

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

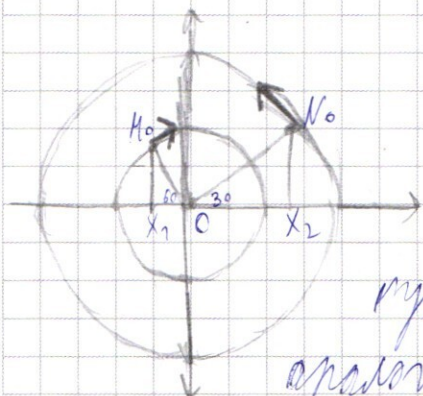
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



Отсюда, что $MO^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \Rightarrow MO = 2$.

$OK_0^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 \Rightarrow OK_0 = 4$. MO и OK_0 —

уменьше радиусов окружностей. Тогда —

прим. угла: $\angle MOA = \arcsin \frac{MO \cdot \sin 60^\circ}{MO} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$

аналогично $\angle K_0OB = \arcsin \frac{MO \cdot \sin 30^\circ}{MO} = \frac{1}{2} = 30^\circ$. Отсюда,

то расстояние между M и K_0 будет наименьшим,

если M будет лежать на OK_0 . Тогда расстояние будет

равно разнице радиусов т.е. 2*. Заметим, что т.к. $MO < KO$,

то за одинаковое время с равной скоростью M будет

проходить меньшую часть от окружности, чем K_0 . Скорости:

на всей пути M проходимая $2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi$, а для пути K_0 $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$.

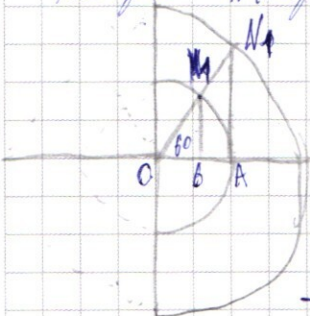
Следовательно M будет проходить в 2 раза меньшую дугу.

В итоге, что пройдет 2 градуса M , K_0 пройдет 1. Первая

встреча будет в предельном углу K_0OK_0 . $180 - 60 - 30 = 90^\circ$ между

лучами. Пусть M пройдет x градусов. $2x + x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow$

Тогда M_1 будет M как показано на рисунке. Координаты:



1) для $M_1: \angle OAM_1 = 30^\circ; \angle AOM_1 = 90^\circ; OM_1 = 4 \Rightarrow OA = 2$.

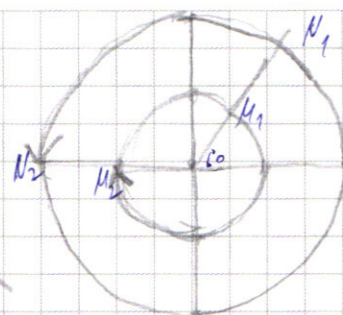
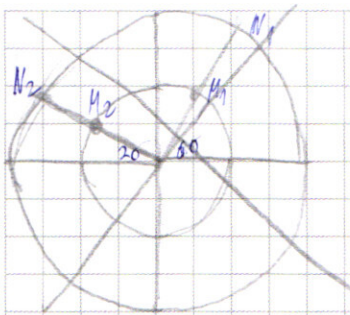
Тогда $M_1K_0 = 2\sqrt{3}$. $(2; 2\sqrt{3})$

2) для M_2 аналогично $OB = \frac{OM_2}{2} = 1 \Rightarrow M_2B = \sqrt{3} (1; \sqrt{3})$

~~Углы между лучами $360 - 60 - 300$. $x + 2x = 360 \Rightarrow$~~

~~$x = 100^\circ$ Углы между лучами 360 т.к. они~~

соответствуют x $x + 2x = 360 \Rightarrow x = 120^\circ$



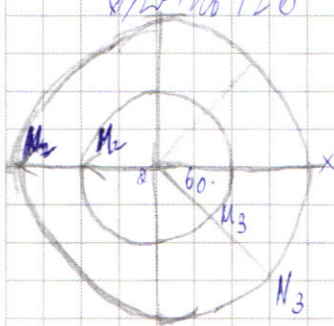
$$60^\circ + 120^\circ \Rightarrow 180^\circ \text{ для } M_1$$

$$N \text{ } 60^\circ \text{ } 180^\circ \Rightarrow 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ \text{ для } M_2$$

$$M_2(-2; 0); M_3(-4; 0)$$

Между ними есть $360^\circ \Rightarrow$

есть 120° поворот.



Здесь будет универсально первый вектор относительно OX . $M_3(1; -\sqrt{3})$

$$M_3(2; -2\sqrt{3})$$

Затем будем поворачивать все на 120° для

N и M придет 60° OX и 60° ниже $OX \Rightarrow$ попадет в M_1 . И аналогично тоже попадет в $M_1 \Rightarrow$ линии будут повторяться т.к. $60^\circ + 120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 60^\circ + 360^\circ \leftarrow$ целый круг.

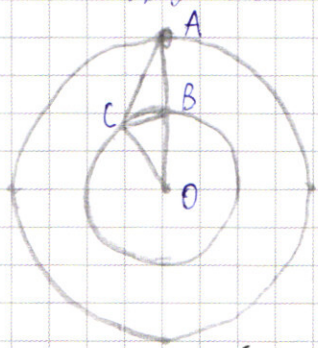
2 целых круга.

ответ.

$$M_1(2; 2\sqrt{3}); M_2(-4; 0); M_3(1; -\sqrt{3})$$

~~$$M_1(1; \sqrt{3}); M_2(-2; 0); M_3(2; -2\sqrt{3})$$~~

* Докажем



что это невыполнимо. Пусть AB , тогда

$$AC + CO < AB + BO, \text{ но в } \triangle ACO \text{ } AO \nless AC + CO \Rightarrow$$

$$AB + BO < AC + CO \text{ противоречие} \Rightarrow AO - \text{наименьшее}$$

расстояние ч.т.д.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 \quad \sqrt{3}$$

$$x^2+5x+6 \quad (1) \text{ по т. Виета } \begin{matrix} x_1+x_2=-5 \\ x_1 \cdot x_2=6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=-2 \\ x_2=-3 \end{matrix} \Rightarrow (1) = (x+2)(x+3)$$

$$\text{при } x=-3$$

$$-3^3+3+10 < 0 \Rightarrow \text{не имеет смысла} \Rightarrow -3 \text{ не корень}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$\begin{cases} x^3-x+10 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

подбором

$$\begin{matrix} 1-1-5+6 \neq 0 \\ -1-1+5+6 \neq 0 \\ 2-4-10+6 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow x=2$$

корень по т. Безу

$$\begin{array}{r} x^3-x^2-5x+6 \\ -x^3+2x^2 \\ \hline x^2-5x+6 \\ -x^2+2x \\ \hline -3x+6 \\ -3x+6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+x+3 \end{array}$$

записали, что

$$2^3-2+10 \geq 0 \text{ и } 2+2 \geq 0 \Rightarrow 2 \text{ является решением.}$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x+2 \geq 0 \text{ где } x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x+2 \geq 0 \text{ где } x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 2 \geq 0$$

$$\sqrt{13} + 3 > 0$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

проверим $x^3-x+10 \geq 0$ где $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 10 \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{13}^3 - 3 \cdot 13 + 3\sqrt{13} - 1}{8} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 10,5 \geq 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{3\sqrt{13}}{8} - \frac{4\sqrt{13}}{8} + 5,5 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^3 + 5,5 - \frac{\sqrt{13}}{8} \geq 0$$

сравним
5,5 и $\frac{\sqrt{13}}{8}$

$$\begin{matrix} 44 & \sqrt{13} \\ 1931 & \sqrt{13} \\ 1936 & > 13 \end{matrix} \Rightarrow \text{корень } \frac{\sqrt{13}-1}{2} \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2.$$

15.

$$\begin{array}{r} 1400 \overline{) 2} \\ 700 \overline{) 2} \\ 350 \overline{) 2} \\ 175 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 5} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Видно, что 1 тысяча обязательно

делится на 2 и 5, поэтому мы можем выписать

и 7 и 25 и получить. Если 8, то есть 8 способов раз-

ложить 7. Для каждого есть $\frac{7 \cdot 6}{2}$ т.к. они

одинаковые $\Rightarrow 8 \cdot 5 \cdot 5 \dots$ и $8 \cdot 5 \cdot 5 \dots$ это одно и

то же. 2^3 это либо $8 \cdot 1 \cdot 1 \dots$ (1), либо $2 \cdot 4 \cdot 1 \dots$ (2), либо $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \dots$ (3)

(1) разложить $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2}$ комбинаций как раз выбрать 8 в том же. Вставим 5 шт. на остальные вставим единицы $\Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$

(2) 4 можно представить 5 способами, а 2 уже 4 $\Rightarrow 5 \cdot 4 \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2}$

(3) Первая группа 5 способов - вторая 4 - третья 3. Зам. Видно, что $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ и $\frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ и т.д. - одинаковые комбинации $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{2}$

Все варианты: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 5880$

Ответ: 5880.

12. (просто)

Иногда имеют значение кол-во решений, или составя к виду $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=c \end{cases}$. Составляю с помощью устного

умножения $\frac{a}{n}x + \frac{b}{n}y = \frac{c}{n}$ $\text{т.к. } 1 \cdot n = ax+by=c$

Заметим, что $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ или $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ можно решить.

Погда $\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{22}{(a+b)b} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow 3(a+b)^2 b = 486 \Leftrightarrow a+b = \pm 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

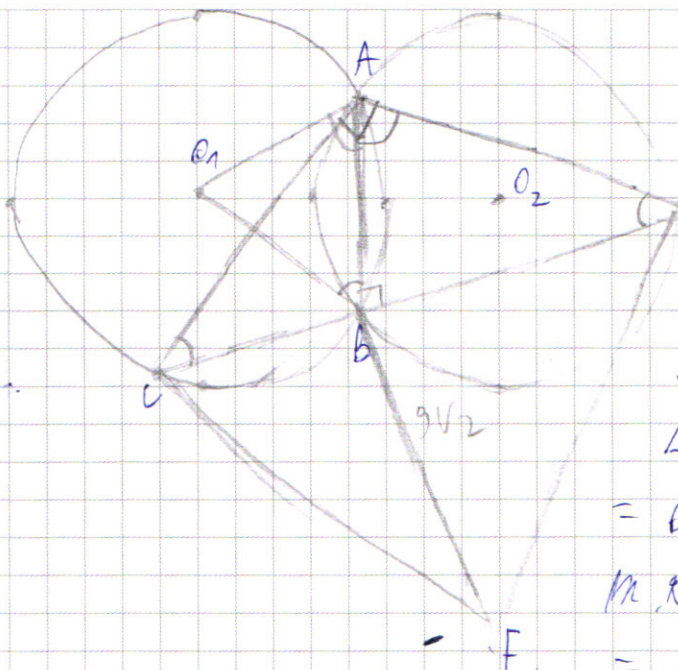
Ищем $a+b=-4$. $\begin{cases} -12x+12y=a \\ 4b x - 4b y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12(y-x)=a \\ 4b(x-y)=1 \end{cases} \quad (1)$ или $a < 0$, то $y-x < 0$,
то $x-y > 0 \Rightarrow b > 0$.
или $a > 0$, то $y-x > 0$,
то $x-y < 0$, то $b < 0$.
при $a+b=-4$ и 1
кратны по
знакам

Ищем $a+b=4$. $\begin{cases} 12x+12y=a \\ 4b x - 4b y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12(x+y)=a \\ 4b(x-y)=1 \end{cases}$
 $x+y \neq 0$ т.к. $4b(x+y)=1$ и $b \neq 0 \Rightarrow$
гдм $\frac{3}{1} = \frac{a}{1} \Rightarrow ab=3$. $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a=\frac{3}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{b}+b-4=0 \\ b^2-4b+3=0 \end{cases}$
 $\begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases} \leftarrow$ при $a+b=4$

(1) $x-y \neq y-x \neq 0$ т.к. $4b(x-y)=1, b \neq 0$. гдм $\frac{12}{-4b} = a \Rightarrow 3 = -ab$
 $\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{b}+b+4=0 \\ b^2+4b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -2+2\sqrt{7} \\ b_2 = -2-2\sqrt{7} \end{cases}$
 $a_1 = -\frac{3}{-2+2\sqrt{7}} = -\frac{3(2\sqrt{7}+2)}{28-4} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$
 $a_2 = -\frac{3}{-2-2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$

проверим:
 $\begin{cases} 3(1+3)x+12y=1 \\ 4x+(1+3)y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(3-1)x+12y=3 \\ 4x+(3-1)y=1 \end{cases} \quad 1/3 \checkmark$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-4)x+12y = -\frac{\sqrt{7}+1}{4} \\ 4(-2+2\sqrt{7})x+(-4)(-2+2\sqrt{7})y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 12(y-x) = -\frac{\sqrt{7}+1}{4} \\ 4(-2+2\sqrt{7})(x-y)=1 \end{cases}$
 $\begin{cases} y-x = -\frac{\sqrt{7}+1}{48} \\ y-x = -\frac{1}{4(-2+2\sqrt{7})} = -\frac{2\sqrt{7}+2}{4(28-4)} = -\frac{\sqrt{7}+1}{48} \quad \checkmark$
 $\begin{cases} -12x+12y = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \\ 4(-2-2\sqrt{7})x+4(-2-2\sqrt{7})y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 12(y-x) = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \\ 4(-2\sqrt{7}-2)(y-x)=-1 \end{cases}$
 $\begin{cases} y-x = \frac{\sqrt{7}-1}{48} \\ y-x = -\frac{1}{4(-2\sqrt{7}-2)} = \frac{1}{4(2\sqrt{7}+2)} = \frac{2\sqrt{7}-2}{4 \cdot 24} = \frac{\sqrt{7}-1}{48} \quad \checkmark$
Ответ: $(1, 3), (3, 1), (-\frac{\sqrt{7}+1}{4}, 2\sqrt{7}-2), (\frac{\sqrt{7}-1}{4}, -2\sqrt{7}-2)$
и др.

Дано: см. рис. см. далее.



$$1) \angle ACB = \angle ADB \text{ т.к. они}$$

отражены на одну дугу

($\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну дугу)

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{90 - 90}{2} = 45^\circ \text{ т.к.}$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$\angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \text{ и } O_1A =$$

$$= O_1B = 9 \Rightarrow AB = 9\sqrt{2}, \angle O_1AB = 45^\circ$$

$$\text{т.к. } O_1A = O_1B \Rightarrow \angle BAO = 90 - 45 = 45 =$$

$$= \angle ACB = \angle ADB. \text{ Тогда } \angle ABD = 90 -$$

$$- 2 \cdot 45 = 0. \Delta ABO \text{ равнобедренный. } \Rightarrow AB = BO = 9\sqrt{2} = BF. AF = \frac{BO}{\sin 45} = \frac{9\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 18 \Rightarrow AF = 18 = AC. AB = 9\sqrt{2} = CB \text{ т.к. } \angle BCA = \angle CAB = 45^\circ \Rightarrow AC = 18$$

$$\text{т.к. } CB = 9\sqrt{2}, BF = 9\sqrt{2} \Rightarrow CF = \frac{BF}{\sin 45} = 18.$$

Ответ: 18.

№7. (похоже)

$$x-3-y \geq 0, x-3+y \geq 0 \quad 1$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 25 \end{cases} \quad 2$$

$$\text{из (2), мал. квадрат}$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 25$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$y \leq x-3$$

$$y \geq 3-x$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ -y \leq x-3 \end{cases}$$

$$0 \leq x-6 \Rightarrow x \geq 3$$

$$x \in [3; 6]$$

$$y \in [0; 3]$$

$$y \leq 3$$

$$y \geq 3$$

$$1: x \in [3; 6], y \in [0; 3]$$

$$x \in [3; 6]$$

$$x-3-y \geq 0$$

$$x-3+y \geq 0$$

$$y \leq x-3$$

$$y \geq 3-x$$

$$y \leq x-3 \Rightarrow y \leq 0$$

$$y \geq 3-x \Rightarrow y \geq 3$$

$$x-3-y+3-x-y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$y \leq 3$$

$$y \in [-3; 0]$$

$$x \in [3; 6]$$

$$y \in [-3; 0]$$

$$x \in [3; 6]$$

$$y \in [-3; 0]$$

$$x \in [3; 6]$$

$$y \in [-3; 0]$$

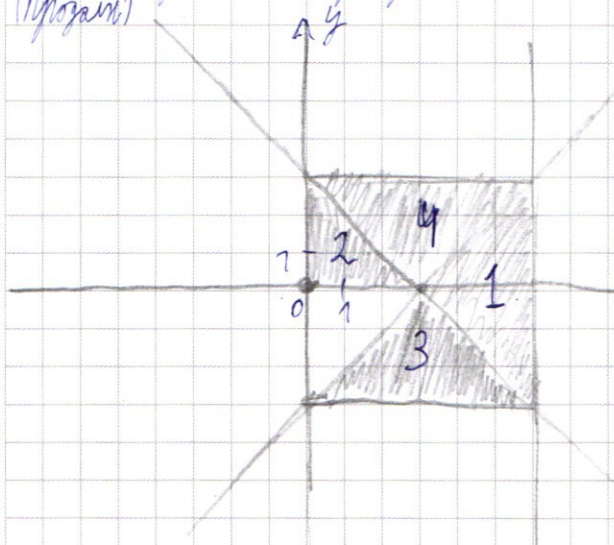
$$x \in [3; 6]$$

$$y \in [-3; 0]$$

$$x \in [3; 6]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17 Построить график $|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$
(Проверить)



$$1 \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \\ 2x-6 \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \\ y+3-x-x-y+3 \leq 6 \end{cases}$$

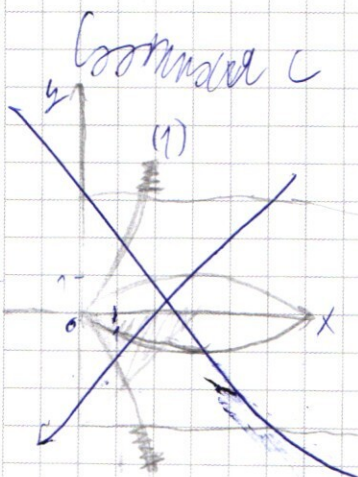
$$\begin{cases} y > x-3 \\ y < 3-x \\ -2x+6 \leq 6 \Rightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y < 0 \\ x-3-y-x-y+3 \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y < 3-x \\ -2y \leq 6 \Rightarrow y \geq -3 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y \geq 0 \\ y+3-x+x-3+y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x-3 \\ y \geq 3-x \\ 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq 3 \end{cases}$$



Составляем (2) неравенств 2 точки пересечения.

~~$$2x-6 \leq 6 \Rightarrow x \leq 6$$~~

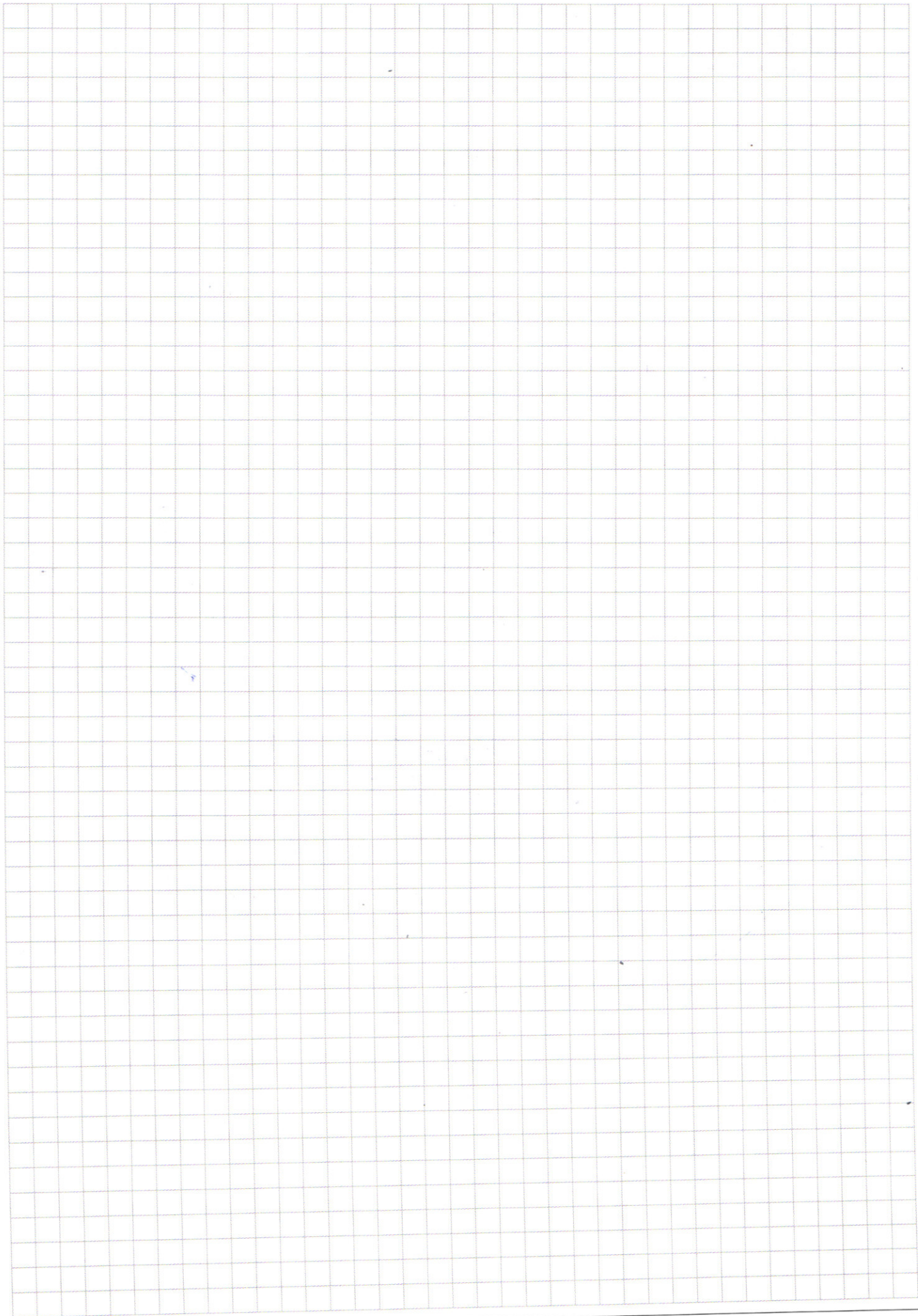
~~$$x = \sqrt{25 - (y-4)^2} \leq 6$$~~

Вывод, что только (0;0) и (6;0)

подходят без y график подруги
окружностей нет внутренние неравенства

края (0;0)

ответ: (0;0), (6;0)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams and algebraic calculations.

Geometric Diagrams:

- A circle with a smaller circle inside, and a line segment connecting points on the circles.
- A right triangle with legs of length 1 and $\sqrt{3}$, and hypotenuse 2.
- A circle with a radius of 2 and a central angle of 60° .
- A circle with a radius of 1 and a central angle of 120° .

Algebraic Calculations:

Top right: $(2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$
 $12(y-x) = -\frac{\sqrt{7}+1}{2}$
 2π
 $x+2x=300$
 $x=100$

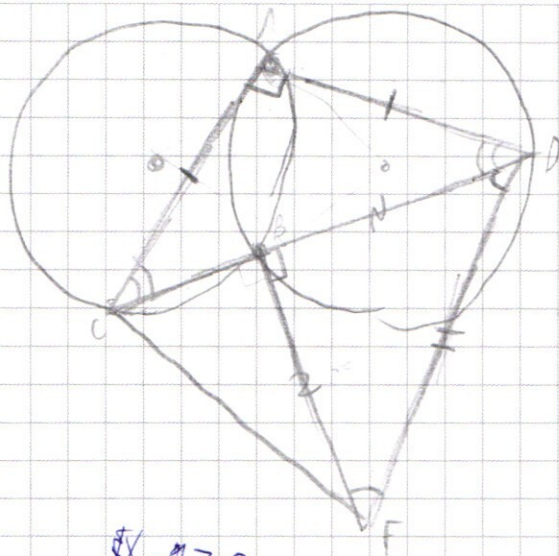
Left side: $(-12x+12y) = -\frac{\sqrt{7}+1}{4}$
 $4(2\sqrt{7}-2)x + (-4)(2\sqrt{7}-2)y = 1$
 $4(2\sqrt{7}-2)(x-y) = 1$
 $4(2\sqrt{7}-2)(x-y) = 1$
 $4(2\sqrt{7}-2)(x-y) = 1$

Bottom left: $\frac{1}{4(2\sqrt{7}-2)}$
 $2\sqrt{7}+2$
 $4 \cdot 24$
 $\frac{\sqrt{7}+1}{48}$

Bottom middle: $(x+2)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$
 $(x^2+x-3)(x+2)$
 $x^3+x^2-3x-2x^2-2x+6$
 x^3-x^2-5x+6
 $x^3-x^2-5x+6=0$
 $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 2 \neq 0$

Bottom right: $\frac{2-3(a+b)x}{12} = \frac{1-46x}{(a+b)6}$
 $ab(a+b) - 3(a+b)6x = 12 - 481x$
 $4 \leq x-3$
 $4 \geq 3-x$
 $x \leq 3$
 $4 \geq -3$
 $11 \cdot \frac{\sqrt{13}}{4}$
 $\frac{3\sqrt{13}}{3} - \frac{4\sqrt{13}}{8}$
 $-\frac{\sqrt{13}}{8} - 5$
 $3,5 - \frac{\sqrt{13}}{8} \neq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x-1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 4x^3 + x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2(x^2 - 2x^2 + x) + x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 - 4x^3 + x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2(x^2 - 2x^2 + x) + x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$x^2(x-1)^2 + x^2(x+2) + (x-1)^2 - 3x^3 - 2x$$

$$x^2(x^2 - 4x + 2 + x + 2)$$

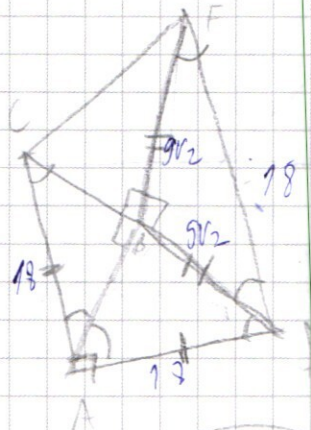
$$x^2(x^2 - 3x + 4)$$

$$x \geq -1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^3 + 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$



$$x-3-y-x-y-3 \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

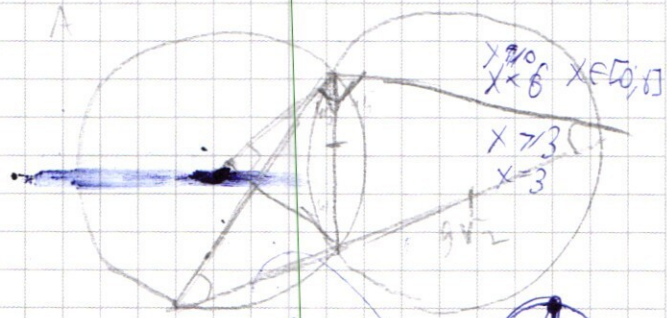
$$x-3-y \geq 0 \quad x-y-3 \leq 0$$

$$y \leq x-3 \quad y \leq 3-x$$

$$2y \leq 0$$

$$y \leq 0$$

$$y \in [-3, 0]$$

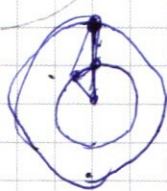


$$x \geq 0 \quad x \leq 6 \quad x \in [0, 6]$$

$$x \geq 3$$

$$x=3$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$



$$x(3x^2 + 2)$$

$$y \leq x-3$$

$$-3 \leq x-3$$

$$0 \leq x$$

$$-3 \leq 3-x$$

$$-6 \leq -x$$

$$6 \geq x$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

$$x \geq 1$$

$$x < 1$$

$$x - 3 - y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2x \leq 6$$

$$x - 3 - y - y - x + 3 \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$x - 3 - y \geq 0$$

$$x - 3 + y \leq 0$$

$$y \leq x - 3$$

$$y \geq 3 - x$$

