МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

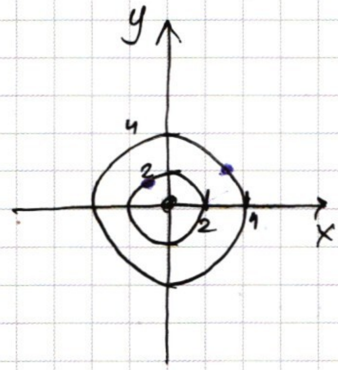
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. $x^2+y^2=r^2$ М ② Ж ④

М: $M_0(-1;\sqrt{3}) \to (-1)^2+(\sqrt{3})^2=4=2^2$

Ж: $N_0(2\sqrt{3};2) \to (2\sqrt{3})^2+(2)^2=16=4^2$



Пусть жук стоит в точке N_k, тогда мин. расстояние до него ~~от~~ от сахара 4, по радиусу окр., по которой он движется. (Не хочу, чтобы кончилась чёрная ручка, (оставил для чистовиков) мало пасты) ~~Тогда~~

Мин. расст. от М до N → 2

N2 $\cancel{3((a+b)(9x-by)+(12y-4bx)=a-1}$

$3(a+b)x+12y-4abx-(a+b)aby=0$

$3x(a+b)+12y-ab(4x+(a+b)y)=0$

$3(4y+x(a+b))-ab(4x+y(a+b))=0$

$3ax+3bx+12y-4abx-a^2by-ab^2y=0$

$y(12-a^2b-ab^2)+x(3a+3b-4ab)=0$

$\cancel{y=\ldots}$ $y=x\cdot\frac{4ab-3a-3b}{12-a^2b-ab^2}$

если $ab=3 \Rightarrow y=x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

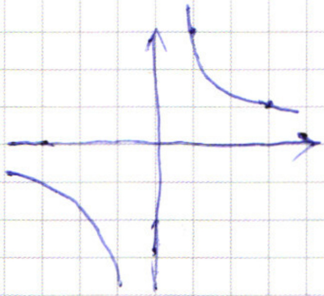
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2. $\begin{cases} 3ax + 3bx + 12y = a \\ 4abx + aaby + abby = a \end{cases}$

$3ax+3bx+12y-4abx-aaby-abby=0$

$x(3a+3b-4ab) = y(aab+abb-12)$

если $ab=3$, $x=y$

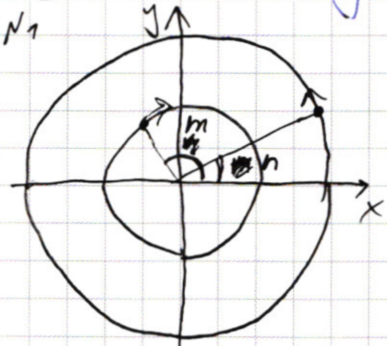


$\begin{cases} 3(a+\frac{3}{a})x+12y=a \\ 4\frac{3}{a}x+(a+\frac{3}{a})\frac{3}{a}y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3a^2+9}{a}+12y=a \\ \frac{12x}{a}+\frac{y(3a^2+9)}{a^2}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a^2+9+12ay=0 \\ 12xa+3a^2y+9y=a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a^2+12ya+9=0 \\ a^2(3y-1)+12xa+9y=0 \end{cases}$

№1



$\omega_M = 2\omega_ж$ (угл. скор.)

$\angle m = \arccos^{-1}(\cancel{m})/2 = 120°$

$\angle n = \arcsin(2)/4 = 30°$

первая встреча: $\angle = 60°$, т.к. $120°-30°=90°$;

$M_1=(1;\sqrt{3})$, $N_1=(2;2\sqrt{3})$

Затем разница $360°$, значит жук пройдёт $120°$, там будет встреча: $M_2=(-2;0)$, $N_2=(-4;0)$, затем через ещё $120°$: $M_3=(1;-\sqrt{3})$, $N_3=(2;-2\sqrt{3})$, а затем опять через $120°$ будет повтор: M_1, N_1.

Ответ: $(1;\sqrt{3})$, $(2;2\sqrt{3})$; $(-2;0)$, $(-4;0)$; $(1;-\sqrt{3})$, $(2;-2\sqrt{3})$

№3. $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

$x(x^2-1) \geq -10$

1) $x^2+5x+6=0$ $(x(x^2-1) \geq -10)$

$x_1=-2$, $x_2=-3$

$x(x^2-1) \geq -10$

Решений нет.

$(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$

2) $\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^3-x^2-5x+6=0$ $\qquad x_1=2,\ x_2=$

$$\cancel{x^3+x^2-6x+6 \,|\, (x+2) \;\; x^2+3x-3}$$

$$\cancel{x^3+x^2-5x+6 \,|\, x-2 \;\; x^2+3x}$$

$x^3+x^2-3x-2x^2-2x+6$

$$\cancel{x^3-x+10 \,|\, x-2}$$

$$\cancel{x^3-x^2-5x+6 \,|\, x-2 \;\; x^2+x}$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\
\quad x^2-5x & \\
\quad \underline{x^2-2x} & \\
\qquad -3x+6 & \\
\qquad \underline{-3x+6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$x^2+x-3=0$

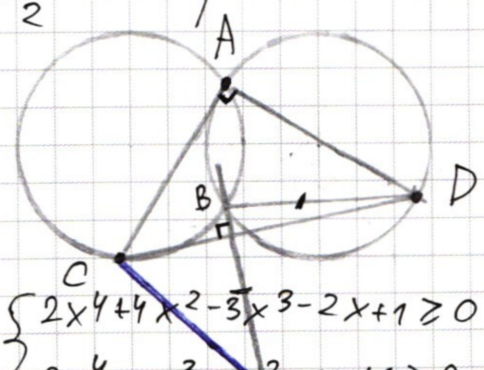
$D=1^2+12=13$

$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x_3=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$\dfrac{(-\sqrt{13}-1)}{2}\cdot\left(\left(\dfrac{(\sqrt{13}+1)}{2}\right)^2-1\right)$

$-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\cdot\left(\dfrac{13+2\sqrt{13}+1}{4}-1\right)$



Ответ: $x=-3,\ 2,\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$

№4. $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$$\left[\begin{cases}2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0\\ 2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1\geq 0\end{cases}\right.$$

$$\begin{cases}2x^4+4x^2-3x^3-2x+1\geq 0\\ 2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0\end{cases}$$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0$

$(x^2-x+1)(2x^2-x+1)=2x^4-x^3+x^2-2x^3+x^2-x+2x^2-x+1=$

$=2x^4-3x^2+4x^2-2x+1$

$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=0 \quad D=1^2-4\cdot1=-3 \quad \text{Нет корней} \\ 2x^2-x+1=0 \quad D=1^2-4\cdot2\cdot1=-7 \quad \text{Нет корней} \end{array}\right.$

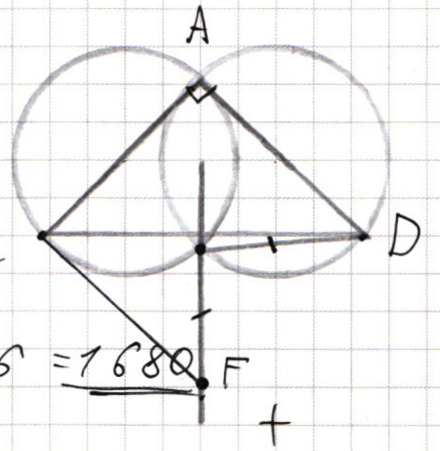
$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=0$

$(x^2+x-1)(2x^2+x-1)=2x^4+x^3-x^2+2x^3+x^2-x-2x^2-$

$-x+1=2x^4+3x^3-2x^2-2x+1$

$\left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{array}\right.$

$(-\infty;+\infty)$



N 5. $1400=175\cdot8=\underline{7\cdot5^2\cdot2^3}$

$28\cdot6\cdot10=280\cdot6=1200+80\cdot6=\underline{1680}$

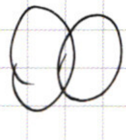
+

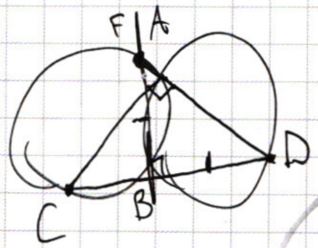
$\frac{8\cdot7\cdot6}{6}=56\cdot5\cdot4\cdot3=56\cdot60=560\cdot6=3000+360=3360$

+

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{24}=70\cdot4\cdot3=70\cdot12=840$

$=5880$



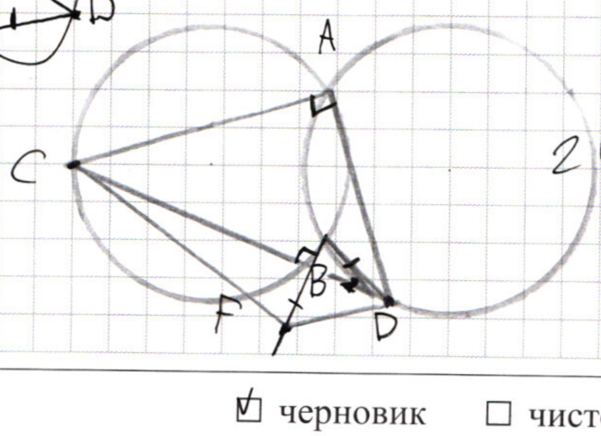


0,36 − 0,6 − 1

0,72 − 0,6 − 1

4 − 2 − 1   8 − 2 − 1

25 − 5 − 1

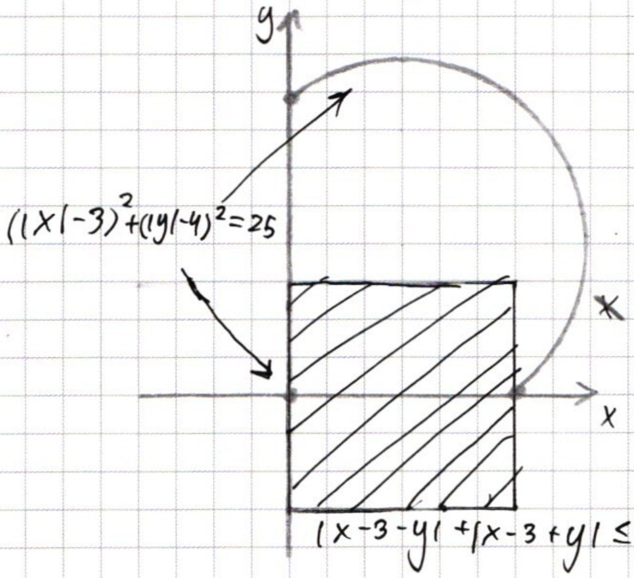


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~N7. N6. ABQ ∠BFC = ∠ACD~~

N7. $\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \le 6 \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 2x-6\le 6 \\ -2y\le 6 \\ 2y\le 6 \\ -2x+6\le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 6 \\ y\ge -3 \\ y\le 3 \\ x\ge 0 \end{array}\right.$



окружность с $r=5$ и центром $(3;4)$, но $|x|-3\ge 3$, $|y|-4\ge 4$, значит x и $y \ge 0$

Ответ: $(0;0)$, $(6;0)$

N6. $\angle BFC = \angle ACD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

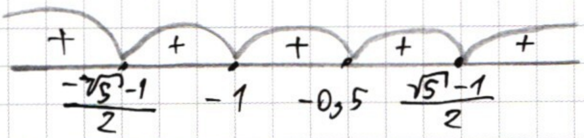
$$\left[\begin{array}{l} 2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0 \\ 2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0 \end{array}\right.$$

Попробуем метод интервалов:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0 \\ 2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (x^2-x+1)(2x^2-x+1)=0 \\ (x^2+x-1)(2x^2+x-1)=0 \end{array}\right.$$

В верхнем уравнении все $D<0$, значит корней нет.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0,\ D=1+4\cdot1=5,\ x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 2x^2+x-1=0,\ D=1+2\cdot4\cdot1=9,\ x_1=\frac{-1+3}{4}=-0{,}5,\ x_2=\frac{-1-3}{4}=-1 \end{array}\right.$$



Подставив, получаем, что график всегда выше оX ($y>0$)

Вывод: исходя из метода интервалов получается, что график всегда выше 0.

Ответ: $(-\infty;\infty)$

№5. $1400=7\cdot5^2\cdot2^3$ => произведение цифр можно представить

$$\left[\begin{array}{ll} 1\cdot1\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2 & (1) \\ 1\cdot1\cdot1\cdot7\cdot5\cdot5\cdot4\cdot2 & (2) \\ 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot7\cdot5\cdot5\cdot8 & (3) \end{array}\right.$$

1) $\frac{8\cdot7}{2}\cdot6\cdot\frac{5\cdot4}{2}=1680$ +

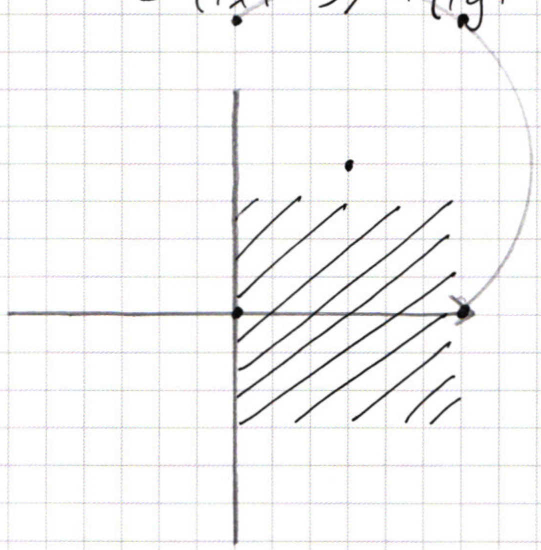
2) $\frac{8\cdot7\cdot6}{6}\cdot5\cdot4\cdot3=3360$ + $=5880$ чисел

3) $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{24}\cdot4\cdot3=840$

$x-3>y$ $\quad 3-x \geq y$

№ 5. $\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25 \end{cases}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-6 \leq 6 \\ -2y \leq 6 \\ 2y \leq 6 \\ -2x+6 \leq 6 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} x \leq 6 \\ y \geq -3 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{array}$



$|x|-3 \geq -3$

$|y|-4 \geq -4$

$|x+y| \leq 1$

$x+y \leq 1$

$x+y \geq 1$

$\cancel{y=|x-1|}$ $\quad \cancel{|x+y| \geq 1}$

$\cancel{y=x-1}$

$\cancel{y=-x+1}$

Ответ: $(0;0), (6;0)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Насекомые двигаются по окружностям с центрами в $(0;0)$, мы знаем изначальные ~~...~~ координаты их, значит можем рассчитать радиусы окружностей:

$M: 2^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \rightarrow r = 2$

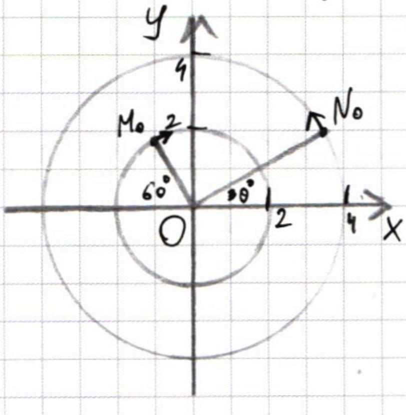
$Ж: 4^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2)^2 \rightarrow r = 4$

~~...~~ Их скорости равные, длины окружностей, по ~~которым~~ они двигаются, относятся как $\frac{1}{2}$, значит угл. скорость муравья в 2 раза больше жучьей: ~~...~~ $\omega_M = 2 \cdot \omega_Ж$

Посчитаем ~~...~~ углы M_0OX и N_0OX:

$\angle M_0OX = \arccos(-1/2) = 120°$, $\angle N_0OX = \arcsin(2/4) = 30°$.

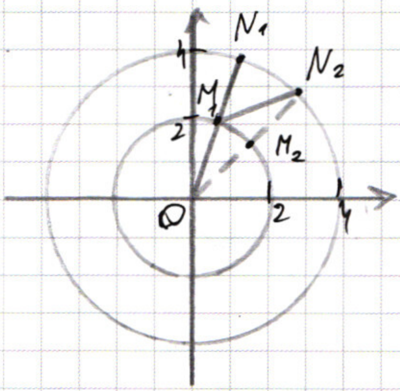
К моменту, когда они встретятся, муравей пройдёт в два раза больший угол, чем жук. $120° - 30° = 90°$, значит (из-за отношения $\omega_M = 2 \cdot \omega_Ж$) первая встреча на углу $60° \Rightarrow$



$\Rightarrow M_1 = (1; \sqrt{3})$, $N_1 = (2; 2\sqrt{3})$;

теперь разница $360°$, значит след. встреча на углу $180° \Rightarrow M_2 = (-2; 0)$, $N_2 = (-4; 0)$; след. встреча тоже через $120°$, на углу $300° \Rightarrow M_3 = (1; -\sqrt{3})$, $(2; -2\sqrt{3})$; затем снова в M_1 и N_1 и т.д. по кругу. Ответ: ~~...~~ $(2; 2\sqrt{3})$, $(-4; 0)$, $(2; -2\sqrt{3})$.

№1. Примечание: докажем, что ~~нужно~~ сахар, муравей и жук должны лежать на одной прямой, чтобы расстояние было минимальным:



Очевидно, что кратчайшее расстояние от жука к сахару — по радиусу. Пусть жук стоит в N_1, тогда пересечение с окр. муравья — M_1. Если жук сдвинется в N_2, M_1N_2 не будет кратчайшим расст. между жуком и муравьём, ведь $OM_1+M_1N_2 > OM_2+M_2N_2$, а $OM_1 = M_2$. Значит для кратчайшего расстояния (2), жук и мур. должны лежать на одном радиусе большей окружности, ч.т.д.

№2. $\begin{cases}3(a+b)x+12y=a\\4abx+(a+b)aby=a\end{cases}$ $\begin{cases}3ax+3bx+12y=a\\4abx+a^2by+ab^2y=a\end{cases}$

$3ax+3bx+12y-4abx-a^2by-ab^2y=0$

$x(3a+3b-4ab)=y(aab+abb-4\cdot 3)$

Если $ab=3$ => $x=y$ имеет ∞ много решений,

=> Ответ: $(a;\frac{3}{a})$, где $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

№3. $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$, ОДЗ $x^3-x\geq-10$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+2)(x+3)$ => $x=-3$.

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$, $x_3=\frac{-\sqrt{13}-1}{2}$,

но при x_3 $x^3-x<-10$, => Ответ: $x=-3, 2, \frac{\sqrt{13}-1}{2}$