

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

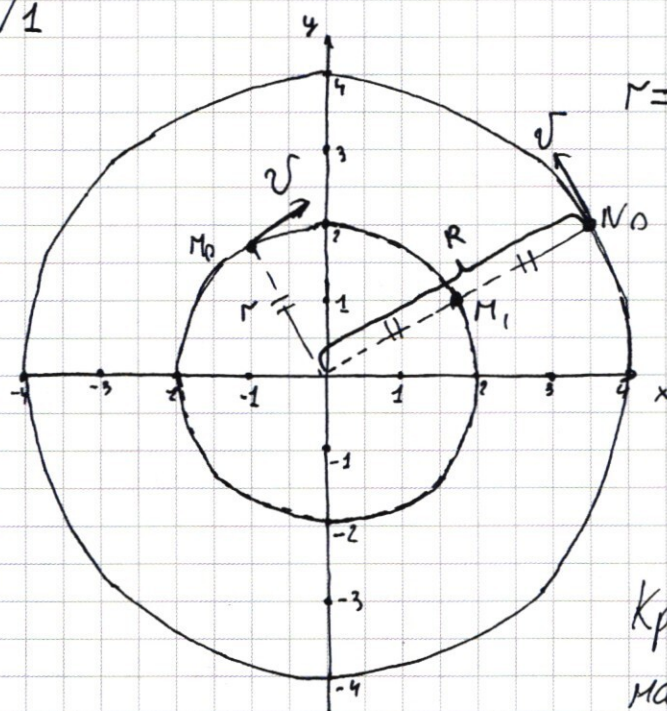
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$$r = \sqrt{1+3} = 2; R = \sqrt{12+4} = 4$$

$$R = 2r$$

$$v_x = v_m = v$$

$$v = \omega_m \cdot r = \omega_x \cdot R$$

$$\downarrow$$

$$2\omega_x = \omega_m$$

Кратчайшее расстояние между
насекольным и муравьем, когда

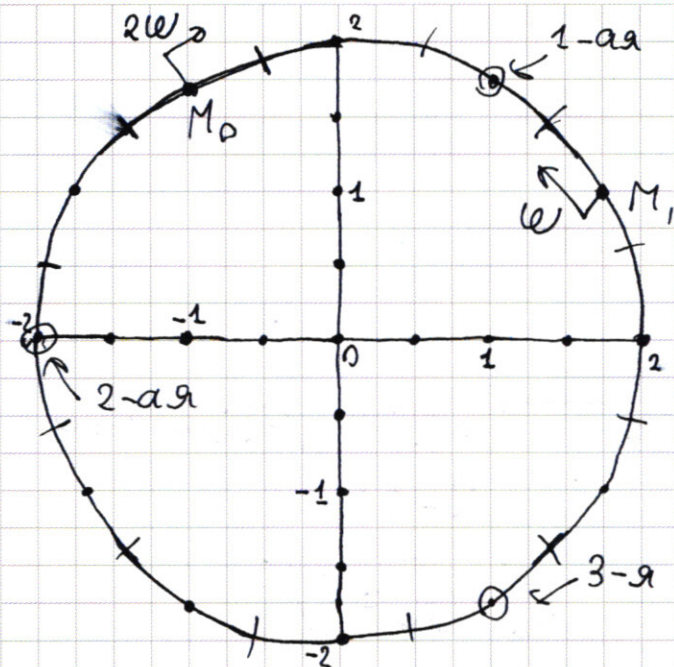
точки их местоположения и точка $O(0;0)$ нахо-
дятся на одной прямой $\rightarrow$ Кратч. расс. равно 2

Для удобства создадим проекцию точки ме-
стоположения жука на окружность Муравья и
тогда если муравей и проекция находятся
в одной точке $\rightarrow$ они находятся на одной
прямой с сахаром.

Тогда вместо скоростей введем угловые ск.
(ω_x, ω_m)

Соответственно поч. координаты проекции $-(\sqrt{3}; 1)$

Разобъем окружность на 12 равн. дуг, как это показано
рис.



Других точек суц. не
будет, т.к. движение
пчелки и муравья
защиклибся.

Соответственно
первая точка
встречи будет
(1 ; $\sqrt{3}$)

Вторая точка
встречи будет
(-2 ; 0)

Третья точка
встречи будет
(1 ; $-\sqrt{3}$)

Ответ: (1 ; $\sqrt{3}$) (-2 ; 0) (1 ; $-\sqrt{3}$)

✓ 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x^3-x+10 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x^3-x^2-5x+6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ (x-2)(x^2+x-3) = 0 \end{cases}$$

Обл. отр

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$(x-2)(x^2+x-3) \geq 0$$

$$x \in [2; +\infty) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$$

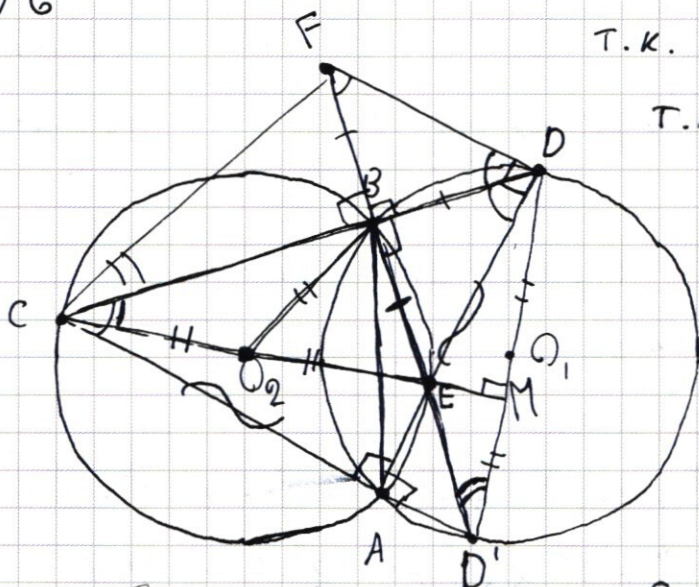
при $x < -3$

$$\rightarrow x = \left\{ -3; 2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\}$$

$$\text{Ответ: } x = 2; x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N/G



T.K. $FB=BD \rightarrow \angle BFD = \angle BDF = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Т.к. окр. равны

$$\overline{BA} = \overline{AB}$$

$$\downarrow$$

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$CA = VA$$

примеч. ФВ прохладно

через E т.к. $\angle COE = 90^\circ$

~~6 $\Delta D'O'C$~~
~~проведены~~
~~2 высоты $(DA', D'B')$~~
 ~~$\downarrow$~~
 ~~$CF \perp DD'$~~

~~Если $\angle ADB = 45^\circ$~~

~~$\angle AOB = 90^\circ$~~

$FB = BE$ T.K.
 $\angle EBD = 90^\circ$
 $\angle BDE = 45^\circ$

~~$$BA = \sqrt{g^2 + g^2} = g\sqrt{2}$$~~

$$\angle D'O'B = \angle MCO$$

~~Решение~~ CFE - p/d T.K. CB - modulus
и амплитуда

В $\triangle O'OC$
проведены
2 высоты
($OA; OB$)
 $\downarrow$
 $CE = 3 - 9$
высота
 $CE \perp D'O$
(M)

CB - $\downarrow$ success

$$\angle ECD = \angle BCF$$

$$\angle FCB = \angle BO'D$$

$$\triangle CFB \sim \triangle BOO'$$

u s.k. $F \cdot \theta = \theta \cdot 0$

$$cF = 0 \overset{\downarrow}{D}' = 2.9 = 18$$

Oct 18.

✓ 4

$$1400 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 1^2$$

т.к. число - восьмизнач. $\rightarrow$ в нем будет 2 цифры

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ \hline \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

кол-во вариантов цифр. на каждой позиции

Остаток либо

мы начинаем составлять в разряды с 2-ок либо

с 5-ок либо с 7-ок либо с 1.

тогда всего будет:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 4^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 + \\ & + 4^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + 4^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 4^3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 4^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 144 + \\ & + 144 \cdot 3 + 144 \cdot 2 + 144 \cdot 4 \cdot 3 + 144 \cdot 4 \cdot 2 + 144 \cdot 4 + \\ & + 144 \cdot 4 \cdot 4 + 144 \cdot 4 \cdot 2 + 144 \cdot 4 / 3 = \end{aligned}$$

✓ 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} = x \cdot \left(-\frac{3(a+b)}{12} \right) + \frac{a}{12} = x \cdot \left(-\frac{a+b}{4} \right) + \frac{a}{12}$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b} = x \cdot \left(-\frac{4b}{(a+b)b} \right) + \frac{1}{(a+b)b} = x \cdot \left(-\frac{4}{a+b} \right) + \frac{1}{(a+b)b}$$

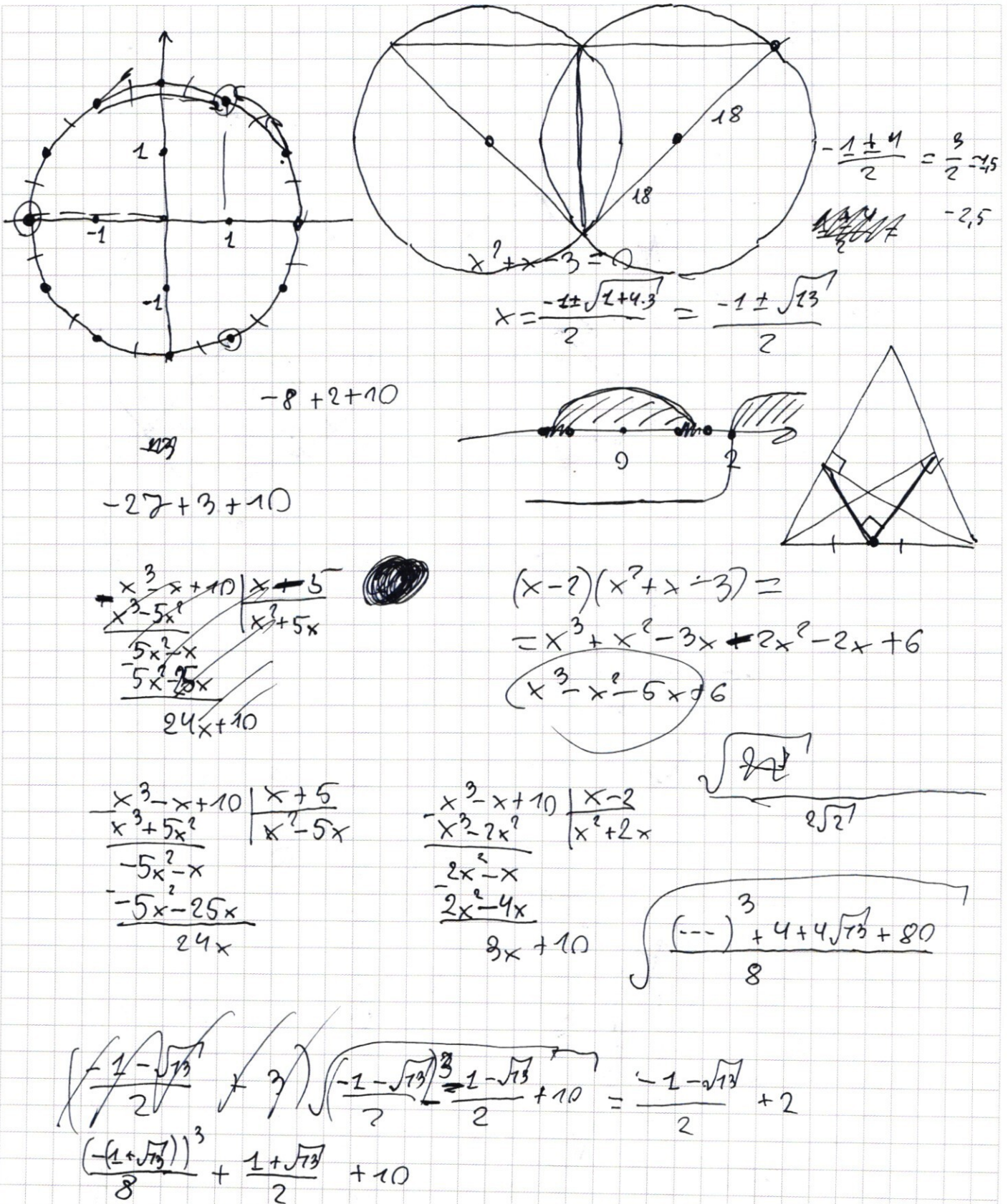
$$\frac{a+b}{4} = \frac{4}{a+b} \rightarrow (a+b)^2 = 16$$

$$\frac{1}{(a+b)b} = \frac{a}{12} \rightarrow ab(a+b) = 12$$

решим систему $a = 1; 3$
 $b = 3; 1$

Ответ: $(a, b) = (1; 3) (3; 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Unit circle diagram with points marked at $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, and $(0,-1)$.

Diagram of two overlapping circles with radius 18. The distance between centers is 18. The equation $x^2 + x - 3 = 0$ is written below.

Equation: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Equation: $-\frac{1 \pm 4}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

Equation: -2.5

Equation: $-8 + 2 + 10$

Equation: $-27 + 3 + 10$

Polynomial division: $\begin{array}{r} x^3 - x + 10 \mid x + 5 \\ x^3 - 5x^2 \\ \hline 5x^2 - x \\ 5x^2 - 25x \\ \hline 24x + 10 \end{array}$

Equation: $(x-2)(x^2+x-3) =$

Equation: $= x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 - 2x + 6$

Equation: $x^3 - x^2 - 5x + 6$

Equation: $\sqrt{24}$

Equation: $2\sqrt{2}$

Equation: $\frac{(-1 - \sqrt{13})^3}{8} + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10$

Equation: $\frac{(-1 - \sqrt{13})^3}{8} + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + 2$

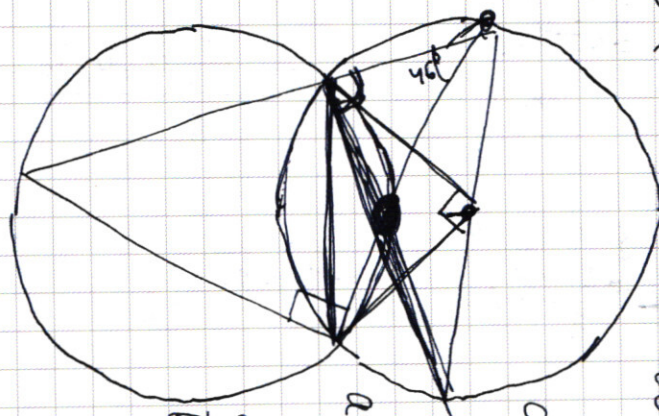
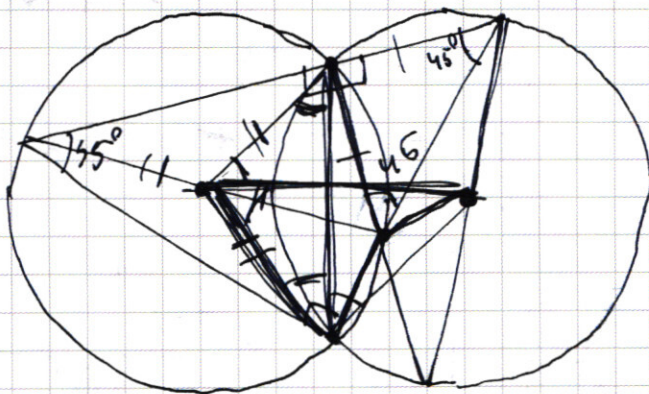
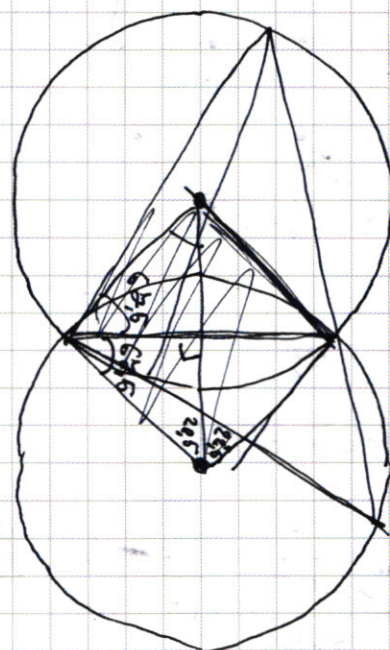
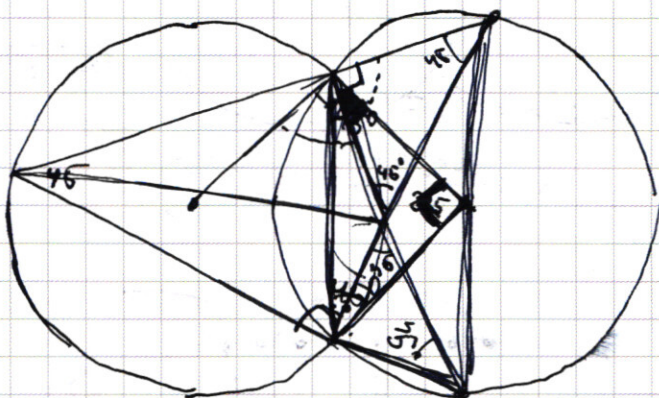
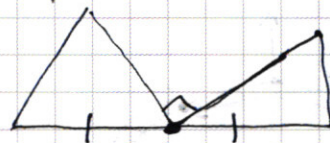
$$-2,5^3 + 2,5 + 10$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ 2,5 \\ \hline +10,5 \\ \hline 50 \\ \hline 62,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1^2 \\ 6,25 \\ 2,5 \\ \hline 3125 \\ 1250 \\ \hline 4375 \\ \hline 15,625 \end{array}$$

$$12,5$$

$$-15 + 2,5 + 10$$



$$a^2 + b^2 + 2ab = 16$$

$$ab = 3$$

$$a + b = 4$$

$$ab = 3$$

$$90 - 22,5 = 67,5$$

$$\frac{4}{3}ab = a + b$$

$$\frac{4}{3} \cdot ab(a+b) = (a+b)^3$$

$$\frac{3}{b} + b = 4$$

$$a = \frac{3}{b}$$

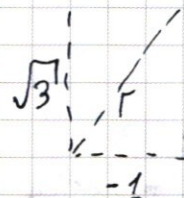
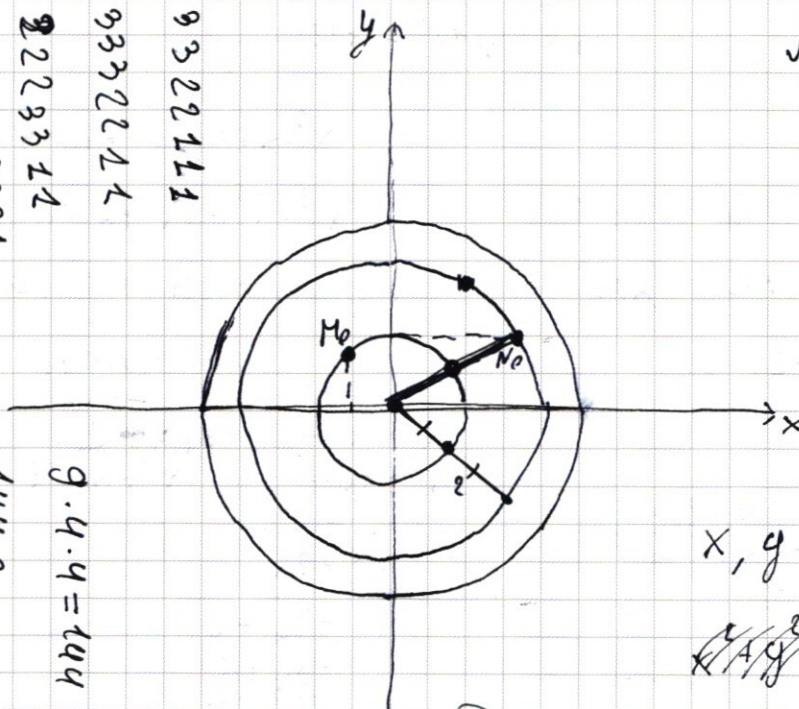
$$a + b = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1
4 9 3 2 2 1 1 1

9.4.4 = 144
144.3
144.2



$$r_M = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$r_N = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$$

x, y

~~1/4~~

$$v = v$$

$$v = \omega_1 \cdot r_1$$

$$v = \omega_2 \cdot r_2$$

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

N 2

$$\begin{cases} 3(a+6)x + 12y = a \\ 46x + (a+6)6y = 1 \end{cases}$$

$$3ax + 36x + 12y = a$$

$$a(3x - 1) = -36x - 12y$$

$$a = 3 \cdot \frac{6x + 4y}{1 - 3x}$$

$$46x + \left(\frac{6x + 4y}{1 - 3x} \cdot 3 + 6 \right) \cdot 6y = 1$$

144.4

$N_0 \rightarrow M_1$

~~144.4~~

$$0 = k \cdot 0 + b \rightarrow 0$$

$$2 = k \cdot 2\sqrt{3}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_0$$

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$x_0^2 + \frac{1}{3} x_0^2 = 4 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{3} x_0^2 = 4 \rightarrow x_0^2 = 3 \rightarrow x_0 = \sqrt{3}$$

✓ 3

$$x^3 - x + 10 \geq 0$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 5x + 6 \overline{) x^3} \\ \underline{-x^2 + 3x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 6 \\ - 2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$\boxed{x = -3}$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$x^3 - x + 140 = x^2 + 4x + 44$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

попытаемся это разложить

на м.м.ж.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & \\ & x^2 + x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 5x \\ -x^2 - 2x \\ \hline -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{r|l} x^3 - x + 10 & x + 3 \\ \hline x^3 + 3x^2 & \\ \hline & -3x + 10 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x \\ - 3x^2 + 9x \\ \hline x + 10 \end{array}$$

$$\frac{418 \times -30}{20}$$

представим $(x-2)$

$$8 - 2 + 10 \quad (x + e)$$

$$= 8 + 2 + 10$$

$$\begin{array}{r} \cancel{3} \\ \cancel{7} \overline{) x^2 - x + 10} \quad \bigg| \frac{x+2}{x^2+2x} \\ \underline{\cancel{7}x^2 + 2\cancel{7}x} \\ -2x^2 - x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 3 & x + 3 \\ -x + 3x & x \\ \hline -2x & \end{array}$$

$$x^2 + x - 3$$

$$3x + 10$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot 3 = 13$$

✓5

$$\begin{array}{r} 1400 \overline{) 5.2} \\ 140 \overline{) 5.2} \\ 14 \overline{) 2} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$1400 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 7$$

4 . 3 . 3 . 2 . 2 . 1 . 1 . 1 .

4 4 4 3 3 2 2 1

min 1 1 2 2 2 5 5 7

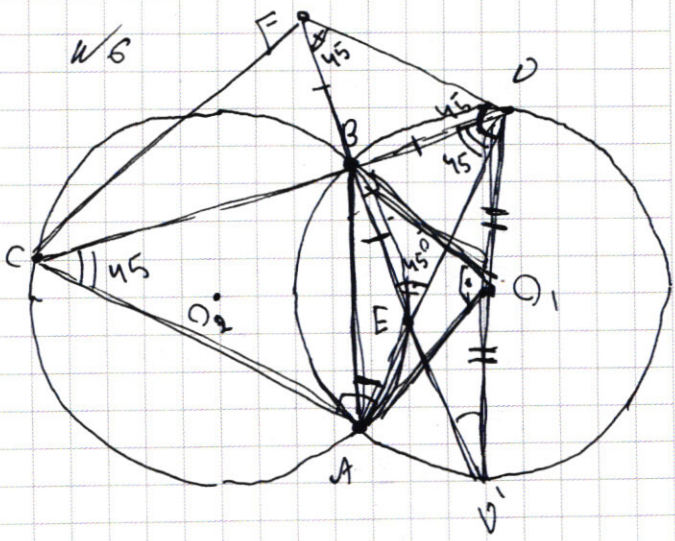
max 7 5 5 2 2 2 1 1

4 _ _ _ _ _ / 1

$$(4-3)$$

$4 - 2$

$$(4 - 1)$$



$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$$

$$4 \cdot 2^3 \cdot 3^2$$



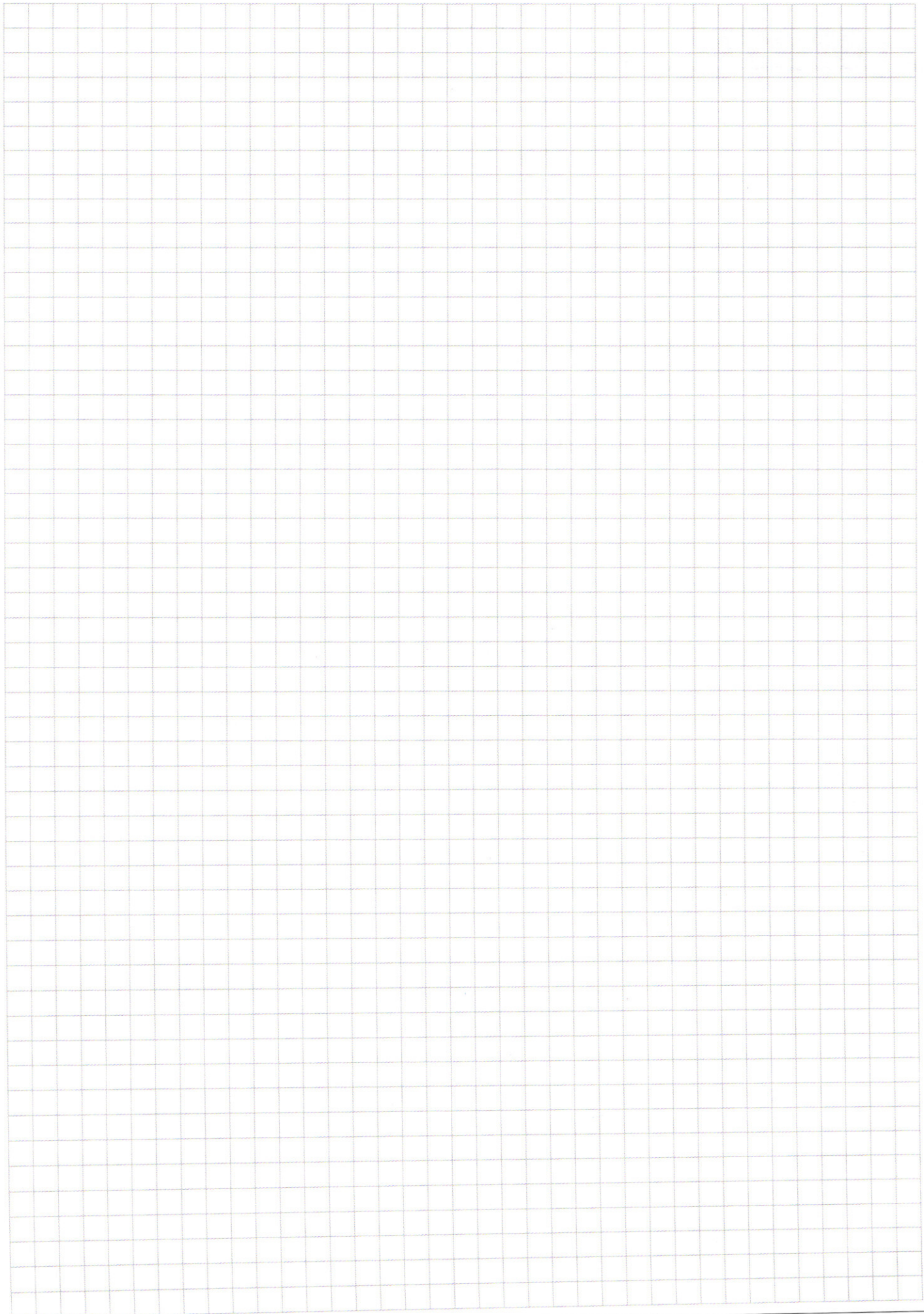
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)