# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров $a$ и $b$, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

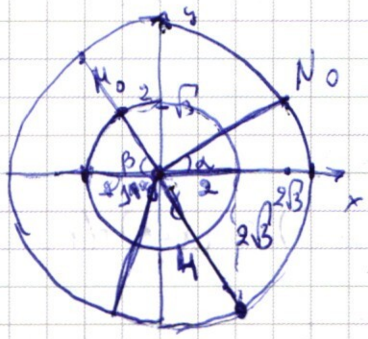
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF=BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3+1=2^2$

$OM_0=2$

$12+4=16=4^2$ $ON_0=4$

$tg\alpha=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=30°$

$tg\beta=\sqrt{3}$ $\beta=60°$

$L=2\pi R$ $L_1=4\pi$ $v_1=v_2$

$\frac{L_1}{L_2}$ $L_2=8\pi$

$\frac{30°+\gamma}{360}\cdot 8\pi=\frac{60+180-\gamma}{360}\cdot 4\pi$

$(30°+\gamma)\cdot 2=240°-\gamma$

$60+2\gamma=240-\gamma$

$3\gamma=180$

$\gamma=60$

$tg\,60=\sqrt{3}$

$\cos 60=\frac{1}{2}$

N2.

$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3ax+3bx+12y=a\\ 4bx+aby+b^2y=1\end{cases}$$

$4x+(a+b)y=\frac{1}{b}$

$(a+b)x+4y=\frac{a}{3}$

$a+b=4$ $\frac{1}{b}=\frac{a}{3}$ $ab=3$

$b=4-a$

$(4-a)a=3$

$-a^2+4a-3=0$

$a^2-4a+3=0$

$D=16-12=4$

$a_1=\frac{4+2}{2}=3$ $b_1=1$

$a_2=\frac{4-2}{2}=1$ $b_2=3$

N3.

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+2)(x+3)$

$(x+3)(\sqrt{x^3+x+10}-x-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l}x=-3\\ \sqrt{x^3-x+10}=x+2\end{array}\right.$$

Если $x<2$, то теб

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$-2x^2+x^2-2x-3x$

$x^2(x-2)+x(x-2)-3(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$D=1+12=13$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ - не уд. ОДЗ

ОДЗ: $x^3-x+10\geq 0$ $x^3-x+10=0$

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=-10$

27 3 $x^3+x+10$ 24=46 2·3·4

$x^3+2x^2-2x^2+4x+5x+10$

$x^2(x+2)-2x(x+2)+5(x+2)=0$

$(x+2)(x^2-2x+5)$

$x^3-x\geq -10$

$x(x+1)(x-1)\geq -10$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№4.

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

Если $x\geq 1$, то

$2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$x=1$

$x=2$

№5

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8=1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7$

| | |
|---|---|
| 1400 | 2 |
| 700 | 2 |
| 350 | 2 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7$ 11

$4\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7$ 111

$8\cdot 5\cdot 5\cdot 7$ 1111

1257

4 4 _ _ _ _ 4 1

№14

$x<1$, то

11222557

11222575

$2x^4+x^2-2x+3x^2(x-1)+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1\geq 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

2 −3 −2 +2 +1 $x+1$

11222755

$2x^4+2x^3+x^3+x^2-3x^2-3x+x+1\geq 0$

$2x^3(x+1)+x^2(x+1)-3x(x+1)+(x+1)\geq 0$

125

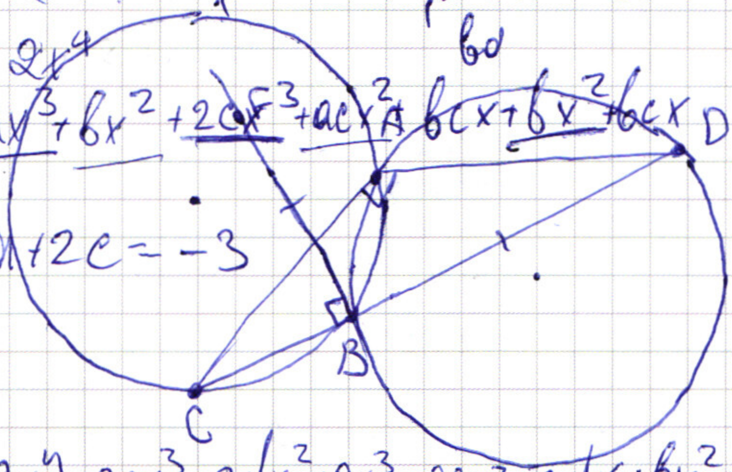
$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)\geq 0$

$(2x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=2x^4-3x^3+4x^2-2x+1$

$ax^3+bx^2+2cx^3+acx^2+bcx+bx^2+bcx$

$a+2c=-3$

$2x^4+2cx^3+2dx^2+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd$



$\frac{\beta}{360}L=\frac{\alpha}{360}l$

$\beta L=\alpha l$ $\quad L=2l$

$2\beta l=\alpha l$

$\alpha=2\beta$

№7

$|x-3-y|+|x-3+y|\leq 6$

$(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$

Если $x-3-y\geq 0$ $\quad x-3+y\geq 0$

$y\leq x-3$ $\quad y\geq -x+3$

$x-y-3+x-3+y\leq 6$

$2x-6\leq 6$

$2x\leq 12$

$x\leq 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$(x-3)^2+(y-3)^2=25$

$x < \quad y \geq 0$

720

$(x+3)^2+(y-3)^2=25$

$x-3-y\geq 0 \quad x-3+y\leq 0$

$y\leq x-3 \quad y\leq -x+3$

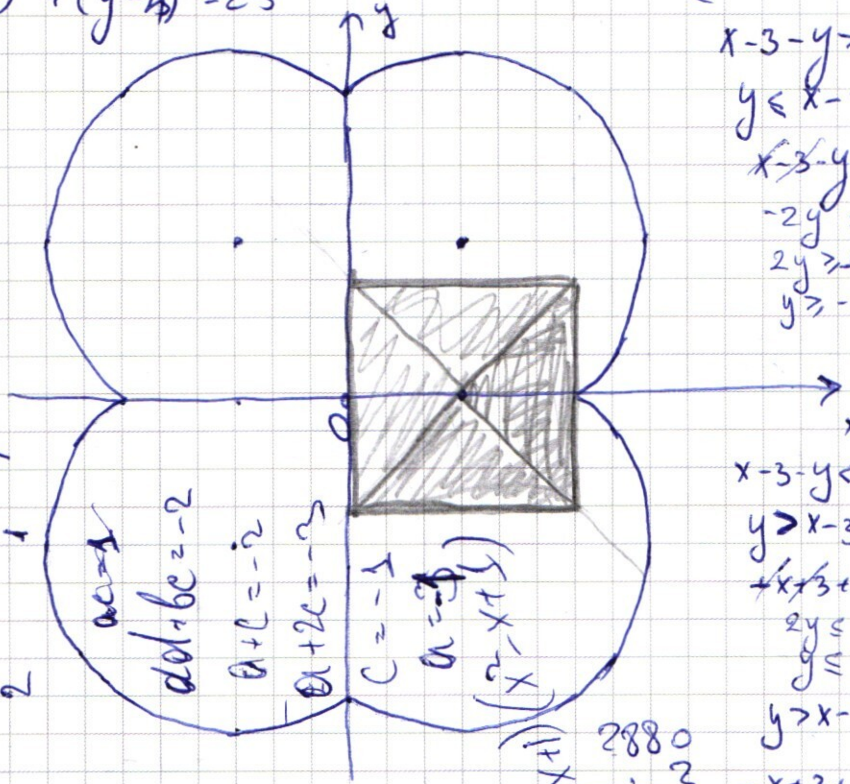
$\cancel{x}-\cancel{3}-y-\cancel{x}+\cancel{3}-y\leq 6$

$-2y\leq 6$

$2y\geq -6$

$y\geq -3$

8



$ad=-1$

$a+2c=-3$

$ad+ae+b=-4$

$x-3-y<0 \quad x-3+y\geq 0$

$y>x-3 \quad y>-x+3$

$-\cancel{x}+\cancel{3}+y+\cancel{x}-\cancel{3}+y\leq 6$

$2y\leq 6$

$y\leq 3$

$y>x-3 \quad y<-x+3$

$-x+3+\cancel{y}-x+3-\cancel{y}\leq 6$

$-2x+6\leq 6$

$x\geq 0$

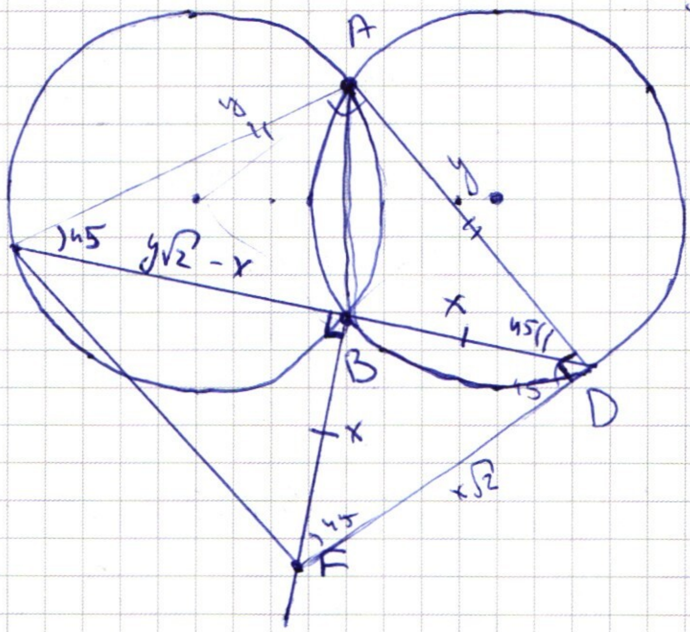
2880

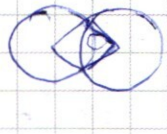
2

3760

08 3

11280





$y\sqrt{2}-x$

$\frac{y}{x}=\frac{y\sqrt{2}-x}{x\sqrt{2}}$

$xy\sqrt{2}=xy\sqrt{2}-x^2$

$(y\sqrt{2}-x)^2+x^2=2y^2-2xy\sqrt{2}+x^2+x^2=$

$=2x^2+2y^2-2xy\sqrt{2}=\cancel{(x-y)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot11$

$D=1+8=9$

$x_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

1 2 5 7

1 2 5

$\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$

1
2
5
7

$6\cdot4^5=6\cdot2^{10}$

$1-2{,}23=-1{,}23$

$\frac{-1{,}23}{2}=$

$-0{,}6$

8 5 5 7 1 1 1 1

11 11 55 7 8
87

4
1
5
7
8

| | |
|---|---|
| 1400 | 2 |
| 700 | 2 |
| 350 | 2 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$175 : 5 = 35$

$1\,1\,2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7=1400$

1 1 1 2 4 5 5 7

1 1 1 1 5 5 7 8

11 2 2 2 5 5 7

11 2 2 2 5 7 5

11 2 2 5 7 5 5

$bd=1$

$a+2c=3$

$2d+ac+b=-2$

$ad+bc=-2$

2 3 3 2
4 4 4 4 4 3 2 1

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq0$

$-a+c=-2$

$a+2c=3$

$c=5,\ a=-7.$

$c=1$

$a=1$

Если $x\geq1$, то

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq0$

$\frac{1}{2}$

$4x^2-2x+1\geq0$

$D<0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq0$

Заметим, что т.к. $x\geq1$, то

$x=1$ $2\geq0$

$b=1$

$d=1$

$a=1$

$c=-1$

$2x^4>3x^3$, т.к.

При $x\geq1$ всегда вот

$2x^4 \vee 3x^3 \,|:x^3\neq0$

При $x<1$.

$2x\vee3$ При $x>1{,}5$ точно $1{,}5>x>1$

$2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1\geq0$ $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1$

$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)\geq0$

$(2x^2+x-1)(x^2+x-1)=$

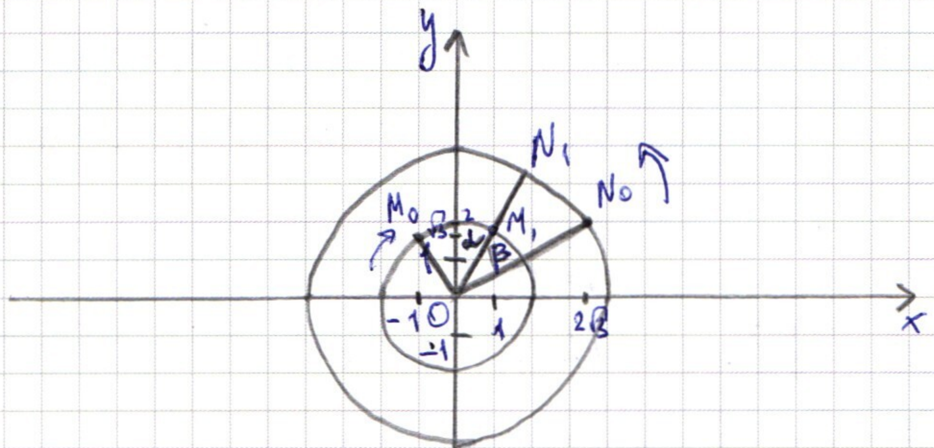
$=2x^4+2x^3-2x^2+x^3+x^2-x-x^2-x+1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1




Найдём радиусы окружностей, по которым движутся муравей и жук

$OM_0 = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 = r$

$ON_0 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 = R$

Расстояние между муравьём и жуком будет кратчай. если муравей, жук и сахар будут лежать на одной прямой.

Обозначим координаты муравья и жука в первую такую встречу за $M_1$ и $N_1$. Т.к. скорости равны, то за время сначала они прошли одинаковые пути. Но т.к. длина окружности жука в 2 раза больше длины окружности муравья ($L = 2\pi R$; $\frac{R}{r} = 2 \Rightarrow \frac{L}{\ell} = 2$) то муравей пройдёт в 2 раза большую дугу в градусной мере. Докажем это.

Пусть муравей прошёл путь $s$, и $\alpha$ в градусной мере. тогда жук также прошёл путь $s$, но $\beta$ в градусной мере причём с одной стороны $S = \frac{\alpha}{360} l$, где $l$ - длина окр. муравья, и $S = \frac{\beta}{360} L$, где $L$ - длина окр. жука. Тогда

$\alpha l = \beta L$, а т.к. $L = 2l$, то $\alpha = 2\beta$. Значит в градусной мере муравей проходит в 2 раза больший угол.

Найдём изнач. угол между ними.

$tg\angle M_0OX = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \angle M_0OX = 120°$

$tg\angle N_0OX = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle N_0OX = 30°$

$\angle M_0ON_0 = \angle M_0OX - \angle N_0OX = 90°$

Исходя из вышесказ.

$\angle M_0OM_1 = 2\angle N_0ON_1$; $M_0OM_1 + N_0ON_1 = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle N_0ON_1 = 30°$

Тогда $\angle N_1OX = 60°$, тогда коорд. т. $N_1$ будут:

$$\left.\begin{aligned} N_{1x} &= ON_1 \cdot \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ N_{1y} &= ON_1 \cdot \sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}\right| \Rightarrow N_1(2; 2\sqrt{3}).$$

Последующие встречи будут происходить, когда в сумме муравей и жук пройдут 180°, но т.к. муравей проходит в 2 раза больший угол, то жук будет проходить по 60°. Тогда углы посл. встреч. будут: 120° 180° 240° 300° 360°. 60°.

Т.е. встречи разобьют окружность на 6 частей.

Тогда координаты встреч будут: $(2; 2\sqrt{3})$; $(-2; 2\sqrt{3})$; $(-4; 0)$; $(-2; -2\sqrt{3})$; $(2; -2\sqrt{3})$; $(4; 0)$ ← Ответ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)x+4y=\frac{a}{3} \\ 4x+(a+b)y=\frac{1}{b} \end{cases}$$

Т.к. система имеет бесконечное мн-во решений, то уравнения в системе тождественно равны. Тогда

$\begin{cases} a+b=4 \text{ (из левой части обоих ур-й)} \\ \frac{a}{3}=\frac{1}{b} \text{ (из правой части обоих ур-й)} \end{cases}$, т.к. левые части обоих уравнений равны

$\frac{a}{3}=\frac{1}{b} \Rightarrow ab=3 \qquad a+b=4 \Rightarrow b=4-a$

$a(4-a)=3$

$-a^2+4a-3=0$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=1 \Rightarrow b=3 \\ a=3 \Rightarrow b=1 \end{array}\right.$

Ответ: $(1;3);(3;1)$.

№3.

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6 \qquad$ ОДЗ: $x^3-x+10\geq 0$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2)$

$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10}-(x+2))=0$

$\left[\begin{array}{l} x+3=0 \longrightarrow x=-3 \text{, но тогда } x^3-x+10=-27+3+10<0 \text{ не уд. ОДЗ} \\ \sqrt{x^3-x+10}=x+2 \end{array}\right.$

$\sqrt{x^3-x+10}=x+2$

Если $x+2<0$, то $x\in\varnothing$

Если $x+2\geqslant 0$, то $x\geqslant -2$, обе части полож. можно возвести в квадрат.

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$

$x^2(x-2)+x(x-2)-3(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2,\ x^3-x+10=8-2+10>0,\ \text{уд. ОДЗ.} \\ x^2+x-3=0 \end{array}\right.$

$D=1+12=13$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, не уд. усл. $x\geqslant -2$

$\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}>1$, т.к. $\sqrt{13}>\sqrt{9}$, т.е. $\sqrt{13}>3$

Тогда по ОДЗ:

$x^3-x+10\geqslant 0$

$x^3-x\geqslant -10$

$x(x-1)(x+1)\geqslant -10$, т.к. $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}>1$, то все три множ. полож., а значит их произведение также полож., т.е. больше $-10$.

Ответ: $\left\{2;\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$

Если $x \geq 1$, то

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1 \geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1 \geq 0$

Разложим на множители методом неопр. коэф.

$(2x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=2x^4-3x^3+4x^2-2x+1$

$2x^4+\underline{2cx^3}+\underline{\underline{2dx^2}}+\underline{ax^3}+\underline{\underline{acx^2}}+adx+\underline{\underline{bx^2}}+bcx+bd=2x^4-3x^3+4x^2-2x+1$

$\begin{cases} a+2c=-3 \\ 2d+ac+b=4 \\ ad+bc=-2 \\ bd=1 \end{cases}$

Пусть $b=1$ $d=1$, тогда

$-\begin{matrix} a+c=-2 \\ a+2c=-3 \end{matrix}$

$c=-1 \Rightarrow a=-1$, проверим, подст. во 2.

$2+1+1=4$. Тогда это расклад. на такие множители:

$(2x^2-x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

Заметим что дискрим. обоих множ. отрицательное. Значит оба множителя всегда положит., а значит при $x \geq 1$ условие всегда выполняется.

Если $x<1$, то

$2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1 \geq 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \geq 0$

Разложим на множ методом неопр. коэфф.

$(2x^2+ac+b)(x^2+cx+d)=2x^4+3x^3-2x^2-2x+1$

$$\begin{cases} a+2c=3 \\ 2d+ac+b=-2 \\ ad+bc=-2 \\ bd=1 \end{cases}$$

Пусть $b=-1$; $d=-1$, тогда

$$+\begin{cases} -a-c=-2 \\ a+2c=3 \end{cases}$$

$c=1 \Rightarrow a=1$. Проверим, подст. во второе ур-е.

$-2+1-1=-2$.

Тогда это расклад. на множ:

$(2x^2+x-1)(x^2+x-1)\geq 0$

~~$2x^2+x-1$~~ Разложим на множ. квадр. трёхчлены.

$2x^2+x-1=0$

$D=9$

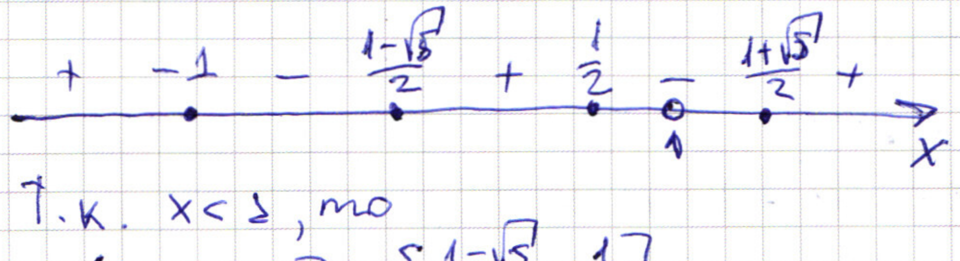
$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \\ x_2&=\frac{-1-3}{4}=-1 \end{aligned}\right| \Rightarrow 2x^2+x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)$$

$x^2+x-1=0$

$D=5$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2&=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow x^2+x-1=\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Тогда $(2x^2+x-1)(x^2+x-1)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\geq 0$




$2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$

$0>\frac{1-\sqrt{5}}{2}>-1$

Т.к. $x<1$, то

$x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Вместе с $x\geq 1$:

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

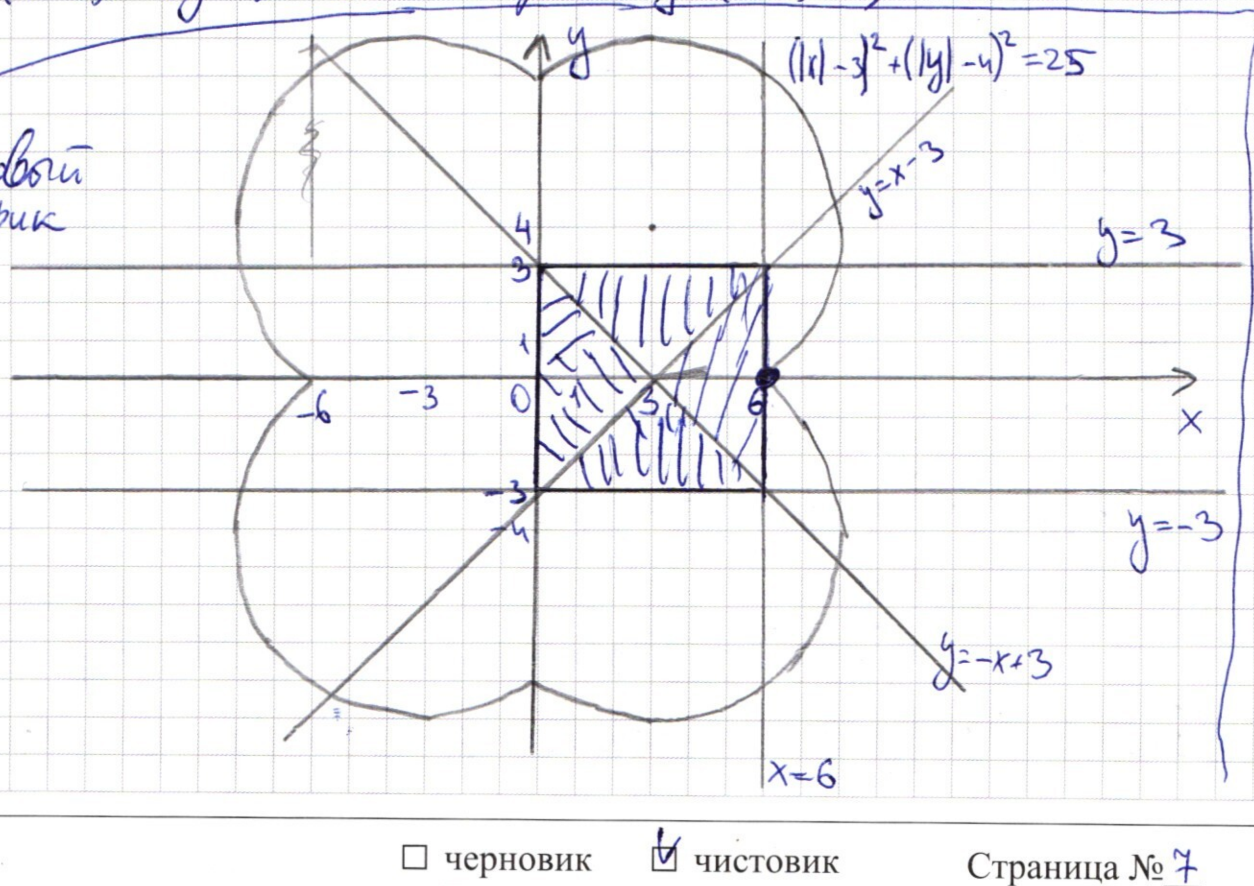
№7.

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25 \end{cases}$$

Решим систему графически
Изобразим график 2 ур-я:

При $x \geq 0$; $y \geq 0$ (I четв.)
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ – окр. с центром в т. $(3;4)$ и $r=5$.
При $x<0$; $y \geq 0$ (II четв.)
$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$ окр. с ц. $(-3;4)$ и $r=5$
При $x<0$; $y<0$ (III четв.)
$(x+3)^2+(y+4)^2=5^2$ – окр. с ц. $(-3;-4)$ и $r=5$
При $x \geq 0$; $y<0$ (IV четв.)
$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$ – окр. с ц. $(3;-4)$ и $r=5$

Итоговый график



Рассмотрим первое ур-е:

I случ: если $x-3-y$ и $x-3+y \geq 0$, тогда

$y \leq x-3$ и $y \geqslant -x+3$

обл., ниже графика $y=x-3$ обл., выше графика $-x+3$

Тогда $x-3-y+x-3+y \leq 6$

$2x-6 \leq 6$

$2x \leq 12$ $x \leq 6$

Штриховкой изобразим область на графике, соотв. реш. ~~данной сист~~ данного ур-я

II случ: $x-3-y<0$ $x-3+y \geq 0$

$y>x-3$ $y \geqslant -x+3$ (обл., выше обоих граф.).

Тогда $-x+3+y+x-3+y \leq 6$

$2y \leq 6$ $y \leq 3$

III случ: $x-3-y<0$ $x-3+y<0$

$y>x-3$ $y<-x+3$

Тогда $-x+3+y-x+3-y \leq 6$

$-2x+6 \leq 6$

$x \geq 0$

IV случ: $x-3-y \geqslant 0$ $x-3+y<0$

$y \leq x-3$ $y<-x+3$

Тогда $x-3-y-x+3-y \leq 6$

$-2y \leq 6$

$y \geqslant -3$. ~~Изобра~~ Графиком первого ур-я является квадрат со стороной 6 и центром в т. (3;0)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

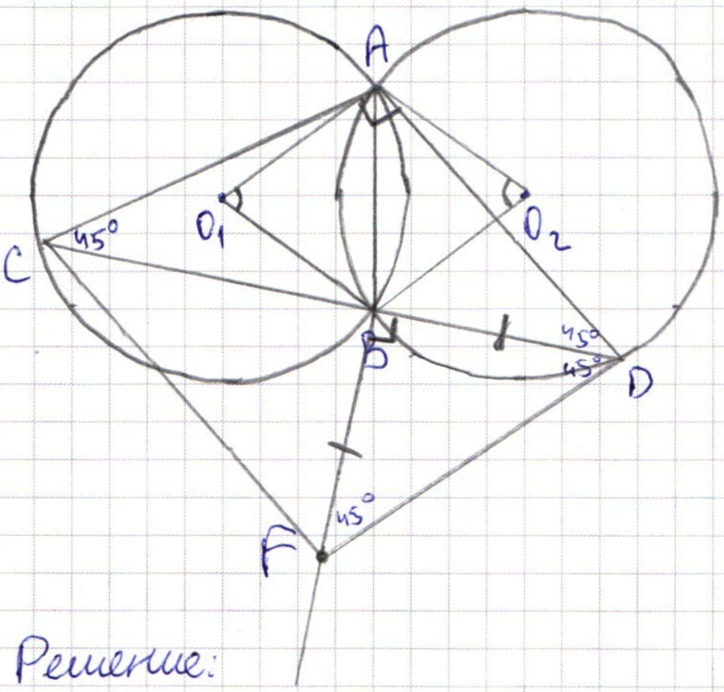
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём пересечение двух графиков уравнений. Пересечением является точка $(6;0)$ Значит решением системы является эта точка

Ответ: $(6;0)$.

№5.




Дано: $\omega_1(O_1;9)$

$\omega_2(O_2;9)$

$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A;B\}$

$C \in \omega_1$; $D \in \omega_2$

$\{C;B;D\} \in l$

$\angle CAD = 90°$

$FB \perp CD$

$BF = BD$

Найти: $CF$ - ?

Решение:

Проведём отрезки $O_1A$; $O_1B$; $O_2A$; $O_2B$. Тогда $\Delta AO_1B = \Delta AO_2B$ (по 3 сторонам): $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = r = 9$.

Тогда $\angle AO_1B = \angle AO_2B$. Но т.к. и $AB$ - общая. они оба центральные для своих окружн., то $\smile AB$ у обоих окруж. равная. Значит $\angle ACB = \angle ADB$ (впис. углы, опир. на равные дуги).

Т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

В $\triangle BDF$:

1) $BF = BD$

2) $\angle DBF = 90^\circ$ $\Bigg| \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ \Rightarrow BD \perp AD$ - касательные

$\smile AB = 45^\circ \cdot 2 = 90^\circ \Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$. Тогда $O_1AO_2B$ - квадрат. Т.к. $\angle CAD = 90^\circ = \angle O_1AO_2$, то $AC$ и $AD$ - диаметры окружностей. Тогда $AC = AD = 18$

$CD = 18\sqrt{2}$ (т.к. $AC = AD$, из р/б $\triangle ACD$)

Тогда $AB$ - бис., мед., высот. в $\triangle ACD$

$BD = 9\sqrt{2} = CB = BF$.

$CF = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + (9\sqrt{2})^2} = 18$

Ответ: $CF = 18$

## №5.

$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Т.к. число 8-значное, то сущ. три варианта набора цифр: 11222557 (I); 11124557 (II); 11115578 (III).

По другому невозм., т.к. другие произв. цифр будут больше 10, что уже не цифра. Рассмотрим каждый из случаев:

Если был I набор, то различных чисел в нём 4. Значит на первое место можно поставить 4 цифры. Тогда, не учитывая излишки, будет:

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ - способов. Но вычитается один.

Если изначально стояла 7, то на 2 место не могло идти 4. цифры

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим первый набор:

11 222 55 7.

В нём 4 различ. цифры; 1 из кот. одна; 2 по 2; и 1 по 3.

На первое место в 8-значном числе можно поставить 4 цифры, а дальше всё зависит от первой цифры.

~~Если сначала стоит 7, то~~

Тогда найдём кол-во расстановок в 4-х знач. числе с числами 1 2 5 7. Их $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. Далее пятерка может встать в люб. промеж., то же 1 и 2. Изначально промежутков 5 (+2 снач. и с конца). Но один. числам нет смысла вставать с двух разных сторон от самой себя. поэтому. 5 может встать в 4 промеж.; 1 в 5 промеж., первая двойка в 6, а вторая в тоже. Тогда будет:

$6\cdot6\cdot5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=11280$. В первом случае.