

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р;
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\frac{1}{2} \cdot (x+5) \cdot \sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x+10$$

$$OAB; x^3-16x+25 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+5) \cdot \sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\text{при } x \neq -5.$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2-16x+16x+25-16=0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x=3;$$

$$\cancel{x^2-x-3=0} \quad x^2-x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x=-5 \text{ - не подходит по } OAB \text{ т.к. } -125+80+25=-20 < 0$$

$$x=3 \text{ - подходит по } OAB \text{ т.к. } 27-48+25=4 > 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ - подходит по } OAB \text{ т.к. } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 25 =$$

$$= \frac{1+39+3\sqrt{13}+13\sqrt{13}}{8} - 8 - 8\sqrt{13} + 25 = 5 + 2\sqrt{13} - 8 - 8\sqrt{13} + 25 =$$

$$= 22 - 6\sqrt{13} > 0 \text{ т.к. } 22 > 6\sqrt{13} \text{ т.к. } 484 > 36 \cdot 13 = 468$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ - подходит по } OAB \text{ т.к. } \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) + 25 =$$

$$= \frac{40-16\sqrt{13}}{8} - 8 + 8\sqrt{13} + 25 = 5 - 2\sqrt{13} - 8 + 8\sqrt{13} + 25 = 22 + 6\sqrt{13} > 0$$

$$\text{Ответ } x=3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Задача 4.

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^2 | x+1 | + 1 \geq 0$$

при $x \geq -1$.

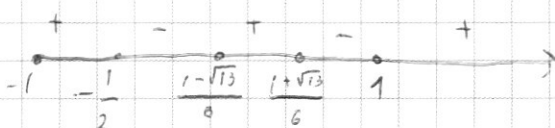
$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{6}) \geq 0$$

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(6x^2 - 2x - 2) \geq 0$$

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6})(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}) \geq 0$$



$$x \in [-1; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

при $x < -1$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 6x^4 &\geq -5x^3 \quad \text{и} \quad 6x^2 \geq -2x \\ 6x &\geq -5 \quad \text{и} \quad 3x &\geq -1 \\ x &\geq -\frac{5}{6} \quad \text{и} \quad x &\geq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

при $x < -1$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Докажем, что это всегда верно при $x < -1$.

т.к. $6x^4, 6x^2, 1 \geq 0$ то надо доказать, что $6x^4 + 6x^2 + 1 \geq -5x^3 - 2x$ при $x < -1$

$$6x^4 \geq -5x^3 \quad \text{при} \quad x < -1$$

$$x^3(6x+5) \geq 0 \quad \text{т.к.} \quad x < -1 \quad \text{то} \quad 6x+5 < 0 \quad \text{и} \quad x^3 < 0 \Rightarrow x^3(6x+5) > 0$$

$$6x^2 + 2x \geq 0 \quad \text{при} \quad x < -1$$

$$2x(3x+1) \geq 0 \quad \text{т.к.} \quad x < -1 \quad \text{то} \quad 3x+1 < 0 \quad \text{и} \quad 2x < 0 \Rightarrow 2x(3x+1) > 0$$

Значит при любых $x < -1$ $6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

$$\text{Итак} \quad x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5

$$7000 = 7 \cdot 5^3 \cdot 2^3$$

Заметим что 4 и 5 можно поменять только из чисел 4 и 5 $\Rightarrow$ 6 8 заметим число

будет одна цифра 7 и 3 цифры 5. Количество способов их расставить равно

$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 8 \cdot 35 = 280$. Теперь осталось расставить 4 числа так, чтобы
их произведение было 8. Это либо одна 8 либо 4 и 2 либо 2 и 2 и 2.

Кол-во способов поставить 1 цифру 8 $= 4$. Кол-во способов расставить 4 и 2 $= 12$.

и кол-во способов расставить 2 и 2 и 2 в 4 места $= 4$.

$$\text{Ответ } 280 \cdot (4 + 12 + 4) = 280 \cdot 20 = 5600.$$

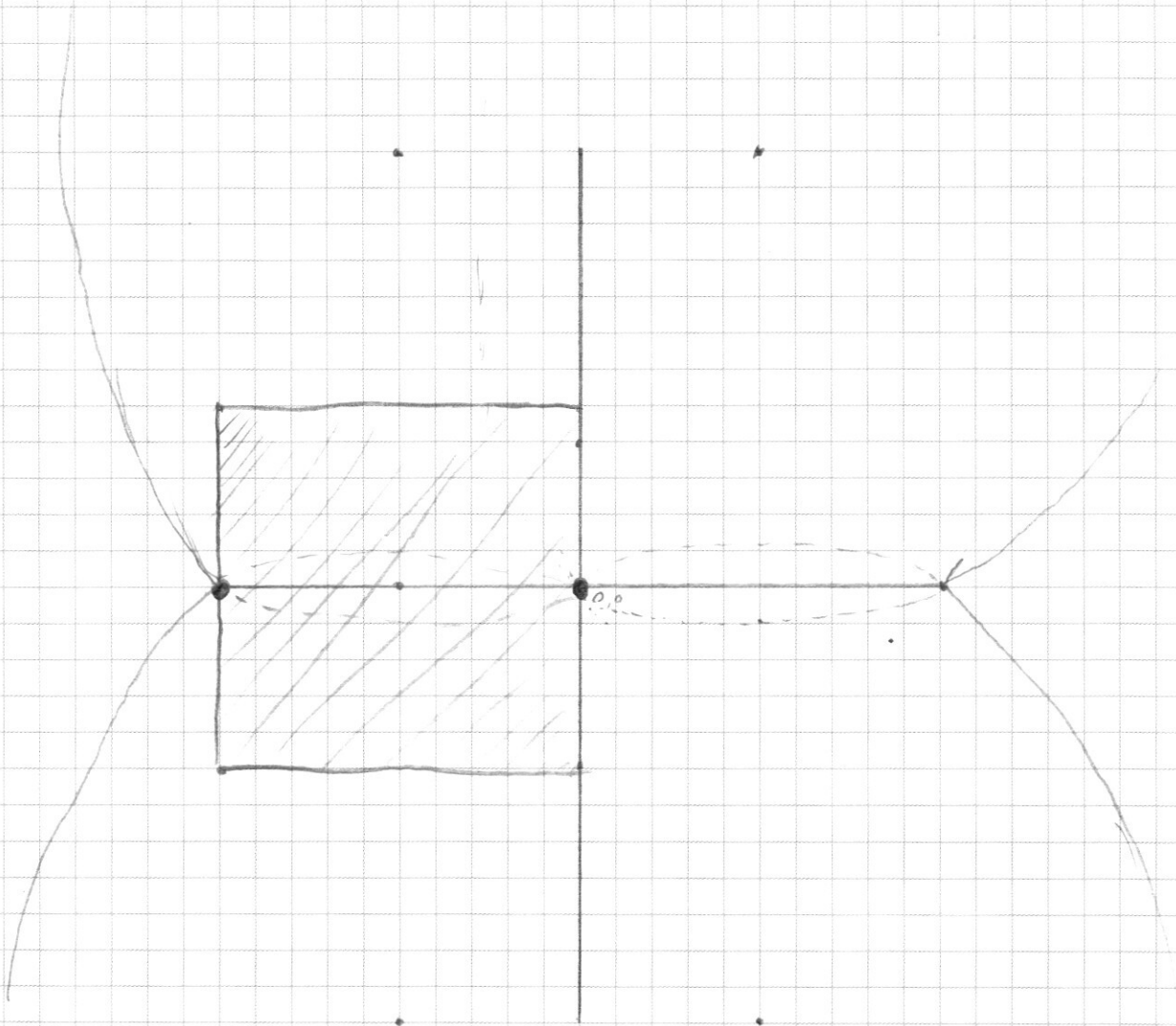
Задание №7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ ((x-5)^2 + (y-12)^2 = 169) \end{cases}$$

~~$((x-5)^2 + y^2$~~ Решим систему графически. $((x-5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$ -

это уравнение окружности; но так x и y имеют модули то это 4 окружности.

1 неравенство это ~~соединение~~ точки образующие ромб. - симметрично по рисунку.



Тогда пересечение этих графиков имеют 2 точки. А именно $(0; 0)$ и $(-10; 0)$
 Ответ $(0; 0)$ и $(-10; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + by = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

испыт $a = b + c$ тогда.

$$\begin{cases} 2cx + by = b + c & | \cdot 3b \\ 3bx + by = 1 & | \cdot 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6bcx + 18by = 3b^2 + 3bc \\ 6bcx + 2bc^2y = 2c \end{cases}$$

$$18by - 2bc^2y = 3b^2 + 3bc - 2c$$

$$2by(9 - c^2) = 3b^2 + 3bc - 2c. \quad \text{т.к. } b \text{ и } c \text{ — некоторые числа, а}$$

то $2by(9 - c^2)$ зависит от c , то либо $b = 0$ либо $c^2 = 9$.

$$b \neq 0 \text{ тогда } 3bx + (a-b)y = 0 \neq 1 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3.$$

Если $c = 3$. то

$$3b^2 + 9b - 6 = 0$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 17$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Если $c = -3$ то

$$3b^2 - 9b + 6 = 0$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$b_{1,2} = -1; -2.$$

$$a_{1,2} = -4; -5.$$

Ответ $(-4; a = -4, b = -1; a = -5; b = -2; a = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, b = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2};$
 $a = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; b = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}.$



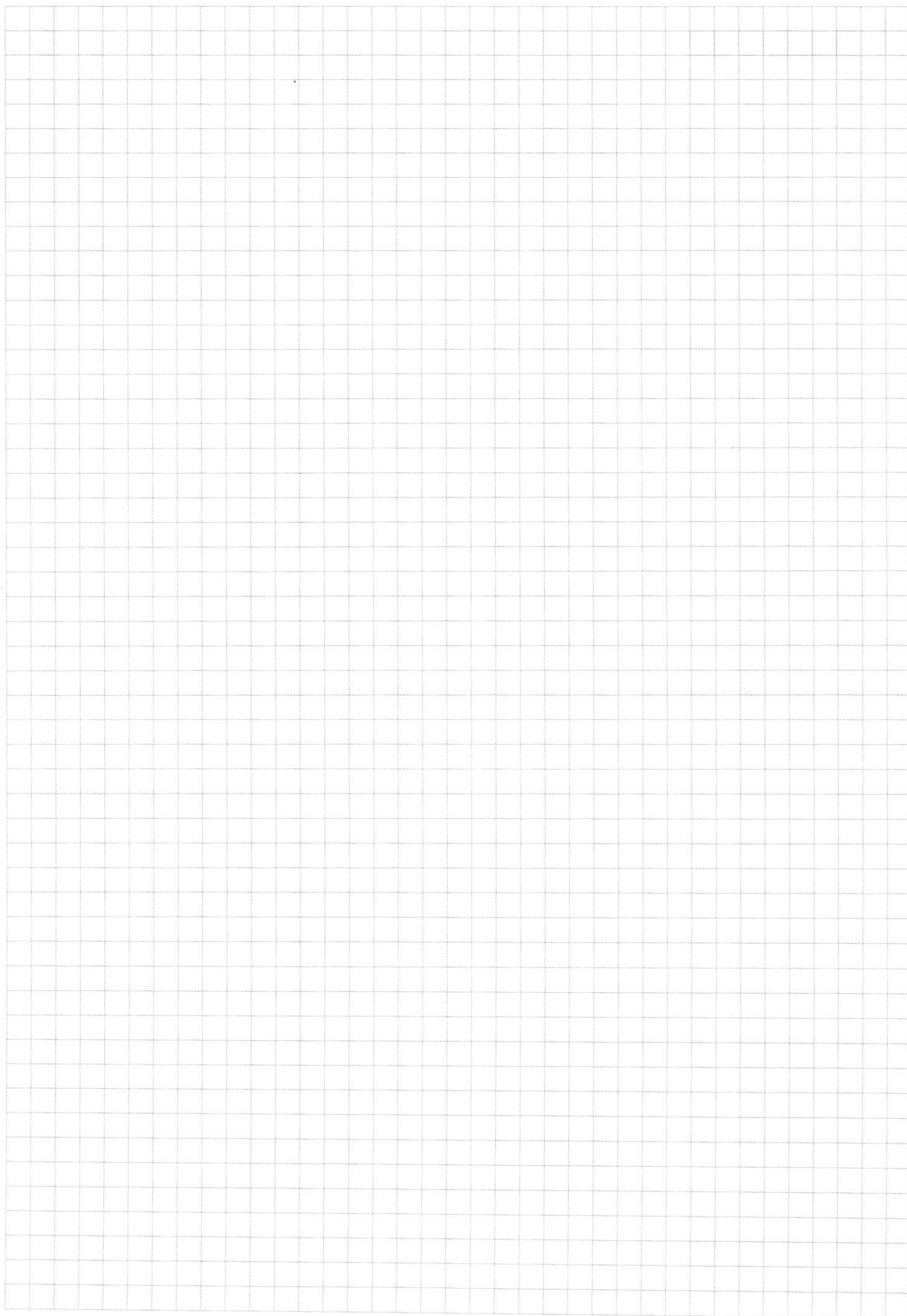
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



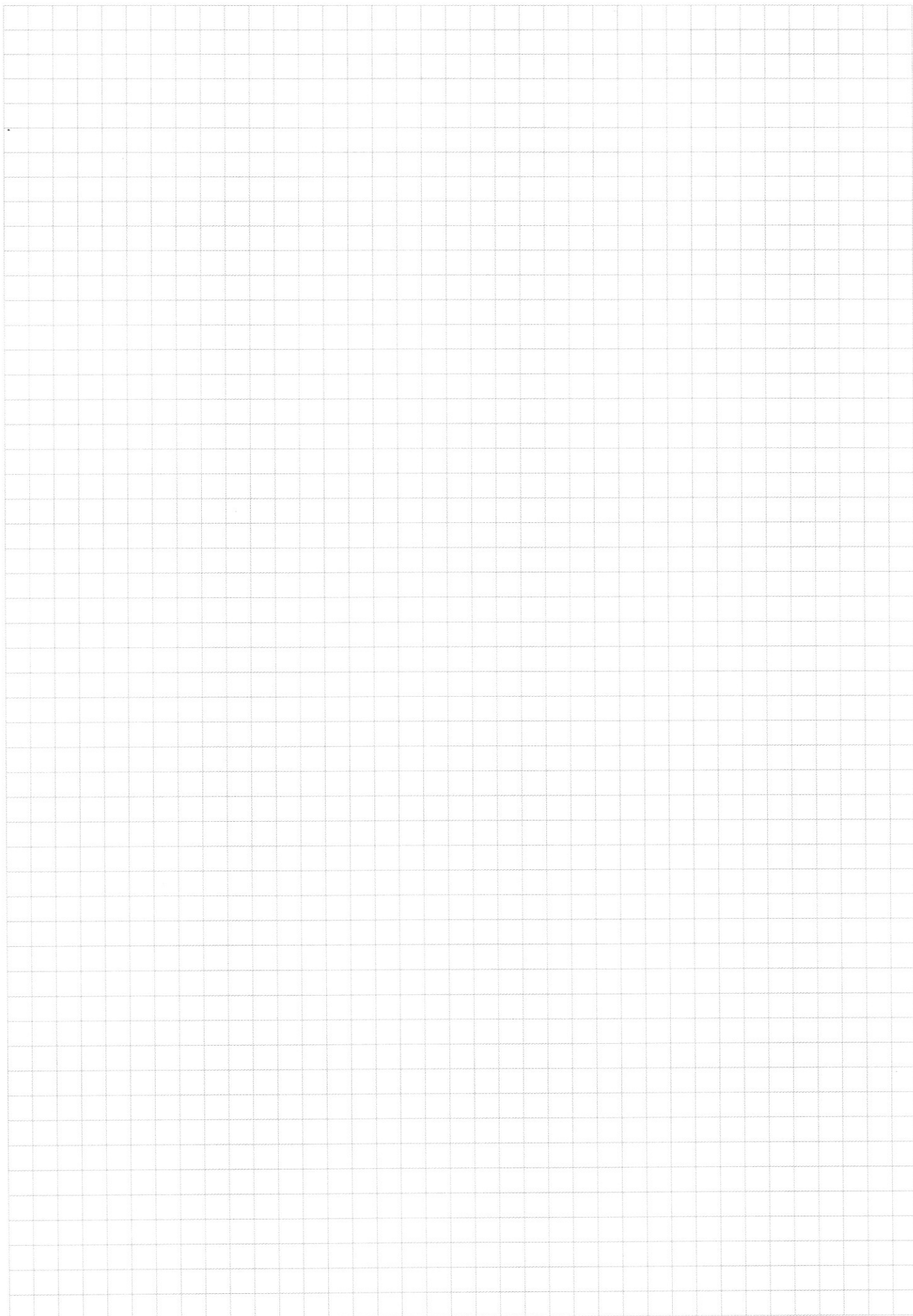
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)