

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) т.к. $M_0(-1; \sqrt{3}) \Rightarrow$

Γ окружности по которой движется муравей равна

$$\Gamma = \sqrt{x_{M_0}^2 + y_{M_0}^2} = \sqrt{4} = 2$$

2) т.к. $N_0(2\sqrt{3}; 2) \Rightarrow$

R окружности по которой движется жук равна

$$R = \sqrt{x_{N_0}^2 + y_{N_0}^2} = \sqrt{16} = 4$$

3) $\sin \angle N_0OA = \frac{y_{N_0}}{R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle N_0OA = 30^\circ$

4) $\sin \angle M_0OB = \frac{y_{M_0}}{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle M_0OB = 60^\circ$

5) ~~так как~~ кратчайшее расстояние между ними и муравей будет, тогда, когда жук, муравей и сахар будут лежать на одной прямой.

6) т.к. R в 2 раза $> \Gamma \Rightarrow$, что когда жук проползет ~~туда~~ ^{здесь} 1 круг, тогда муравей проползет 2 круга и, тогда нужные положения жука будут касаться круг совпадают

7) т.к. они движутся в разные стороны, тогда за то время пока жук проползет 1 круг, муравей встретится с ним.

8) т.к. их скорости одинаковы $\Rightarrow$ за одно время их ~~скорости~~ ^{пути равны}, т.к. R в 2 раза $> \Gamma \Rightarrow$ то за одно время радиусное изменение положения муравья в 2 раза $>$ радиусного изменения положения жука (для жука считаем против часовой стрелки, а для муравья по часовой стрелке.)

9) 1 встреча - положение жука X , тогда $\angle XOM_0 = 2 \angle XON_0$
 $\angle XOM_0 + \angle XON_0 = 210^\circ \Rightarrow \angle XOM_0 = 140^\circ \Rightarrow \angle XOB = 80^\circ$

$$\sin \angle XOB = \frac{y_x}{R}$$

$$y_x = \sin 80^\circ \cdot 4 = 4 \cdot \sin 80^\circ$$

$$R^2 = y_v^2 + x_x^2$$

$$x_x = -\sqrt{16 - 16 \cdot \sin^2 80^\circ} = -4 \sqrt{1 - \sin^2 80^\circ} = -4 \cdot |\cos 80^\circ| = -4 \cos 80^\circ$$

$$X(-\sqrt{16 - 16 \cdot \sin^2 80^\circ}, 4 \cdot \sin 80^\circ) \Rightarrow X(-4 \cdot |\cos 80^\circ|; 4 \cdot \sin 80^\circ)$$

10) 2 вектора - в точке Y, из предыдущих рассуждений $\Rightarrow \angle XOY = 120^\circ$
 $\Rightarrow \angle BOY = 40^\circ$
 $\nearrow$ против часовой стрелки

$$\Rightarrow \angle BOY = 40^\circ$$

$$\sin \angle BOY = \frac{|y_y|}{R} \Rightarrow y_y = -\sin 40^\circ \cdot 4 = -4 \cdot \sin 40^\circ$$

$$R^2 = y_y^2 + x_y^2$$

$$x_y = -\sqrt{16 - 16 \sin^2 40^\circ} = -4 \sqrt{1 - \sin^2 40^\circ} = -4 |\cos 40^\circ| = -4 \cos 40^\circ$$

$$Y(4 \cdot \cos 100^\circ; -4 \cdot \sin 10^\circ)$$

"убавляется" т.к.
 $\cos 80^\circ$ или $\cos 80^\circ$
 выносится
 со знаком "+",
 а если $\cos 80^\circ$ отриц.

11) 3 вектора в точке Z, из предыдущих рассуждений к предыдущим
 $\Rightarrow \angle YOZ = 120^\circ \Rightarrow \angle COZ = 70^\circ$

$$\sin \angle COZ = \frac{x_z}{R} \Rightarrow x_z = \sin 70^\circ \cdot 4 = 4 \cdot \sin 70^\circ$$

$$R^2 = y_z^2 + x_z^2$$

$$y_z = -\sqrt{16 - 16 \sin^2 70^\circ} = -4 \sqrt{1 - \sin^2 70^\circ} = -4 \cdot |\cos 70^\circ|$$

$$Z(4 \cdot \sin 70^\circ; -4 \cdot |\cos 70^\circ|)$$

Ответ

$$X(-4 \cdot |\cos 80^\circ|; 4 \cdot \sin 80^\circ)$$

$$Y(-4 \cdot |\cos 100^\circ|; -4 \cdot \sin 10^\circ)$$

$$Z(4 \cdot \sin 70^\circ; -4 \cdot |\cos 70^\circ|)$$

все углы считаются
 $\nearrow$ у меня против часовой стрелки

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$1) |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$2) \begin{cases} (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$1) |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\begin{cases} \text{если } x-3-y \geq 0 & x-3-y \leq 6 - |x-3-y| & \begin{cases} \text{если } y \leq x-3, & |x-3+y| \leq y+9-x \\ \text{если } y > x-3, & |x-3+y| \leq x+3-y \end{cases} \\ \text{если } x-3-y < 0 & x-3-y \geq -6 + |x-3-y| \end{cases}$$

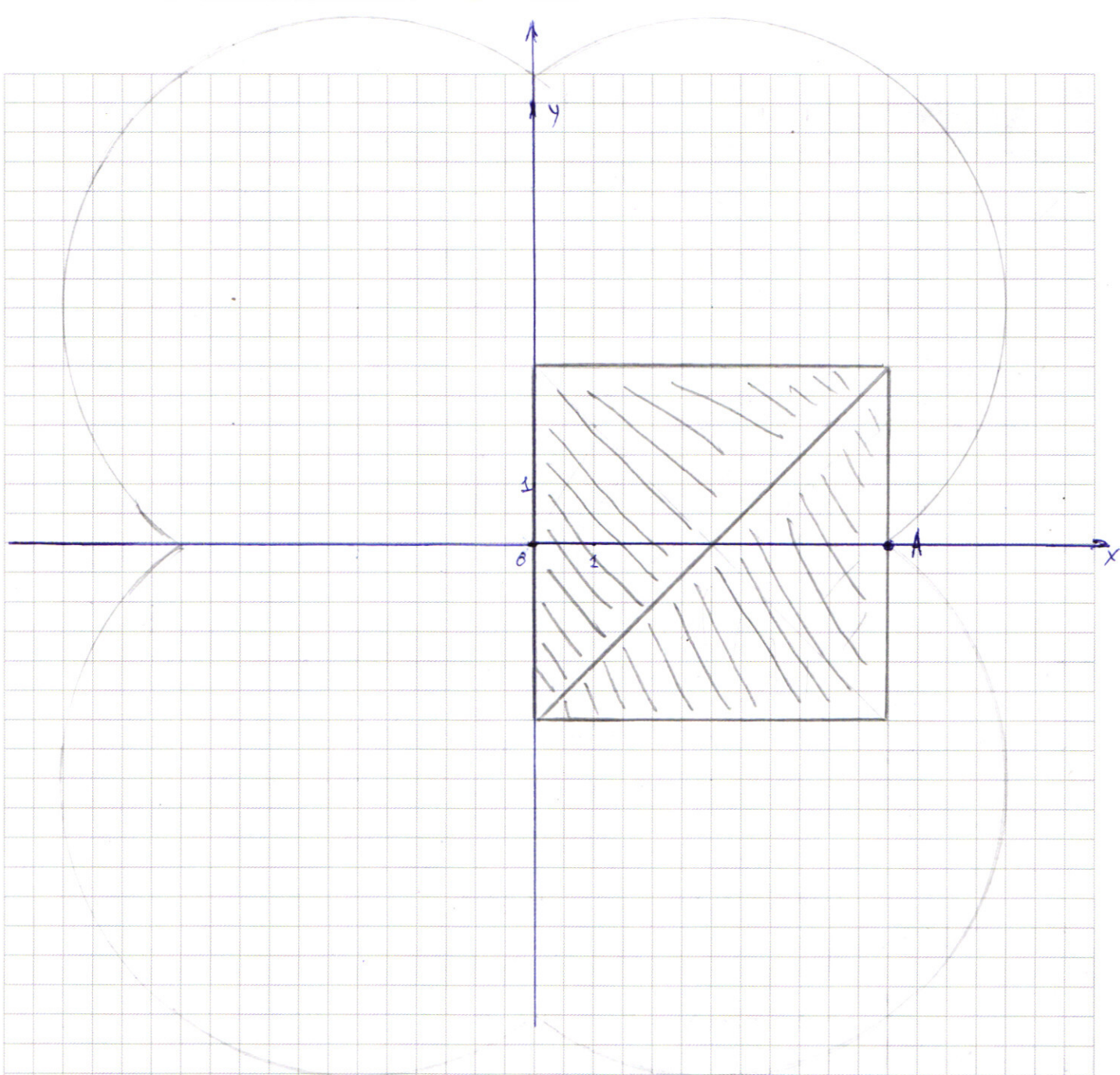
$$\begin{cases} \text{если } y \leq x-3, & \begin{cases} \text{если } x-3+y \geq 0, & x-3+y \leq y+9-x \\ \text{если } x-3+y < 0, & x-3+y \geq x-y-9 \end{cases} \\ \text{если } y > x-3, & \begin{cases} \text{если } x-3+y \geq 0, & x-3+y \leq x+3-y \\ \text{если } x-3+y < 0, & x-3+y \geq y-x-3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{если } y \leq x-3, & \begin{cases} \text{если } y \geq 3-x, & x \leq 6 \\ \text{если } y < 3-x, & y \geq -3 \end{cases} \\ \text{если } y > x-3, & \begin{cases} \text{если } y \geq 3-x, & y \leq 3 \\ \text{если } y < 3-x, & x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$2) (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

только

строим график $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ в первой координатной системе, отражаем его отн. ОУ, а потом получив. отражения отн. ОХ и получается график $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$



По графику видно что есть Только одно решение,
которое является координатами т.А (6;0)

$$x=6 \quad y=0$$

Ответ $x=6 \quad y=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1400 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \leftarrow 5$$

1) $xyzlmnp$ - данное число

$$x \cdot y \cdot z \cdot l \cdot m \cdot n \cdot k \cdot p = 1400 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \Rightarrow x, y, z, l, m, n, k, p \neq 0,$$

Тогда произведение равно 0, $\Rightarrow$ это будут 7-я, 5-я, 2-я и 1-я.

2) у нас будет различные варианты наборов ~~чисел~~ ^{цифр}.

$$1: 7; 5; 5; 2; 2; 2; 1; 1$$

$$2: 7; 5; 5; 4; 2; 1; 1; 1$$

$$3: 7; 5; 5; 8; 1; 1; 1; 1$$

3) для 1-го случая поставим 7 - 8 вар, потом 5 и 5 - 21 вар (из 8-и, из 7-и, из 6-и, из 5-и, из 4-и, из 3-и, из 2-и, из 1-и)

затем 1 и 1 - $4+3+2+1 = 10$ вар; для 2-го случая

$$n = 8 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 1 = 1680 \text{ чис.} - (\text{общее из 1-го набора})$$

• для 2-го случая разложим 7 - 8 вар, 4 - 7 вар, 2 - 6 вар (из 8-и, из 7-и, из 6-и, из 5-и, из 4-и, из 3-и, из 2-и, из 1-и)

$$5 \text{ и } 5 - 4+3+2+1 = 10 \text{ вар. ; } 1 \text{ и } 1 \text{ и } 1 \text{ и } 1 - 1 \text{ вар.}$$

$$m = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 1 = 3360 \text{ вар} - (\text{общее из 2-го набора})$$

• для 3-го случая: 7 - 8 вар, 8 - 7 вар, 5 и 5 - 15 вар (из 8-и, из 7-и, из 6-и, из 5-и, из 4-и, из 3-и, из 2-и, из 1-и)

$$1 \text{ и } 1 \text{ и } 1 \text{ и } 1 - 1 \text{ вар}$$

$$L = 8 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 1 = 840 \text{ вар} - (\text{общее из 3-го случая})$$

$$4) K = m + m + L = 1680 + 3360 + 840 = 5880 \text{ вариантов} - \text{всего}$$

$$\text{Ответ } K = 5880$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3 - x + 10} = (x^2 + 3)(x+2)$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x+2$$

$$(\sqrt{x^3 - x + 10})^2 = (x+2)^2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

проверим целые делители $d(6) = (-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6)$

$d = 2$ подходит т.к. $2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x - 3 \\ & \underline{x^2 - 5x} \\ & -x^2 - 2x \\ & \underline{-3x + 6} \\ & -3x + 6 \\ & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 & \Rightarrow x_1=2 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

Ответ $x_1 = 2$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b) \cdot b y = 12 \end{cases}$$

у нас представлены уравнения графиков, которых являются прямые, а решением системы будет их пересечение или совпадение графиков этих прямых. А именно имеет бесконечно много решений они будут иметь, тогда и только тогда, когда прямые совпадут.

$$1) \begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ (a+b) \cdot b = 12 \\ a = 1 \end{cases}$$

↓

$$3 + 3b = 4b$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- проверим

$$\begin{cases} 3(1+3) = 4 \cdot 3 \\ (1+3) \cdot 3 = 12 \\ a = 1 \end{cases}$$

- этот вариант подходит

2) или же коэффициенты должны быть пропорциональны.
 $(ax + by = c \text{ - коэф. - } a, b, c)$ $(k \text{ - коэффициент пропорциональности})$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \cdot k \\ 12 = (a+b) \cdot b \cdot k \\ a = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(k+b) = 4bk \\ 12 = (k+b) \cdot b \cdot k \end{cases}$$

$$3k + 3b = 4bk = 0$$

$$k(3 - 4b) = -3b$$

$$k = \frac{3b}{4b-3}$$

$$0 \neq 3$$

$$4b-3 \neq 0$$

$$b \neq \frac{3}{4}$$

$$12 = \left(\frac{3b}{4b-3} + b \right) \cdot b \cdot \frac{3b}{4b-3} \quad \text{поскольку } b \neq \frac{3}{4}$$

$$3k + \frac{9}{4} = 3k$$

$$0k = \frac{9}{4} \Rightarrow b \neq \frac{3}{4}$$

$$12 = \frac{3b + 4b^2 - 3b}{4b-3} \cdot \frac{3b}{4b-3}$$

$$12 \cdot (4b-3)^2 = (3b + 4b^2 - 3b) \cdot 3b^2$$

$$12 \cdot (16b^2 - 24b + 9) = 12b^4$$

$$b^4 - 16b^2 + 24b - 9 = 0$$

$$(b-1)(b-3)(b^2+4b-3)=0$$

$$\begin{cases} b-1=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=k=\frac{3}{4-3}=3 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a=k=\frac{9}{12-3}=1 \\ b^2+4b-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-1=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=k=\frac{3}{4-3}=3 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a=k=\frac{9}{12-3}=1 \\ b^2+4b-3=0 \end{cases}$$

$$b^2+4b-3=0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$b = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} \Rightarrow a = k = \frac{3 \cdot (-2 \pm \sqrt{7})}{4 \cdot (-2 \pm \sqrt{7}) - 3} = \frac{-6 \pm 3\sqrt{7}}{-11 \pm 4\sqrt{7}}$$

$$b = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2} = -2 - \sqrt{7} \Rightarrow a = k = \frac{3 \cdot (-2 - \sqrt{7})}{4 \cdot (-2 - \sqrt{7}) - 3} = \frac{-6 - 3\sqrt{7}}{-11 - 4\sqrt{7}}$$

$$\text{Ответ } a=3 \quad b=1$$

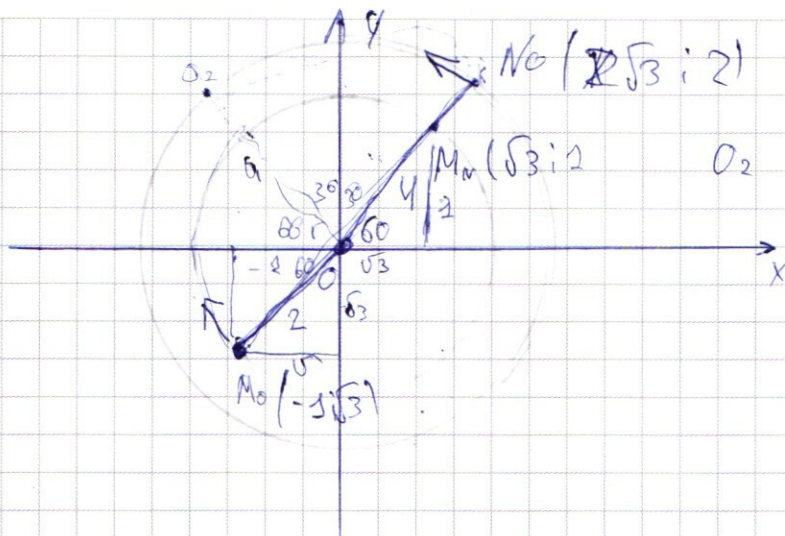
$$a=1 \quad b=3$$

$$a = \frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11} \quad b = \sqrt{7}-2$$

$$a = -\frac{3\sqrt{7}+6}{4\sqrt{7}+11} \quad b = -\sqrt{7}-2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sigma_M = \sigma_X$$



$$2x \leq 12$$

$$y \geq -3$$

$$2y \geq -6$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{\quad}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$120 - 50 =$$

$$70^\circ$$

$$(y+3)(x+2)$$

$$y \leq x - 3$$

$$x^3 - x + 10$$

$$-8 \cdot 2 = 10$$

$$-10 \quad -5 \quad -2 \quad -1$$

$$8 - 2$$

$$1 \quad 2 \quad 4$$

$$x^3 - x + 10$$

$$x^3 + 2x^2$$

$$x^2 - 2x$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$-2x^2 - x$$

$$-2x^2 - 4x^2$$

$$3x + 10$$

$$x$$

$$3x + 10$$

$$x^3 - x + 10$$

$$-8 - 4 + 10 + 6$$

$$-8 - 4 + 10 + 6$$

$$-8 - 4 + 10 + 6$$

$$2$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 1680 \end{array}$$

$$1 + 2 - 3 =$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 6 \\ \hline 3380 \end{array}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 2$$

$$28 - 15 - 4$$

$$\begin{array}{r} \times 120 \\ 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 3 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4200 \\ 1680 \\ \hline 5880 \end{array}$$

$$2x^4 + y^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = 4 \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$a+b \neq 0$$

$$3a + 3b = 4b$$

$$\frac{3}{b}(a+b) = 12$$

$$b = 3a$$

$$a = -2$$

$$(b-3)(b-3)$$

$$3(a+b) = 4b \cdot k$$

$$12 = (a+b) \cdot b \cdot k$$

$$a = k$$

$$3 \cdot k + 3b = 4b \cdot k$$

$$12 = (k+b) \cdot b \cdot k$$

$$(b-3)(b^3 + b^2 - 15b + 9)$$

$$-27 + 9 + 45 + 9$$

$$27 + 9 - 45 + 9$$

$$3$$

$$\begin{array}{r} b^4 - 16b^2 + 24b - 9 \\ -b^4 - b^3 \\ \hline \end{array}$$

$$b^3 - 16b^2$$

$$-b^3 - b^2$$

$$-15b^2 + 24b$$

$$-15b^2 + 15b$$

$$9b - 9$$

$$9b - 9$$

$$0$$

$$\begin{array}{r} b^3 + b^2 - 15b + 9 \\ b^3 - 3b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$4b^2 - 15b$$

$$-4b^2 - 12b$$

$$-3b + 9$$

$$b^2 + 4b - 3$$

$$16 + 12$$

$$1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 6

Дано $\omega_1(O_1; R)$ и $\omega_2(O_2; R)$ $\omega_1 \cap \omega_2 = AB$, B $R=9$

$C \in \omega_1$, $D \in \omega_2$, $B \in CD$, $\angle CAD = 90^\circ$, $BA \perp CD$, на пр. BA : ~~$BA \perp CD$~~ ;

$F \in BA$, $BF = BD$; (A и F — по разные стороны от CD)

Найти CF

Решение

