac{1}{3}$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

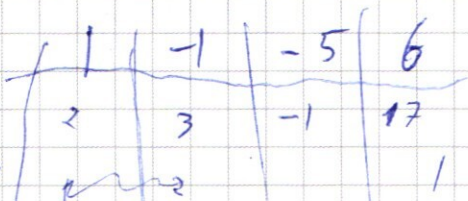
$$x^3+5x-6$$



$$x=2$$

$$1-1-5+6$$

$$1-2-3-1-14$$



$$1-1-5+6$$

$$1-1-5+6$$

$$2-1-3-2-13$$

$$2-1-3-2-1$$

$$2-1-3-2-13$$

$$2-1-3-4-6$$

$$2-1-4-3-8$$

$$1-2-3-1$$

$$x^3-x+10$$

ва

N. 4.
 $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x+1 \mid +1 \geq 0$
 $x \geq 1$

~~2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2~~
 $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
 $16 - 9 = 7$
 $\frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$
 $x < 1$

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$

$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\frac{235}{8}$
 5880

~~2x^4~~
 $\frac{35}{21}$
 $\frac{70}{235}$

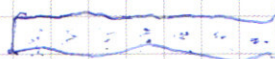
$2(x^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{2})(x^2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2}) - 3x^3 - 2x \geq 0$

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 5$
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 5$

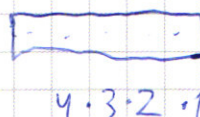
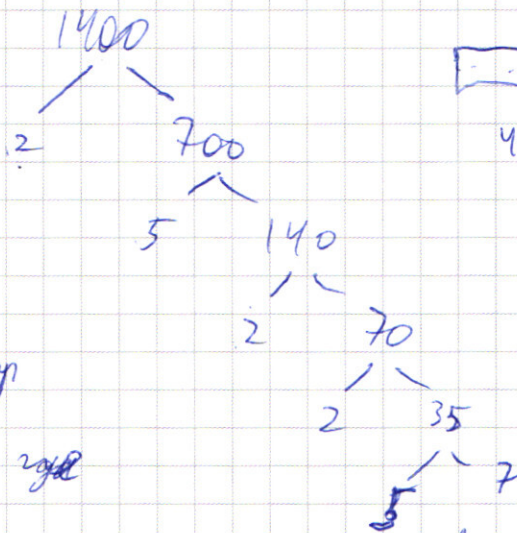
$\frac{1+10+1}{2} = 6$

$6+5+4+3+2+1$



$4 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3$
 $4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2$

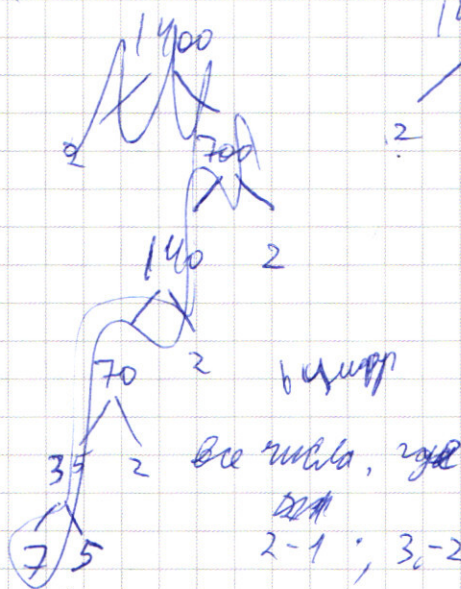
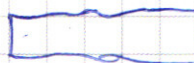
N. 5.



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



$2-1; 3-2; 2-5; 7-7$

$8 \cdot (6+5+4+3+2+1) \cdot (4+3+2+1)$

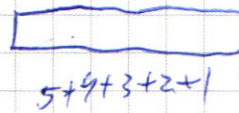
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (4+3+2+1)$

$3-1; 1-2; 1-4; 2-5; 1-7$

$8 \cdot 7 \cdot (5+4+3+2+1)$

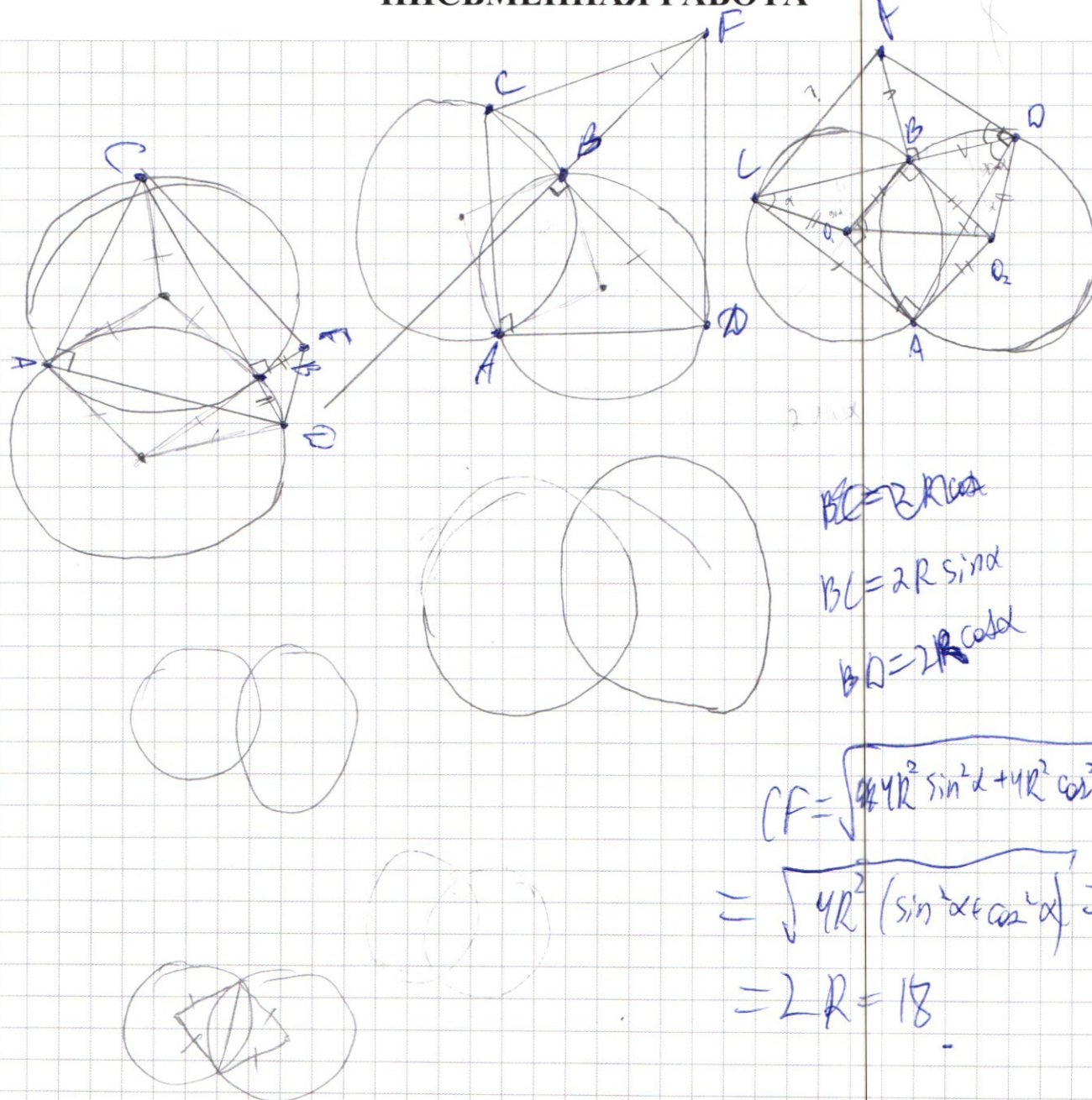
$4-1; 2-5; 1-7; 1-8$

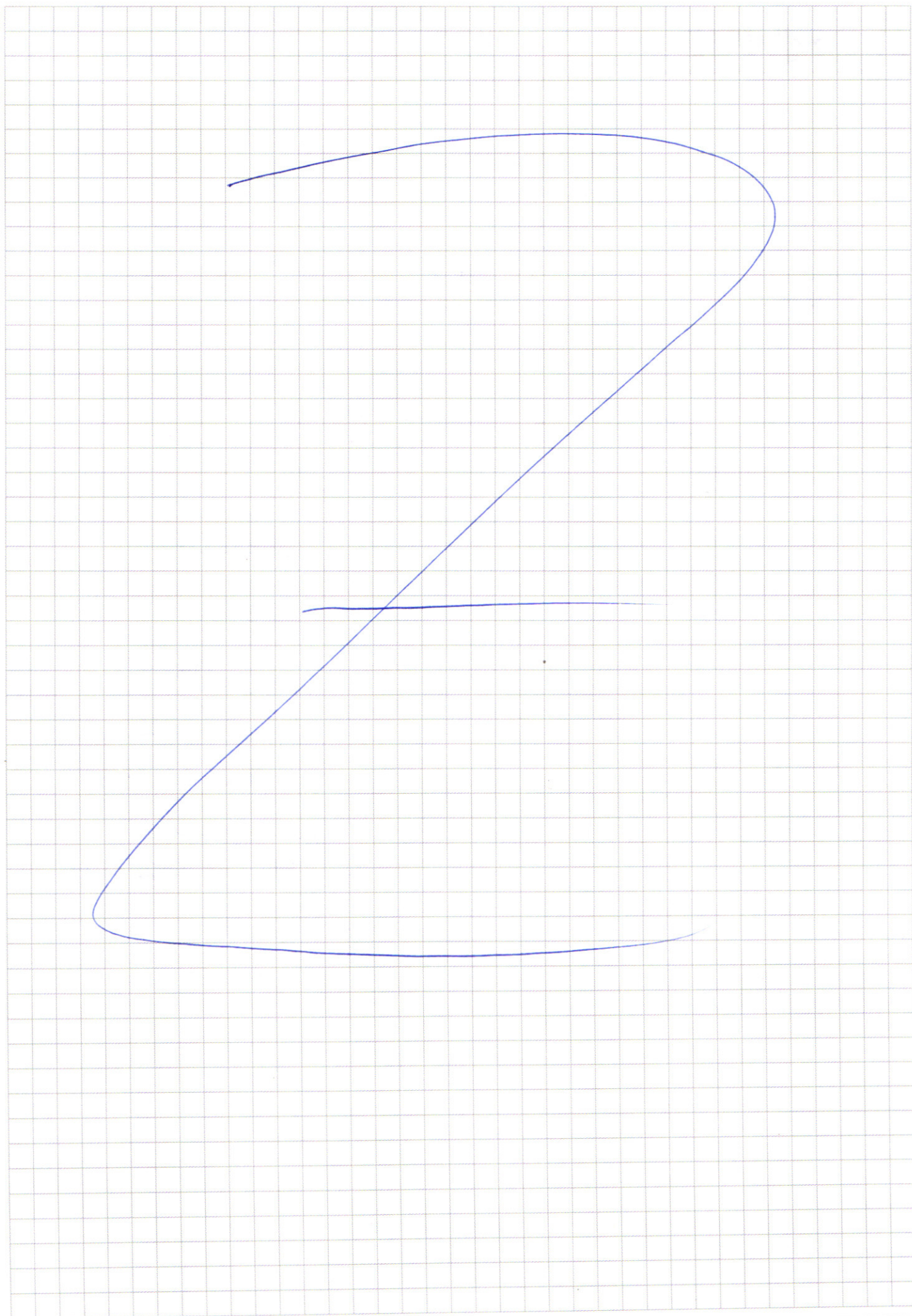
$8 \cdot 21 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 15 = 8 \cdot 21(10+20+5) = 8 \cdot 21 \cdot 35 = 5880$



$5+4+3+2+1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



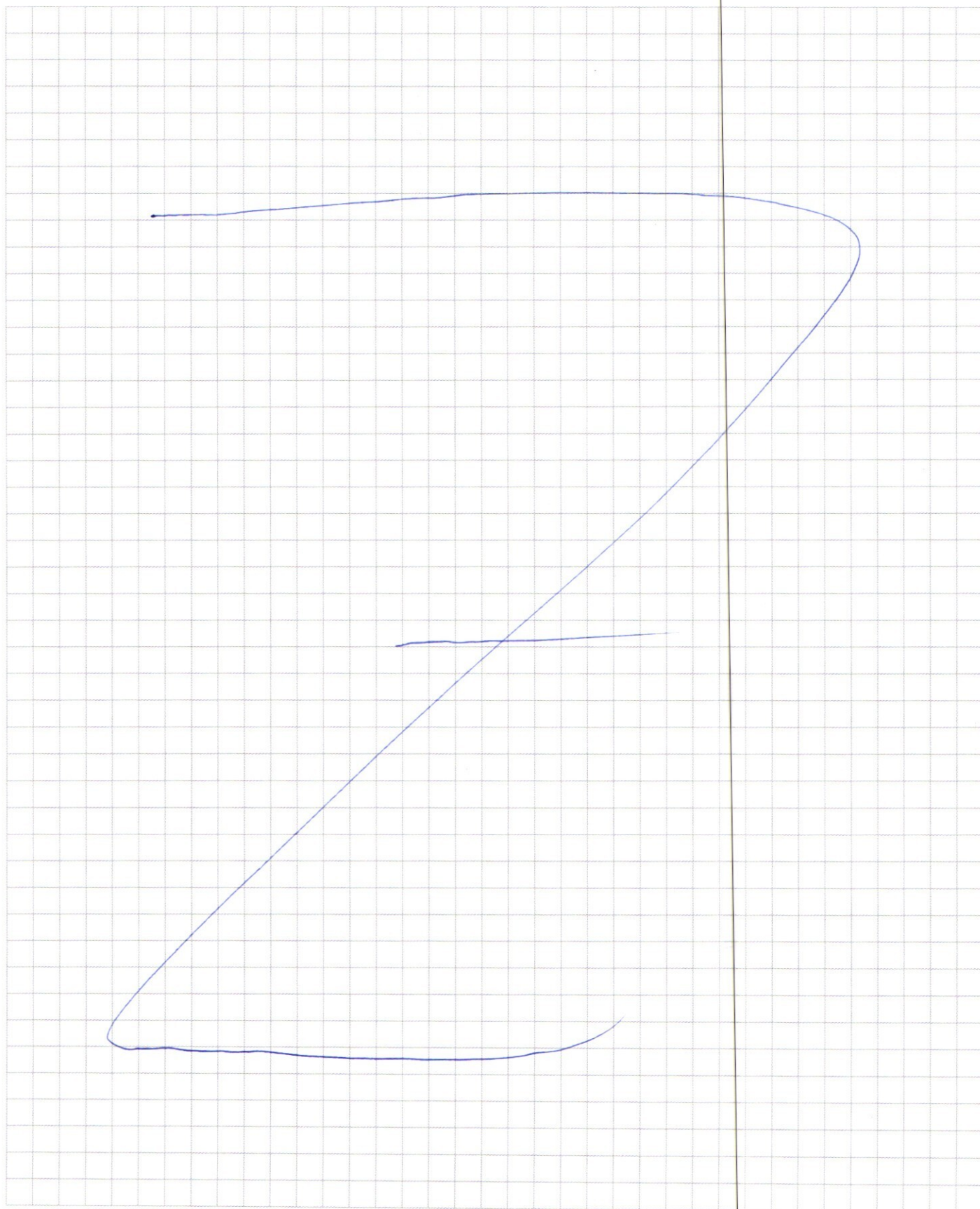




ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

