

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.
2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.
5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?
6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Запишем уравнения окружностей (траекторий полета пчелы и шмеля):

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = R_1^2, \quad R_1 - \text{радиус } \Gamma \text{ окружности}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = R_1^2 \quad \text{для пчелы}$$

$$\Rightarrow R_1 = 1$$

$$2^2 + 0^2 = 4 = R_2^2 \quad \text{для шмеля} \Rightarrow R_2 = 2$$

Пусть ω_1 - угловая скорость пчелы, ω_2 - угловая скорость шмеля, v - линейная скорость шмеля

$$\text{погда } \omega_1 = \frac{1,5v}{R_1} = 1,5\omega; \quad \omega_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$$

Угол между



$$\angle \alpha = \arctg\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \arctg(-\sqrt{3}),$$

$$\angle \alpha < 180^\circ \text{ т.к. } y_0 > 0^\circ$$

$$\Rightarrow \angle \alpha = 120^\circ$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 90^\circ; \quad \varphi_2 = 30^\circ \Rightarrow x_1 = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}; \quad y_1 = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1$$

; расстояния, меньшего, чем $R_2 - R_1$, не может быть, назовем момент ~~завождения~~ $R_2 - R_1$ "встречей"

не от, "встречи" до, "встречи" в сумме они

$$\text{проходят полный круг} \Rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3, \quad \beta_1 + \beta_2 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 90^\circ; \quad \beta_1 = 270^\circ$$

$\Rightarrow$ угол следующей "встречи" $\varphi_2 + \beta_2 = 120^\circ$, потом

$\varphi_2 + 2\beta_2 = 210^\circ$, ~~затем~~ ~~будет~~ $\varphi_2 + 3\beta_2 = 300^\circ$, в последний раз
 $\varphi_2 + 4\beta_2 = 390^\circ$, что аналогично $390^\circ - 360^\circ = 30^\circ = \varphi_2$,
 следующие "встречи" будут в тех же точках

$$\Rightarrow x_2 = 2 \cos 120^\circ, y_2 = 2 \sin 120^\circ, x_3 = 2 \cos 210^\circ, y_3 = 2 \sin 210^\circ; \\ x_4 = 2 \cos 300^\circ, y_4 = 2 \sin 300^\circ.$$

$$\Rightarrow x_2 = -1, y_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}, y_3 = -1; x_4 = 1, y_4 = -\sqrt{3}$$

Ответ: $(\sqrt{3}; 1); (-1; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -1); (1; -\sqrt{3})$

~ 7

$$\begin{cases} x^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x^2 - 2ax + x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow (x - a)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$\Rightarrow$ график этой функции - окружность

с радиусом $\sqrt{9} = 3$, центром в точке $(a; 3)$

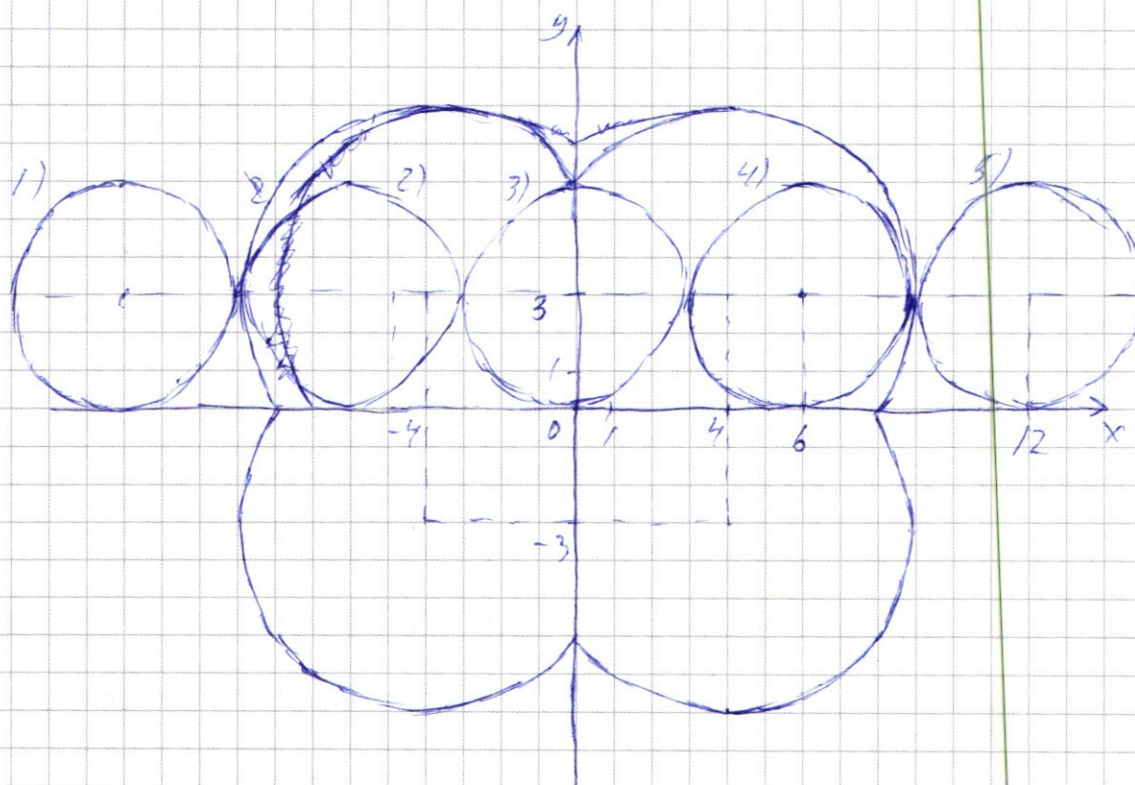
$$\text{Для } (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25;$$

$\Rightarrow x > 0, y > 0 \Rightarrow$ окружность с радиусом $\sqrt{25} = 5$
 и центром в точке $(4; 3)$

Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит
 графику, то очевидно, что точки $(-x_0; y_0);$
 $(x_0; -y_0); (-x_0; -y_0)$ также принадлежат
 графику.

Построим оба этих графика:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~Если $a > 0$:~~

~~при $a < 6$ система 0 решений~~

~~и $a \leq -12$ 0 общих точек (0 решений)~~

1) $a = -12$ 1 общая точка, т.к. окружности касаются

~~$-12 < a < -6$ 2 общие точки, окр. пересекаются~~

2) $a = -6$ 1 общая точка

~~$-6 < a < 0$ 0 общих точек~~

3) $a = 0$ 1 общая точка

~~$0 < a < 6$ 0 общих точек~~

4) $a = 6$ 1 общая точка

~~$6 < a < 12$ 2 общие точки~~

5) $a = 12$ 1 общая точка

в $a > 12$ обоих почках

$$\Rightarrow a \in (-12, -6) \cup (6, 12)$$

Ответ: $a \in (-12, -6) \cup (6, 12)$

~ 5

Кол-во всех комбинаций костей равно 6^{70} , поэтому вероятность прямо пропорциональна

кол-ву удовлетворяющих условию комбинаций.

Разделим все комбинации на пары: если

~~кажд~~ на грани одного кубика выпадет число A в первой комбинации, то во

второй комбинации должно выпасть $6 - A + 1 = 7 - A$

Тогда сумма чисел X в первой комбинации пусть будет равна X , следовательно, в второй

$$\text{сумма будет равна } 70 \cdot 7 - \sum_{i=1}^{70} A_i = 490 - X$$

$\Rightarrow$ для всех $X > 350$ пара будет

$$490 - X < 490 - 350 < 140, \text{ пусть количество}$$

комбинаций, где $X > 350$, равно N_1 . Все

эти комбинации удовлетворяют I условию,

и других таких комбинаций нет, ~~их кол-во~~

равно $N_1 = N_2'$, где N_2' - кол-во комбинаций,

в которых $X < 140$. N_2'' - кол-во комбинаций,

в которых $X = 140$. Очевидно, что второму II

условию удовлетворяет $N_2 = N_2' + N_2''$ комбинаций;

$$\Rightarrow N_2 > N_2' \equiv N_1 \Rightarrow N_2 > N_1$$

Ответ: больше вероятность того, что сумма не больше 140.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot (x^3 - 18x + 28) \leq 0$$

$$|x^3 - 18x + 28| \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \leq 0 \\ x^3 - 18x + 28 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 18x + 28 = 0$$

Пусть $x = 2$

$$\Rightarrow 8 - 36 + 28 = 36 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

Пусть $x = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{8 - 20 + 7} = \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$$

Пусть $x = -1 - 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - 2\sqrt{2})^3 + 10(-1 - 2\sqrt{2}) + 7} = \sqrt{-11 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{(-1 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 24) + 10(-1 - 2\sqrt{2}) + 7} = \sqrt{-8 - 2\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$$

Пусть $x = -1 + 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 + 2\sqrt{2})^3 + 10(-1 + 2\sqrt{2}) + 7} = \sqrt{22\sqrt{2} - 25 + 10 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2} - 8} \notin \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 - 10x + 7} \leq -1$$

$$\Rightarrow x^3 - 10x + 7 \geq 1 \Rightarrow x^3 - 10x + 6 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$2 \cdot 3^4 - 3^3 + 10 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 =$$

$$= 3^4$$

$$81 + 90 - 27 + 9$$

$$2 \cdot 9^4 - 3 \cdot 9^3 + 10 \cdot 9^2 - 6 \cdot 9 + 9 = 0$$

$$2 \cdot 9^3 - 3 \cdot 9^2 + 90 - 5 = 0$$

$$2 \cdot 1,5^4 - 2 \cdot 1,5^3$$

$$10 \cdot 1,5^2 - 6 \cdot 1,5 + 9 - 8 \cdot 4 \cdot 1,5^2$$

$$= 0$$

$$6 \cdot 1,5^2 + 9 = 0$$

$$(x-0)^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 9$$



$$(2x^2 + 6x + c)(x^2 + ex + f) =$$

$$= 2x^4 + (c+6e)x^3 + (ce+2f+6e)x^2$$

$$2e+6f=-3$$

$$c+2f+6e=10$$

$$6f+ce=-6$$

$$cf=9$$

$$f = \frac{9}{c}$$

$$2e+6=-3$$

$$c+2f+6e=10$$

$$6f+ce=-6$$

$$cf=9$$

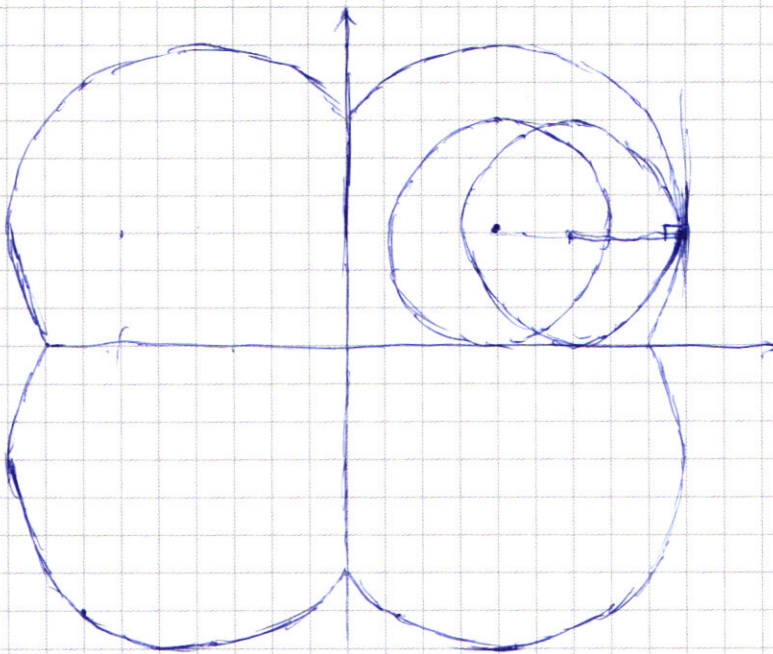
$$e = -3 - 2e$$

$$c+2f$$

$$-27 - 18e + c^2e = -6 \cdot \frac{9}{c} + ce$$

$$e(c^2 - 18) = 21$$

$$e = \frac{21}{c^2 - 18}$$



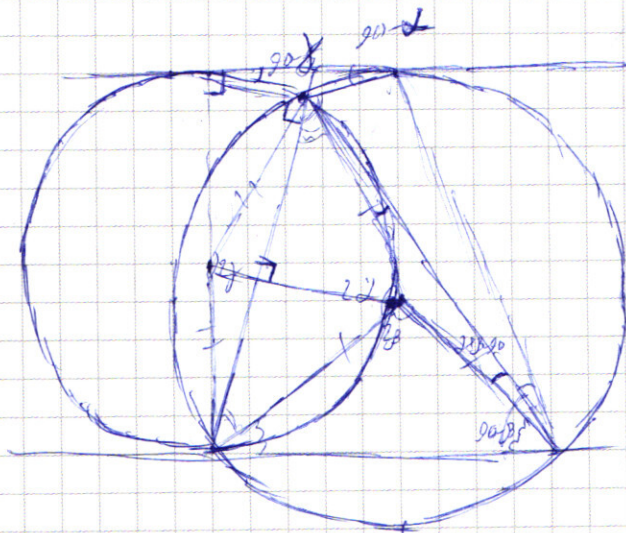
$$-12 < \alpha < -6; \quad 6 < \beta < 12$$

$$270 - \alpha - \beta + \alpha = 180$$

$$370 - \alpha - \beta = 180 - 2\alpha$$

$$218 - 120 = 360 -$$

$$\alpha = \beta$$



α

$$360 - 2\alpha$$

$$2\alpha -$$

$$90 - \beta$$

$$2 + \beta - 90$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)$$

$$\frac{\frac{5}{4} \sin 2\beta}{\sin 2\beta + \sin(180 - 2\beta)}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\sqrt{\frac{5}{8}}$$

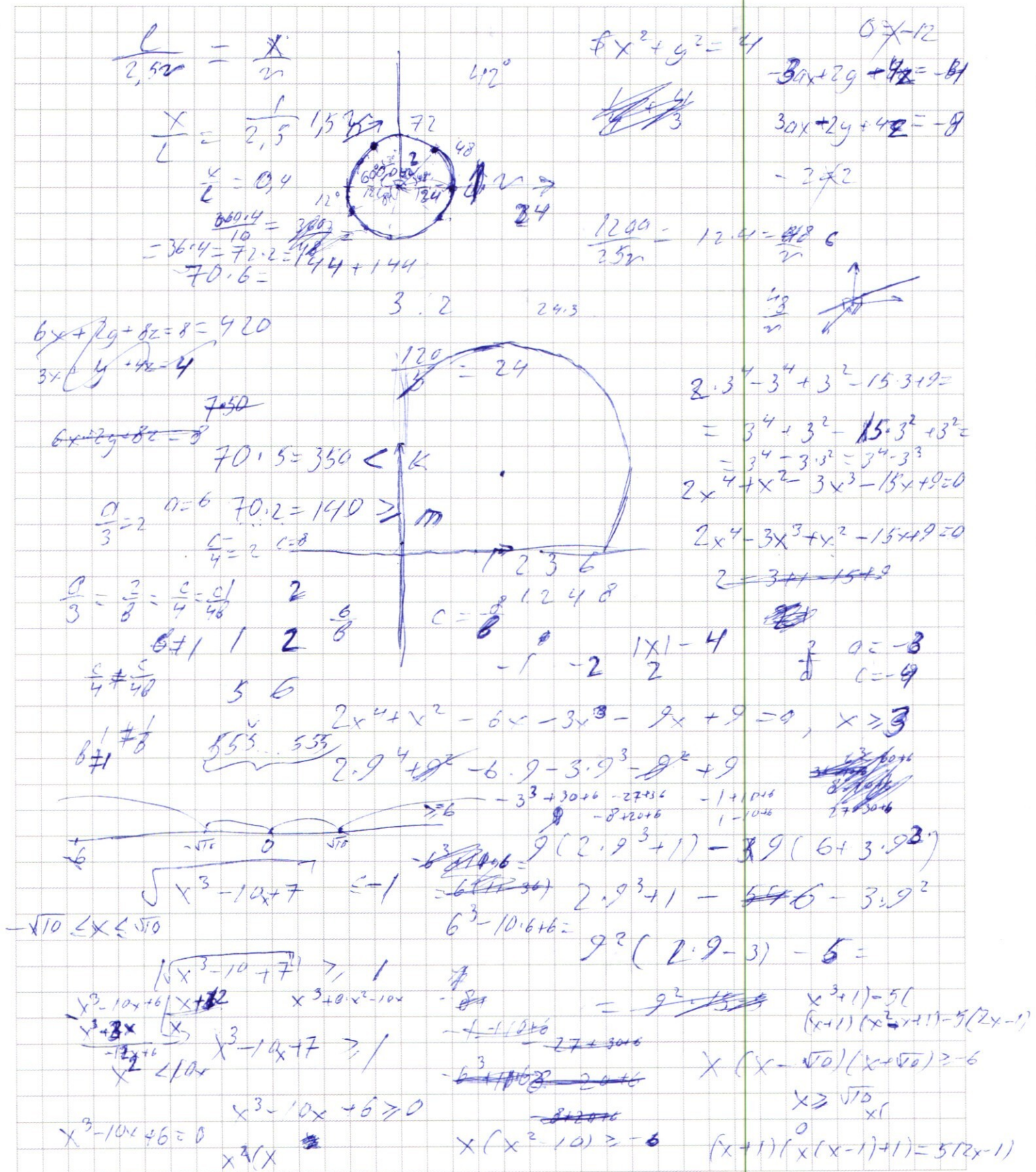
$$\frac{5}{8}$$

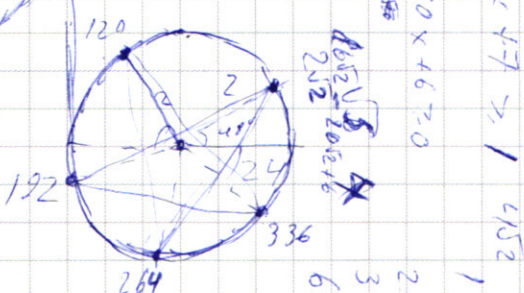
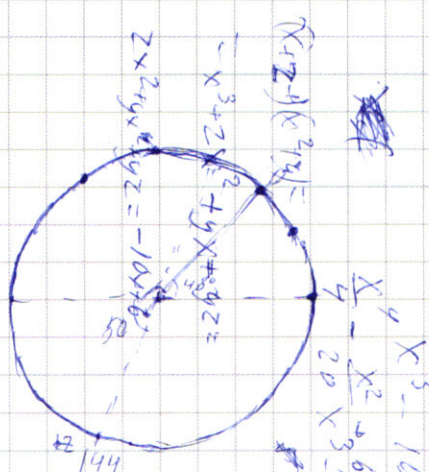
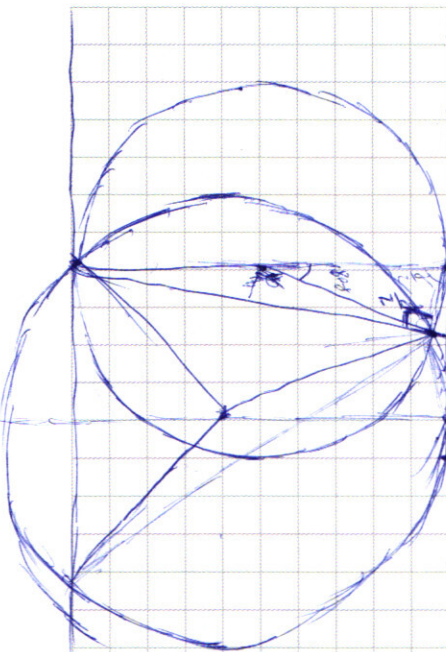
$$(2\sqrt{2} - 1)(8 - 4\sqrt{2} + 1)$$

$$(2\sqrt{2} - 1)(9 - 4\sqrt{2})$$

$$18\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 16 - 9 = 22\sqrt{2} - 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$144 + 48 = 192$$

132

194

$$17 \cdot 144 + 48 = 2448$$

$$21 = 5K$$

$$\frac{360}{194} = \frac{12 \cdot 30}{12 \cdot 2} = \frac{30}{2}$$

$$48 + 144 = 192 = \frac{8}{2}$$

$$192 + 144 = 336$$

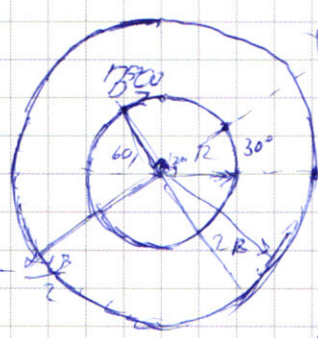
$$336 + 144 = 480 - 360 = 120$$

$$1) (2 \cos 48^\circ, 2 \sin 48^\circ) \cdot 120 + 144 = 264$$

$$2) (-2 \cos 12^\circ, -2 \sin 12^\circ) \cdot 264 + 144 = 408 - 360 = 48$$

$$3) (2 \cos 24^\circ, -2 \sin 24^\circ) = 48$$

$$4) (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$



$$\frac{180 - 360 - \beta}{2} = \omega_2$$

$$180 - 360 - \beta = \omega_2$$

$$\frac{2 + \beta - 180}{2} R_2^2 \sin \alpha + \frac{R_1^2 \sin \gamma}{2} =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{R_2^2 \sin \beta}{4}$$

$$R_2^2 \left(\frac{5}{4} R_2 \sin \beta - \sin \alpha \right) = R_1^2 \sin \gamma$$

$$X^3 - 18X + 28 = 0$$

