

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

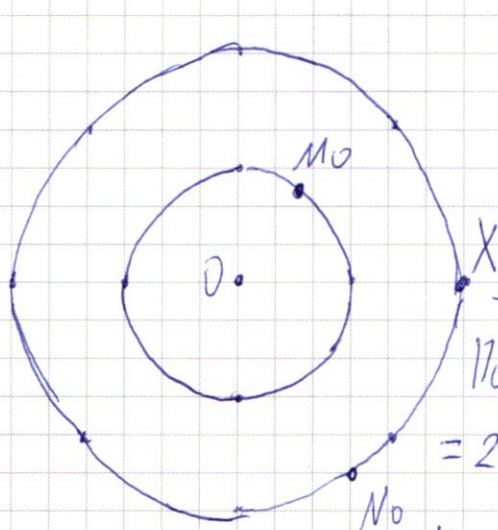
$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Найдём радиусы двух окружностей
 R_1 - радиус малой окружности, R_2 - радиус большой окружности
 По теореме Пифагора $R_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3}$; $R_2 = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$
 $R_2 = 2R_1$, т.к. радиусы отличаются в 2

раза, а скорости пиз равны, то кратчайшее расстояние между достигаться в ^{трех} ~~двух~~ точках путь эти ~~точки~~ ^{точки} будут $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и (x_3, y_3) ^{x_1, y_1} - координаты именно координаты положений ~~смысла~~, эти x точки 3, т.к. пизы движутся в разные стороны.

Пусть пизы встретились в точке А, ~~найдём~~ а следующая встреча произойдёт в точке В, найдём угол между OA и OB , Пусть ~~смысла~~ ^{цельная} ~~прошел~~ ^{расстояние} x , тогда ~~смысла~~ ^{прошла} $2x$ (т.к. её ~~длина~~ ^{длина} ~~скорости~~ ^{скорости} в 2 раза больше $R_1 = \frac{1}{2}R_2$), т.к. они движутся в разных направлениях, то $x + 2x = 360^\circ$

$$3x = 360^\circ$$

$$x = 120^\circ$$

$x = 120^\circ$ - угол между точками встречи.

Найдём угол между пизами в начале $\angle M_0 O N_0 = \angle M_0 O X + 2 \angle X O N_0$
 $\sin \angle M_0 O X = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle M_0 O X = 60^\circ$; $\frac{\sin \angle X O N_0}{\cos} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle X O N_0 = 30^\circ$

$$\angle M_0 O N_0 = 60 + 60 = 120^\circ$$

Пусть пилы движутся навстречу и скелер пересекаются в точке X , а синица $2x$, тогда

$$x + 2x = 30$$

$x = 30^\circ$, то есть в момент встречи скелер находится в точке $X \Rightarrow x_1 = y_1 = 4\sqrt{3}; y_1 = 0$

Через 120° состоится вторая встреча

$$x_2 = \cos 120 \cdot R_2; \quad x_2 = -\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$y_2 = \sin 120 \cdot R_2; \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6$$

$$x_3 = \cos 240 \cdot R_2; \quad x_3 = -\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$y_3 = \sin 240 \cdot R_2; \quad y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = -6$$

Ответ: $A(4\sqrt{3}; 0); B(-2\sqrt{3}; 6); C(-2\sqrt{3}; -6)$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases} \quad n=2$$

$$\begin{cases} 6y = a - 2(a-b)x \\ (a-b)y = 1 - 3bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} \\ y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} \end{cases} \begin{cases} (a-b) \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

обеззависимости линейные (имеют вид $kx + b$), что бы система имела бесконечное число решений зависимости должны совпадать, то есть иметь одинаковые коэффициенты

$$b = \frac{1}{(a-b)b} = \frac{a}{6} \Rightarrow b = \frac{a}{6(a-b)}$$

$$a = -\frac{2(a-b)}{6} = -\frac{3b}{(a-b)b} \Rightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$a-b = \pm 3; \quad a = b \pm 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b+3 \\ a = b-3 \\ ab(a-b) = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b+3 \\ (b+3)b(b+3-b) = 6 \\ a = b-3 \\ (b+3)b(b+3-b) = 6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b+3 \\ -3(b^2+3b) = 6 \quad ① \\ a = b-3 \\ 3(b^2-3b) = 6 \quad ② \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ① \quad b^2+3b = -2 \\ b^2+3b+2 = 0 \\ \text{По теореме Виета } b_1 = -1; b_2 = -2 \\ ② \quad b^2-3b = 2 \\ b^2-3b-2 = 0 \\ \text{По } b = \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b-3 \\ (b-3) \cdot b \cdot (b-3-b) = 6 \quad ① \\ a = b+3 \\ (b+3) \cdot b \cdot (b+3-b) = 6 \quad ② \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ① \quad (b^2-3b)(-3) &= 6 \\ b^2-3b &= -2 \\ b^2-3b+2 &= 0 \end{aligned}$$

По теореме Виета:

$$b_1 = 2; b_2 = 1$$

$$a_1 = 2-3 = -1$$

$$a_2 = 1-3 = -2$$

$$\begin{aligned} ② \quad (b^2+3b)3 &= 6 \\ b^2+3b &= 2 \\ b^2+3b-2 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 9 + 8 = 17$$

$$b_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; b_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

Отв. Если $a=b=0$

$$\begin{cases} 2 \cdot 0x + 6y = a \\ 36x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = a - \text{имеет только 1 решение} \\ 36x = 1 - \text{имеет всегда только} \end{cases}$$

одно решение

Если $b=0$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 36x + (a-b)6y = 1 \end{cases}$$

$0=1$ — такого быть не может

Отв.: $(2; -1); (1; -2); \left(\frac{-3+\sqrt{14}}{2}; \frac{3+\sqrt{14}}{2}\right); \left(\frac{-3-\sqrt{14}}{2}; \frac{3-\sqrt{14}}{2}\right)$

(все) — все ответы имеют такой вид
вс

N 3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10; x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)(x+5)$$

$$D = 9 + 40 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

$$\begin{cases} x+5=0 \\ \sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ \begin{cases} x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16 \quad (1) \\ 2(x-2) \geq 0 \\ x^3-16x+25 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) \quad x^3-4x^2+9=0$$

Вынесем за скобки $x-3$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+9 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & \\ -1x^2+9 & \\ \underline{-x^2+3x} & \\ -3x+9 & \\ \underline{-3x+9} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \quad D=1+12=13$$
$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad x_{кр} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x+1 < 0$; $x < -1$

$$6x^4 - x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Т.к. все коэффициенты больше нуля, то все корни
возникло миним., выражение не имеет корней $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ оно постоянно больше нуля

Ответ: $[-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup (1; \infty]$

$|x+y+5| + |x-y+5|$, пока $y \leq x+5$ значение
выражения будет неизменным иравнётся $2(x+5)$, если
 $y > x+5$, то значение выражения начнет расти,
Найдём минимальное значение выражения $|x+y+5|$

при $x=0$, достигается минимум т.к. график
имеет вид , $2|0+5|=10$,

Т.к. ~~при~~ при увеличении y значение $|x+y+5|$
возрастает ~~и при~~ ~~при~~ ~~если~~ ~~при~~
если $y \leq -x-5$, значение так же начнет возраст-
ать из-за знака модуля $\Rightarrow x=0$ минимальное
значение выражения $|x+y+5| + |x-y+5| = 10$, и

достигается при $x=0$ $y \in [-5; 5]$

решим второе уравнение при $x=0$

$$(|y|-12)^2 = 160 - 25$$

$$|y|-12 = 12, \text{ уравнение имеет единственное решение}$$

при $y = 0$, но получить решение при $y = \pm 24$, но

$\pm 24 \notin [-5; 5]$,

Ответ: $(0; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Все «корни»: -5 ; 3 ; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ prüfen

$$2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$1+\sqrt{13} > 4, \text{ т.к. } \sqrt{13} > 3$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2$$

$$1-\sqrt{13} < 4$$

$$1-\sqrt{13} < 4 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} - \text{не подходит}$$

$$-5 < 2 \Rightarrow -5 - \text{не подходит}$$

$$x^3 - 16x + 15 > 0; \quad 125 - 16 \cdot 5 + 15 = 150 - 80 = 70; 70 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - \text{подходит}$$

$$27 - 16 \cdot 3 + 15 = 40 \Rightarrow 3 \text{ подходит}$$

$$4 > 0$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 15 = \frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13}) - 8 - 8\sqrt{13} + 15 =$$

$$= 5 + 2\sqrt{13} - 8 - 8\sqrt{13} + 15 = 22 - 6\sqrt{13} = \frac{(22-6\sqrt{13})(22+6\sqrt{13})}{22+6\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{484 - 468}{22+6\sqrt{13}}; \quad \frac{484-468}{22+6\sqrt{13}} > 0 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ подходит}$$

Ответ: -5 ; 3 ; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

№ 5

$4000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$, найдем все возможные варианты цифр в числе, т.к. $5 \cdot 2 = 10$ и $5 \cdot 4 = 20$, и $4 \cdot 2 = 8$, то в каждом числе будет ровно 3 цифры 5 и одна 4, т.к. их произведение равно 40, и $2 \cdot 2 = 4$ и $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ их можно заменить

$$\begin{aligned}
 ① \quad 45552221 & - \frac{8!}{3 \cdot 3} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \\
 ② \quad 45554211 & - \frac{8!}{3 \cdot 2} = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = \\
 ③ \quad 45558111 & - \frac{8!}{3 \cdot 3} = 80 \cdot 54
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 54 \\
 80 \\
 \hline
 4320
 \end{array}$$

4320 возможных комбинаций ~~только~~ в 1-ой и 3-й сегментах

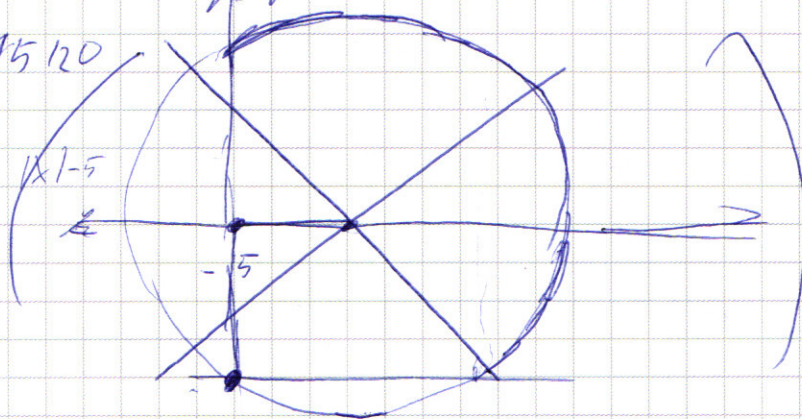
$$\frac{8!}{5 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 = 20 \cdot 6 \cdot 54 = 26 \cdot 54 =$$

$$= 6480$$

Общее количество комбинаций: $4320 + 6480 =$

$$= 8640 + 6480 = 15120$$

Ответ: 15120



1/4

$$6x^4 - x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | +1 \geq 0 \quad ; \quad \text{при } x+1 > 0$$

$$6x^4 - 5x^2 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(6x^2 - 2x - 2) \geq 0$$

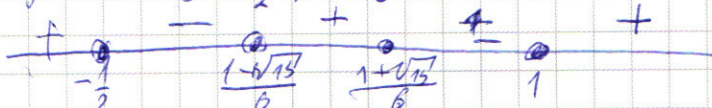
$$6x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6})(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}) \geq 0$$

Нули: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{6}$; все нули больше -1



$$x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{6}]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{b}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b}$$

$$y = \frac{\frac{1}{3} - 2(-3)x}{b} =$$

$$= \frac{1}{12} + x$$

$$y = \frac{1 - 3 \cdot 10x}{-3 \cdot 10}$$

$$R_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$R_2 = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2(x-2)$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9$$

$$= 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{8} (1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{6}) - 8 - 8\sqrt{13} - 125 =$$

$$= 5 + 2\sqrt{13} - 8 + 25 - 8\sqrt{13} = 22 - 6\sqrt{13}$$

$$k = -\frac{3a-b}{3} = \frac{b-3a}{3}$$

$$b = \frac{a}{6}$$

$$k = \frac{3}{(b-a)}$$

$$b = \frac{1}{(a-b)b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{(a-b)b}$$

$$a^2 - ab = 1; \quad b-a=3$$

$$a^2 - 3a - a^2 = 1 \quad b = 3+a$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{8}{3}$$

$$(x-1)$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{10}{3}$$

$$\frac{3}{b-a} = \frac{b-a}{3}$$

$$(b-a)^2 = 9$$

$$b-a = \pm 3$$

$$\frac{6-5-4+1+1}{1}$$

$$6+5-4-2+1$$

$$b-a = -3$$

$$b = a-3$$

$$x > -1$$

$$\times 36$$

$$\frac{13}{108}$$

$$\frac{36}{108}$$

$$\frac{36}{108}$$

$$\frac{36}{108}$$

$$(20x)^2 = 400 \cdot 80 \cdot 4 = 128000$$

$$414 - 468 > 0$$

7000	2
3600	2
1750	2
845	5
175	5
35	5
2	4

2. -2.5 5 5.4

5354 222 1

6554 42 11

5557.08111

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 9 \\ 8! \\ \hline 6 \\ 8! \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 1$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(30+6)^2 - 900 + 360 + 36 = 1296$$

$$16 \cdot 3 - 40 + 16 - 4 + 2$$

$$6x^2 + 5x + 4x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{16} - \frac{5}{8} + (1 - 1 + 1)$$

$$\frac{6}{81} - \frac{5}{24} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 1 -$$

$$6 - 15 + 36 - 54$$

G-81-

