МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1. \end{cases}$$

заметим, что оба уравнения задают прямые. 2 Прямые могут иметь бесконечно много общих решений только если они совпадают.

Тогда прямые не могут быть параллельны Ox: $(a+b)=0$ - в первом уравнении, но тогда во втором $4bx=1$ - параллельно O_y.

И не могут ~~бе~~ быть параллельны Oy: $12\neq0$.

~~в таке~~

Если прямые не параллельны осям:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3(a+b)x-a}{-12} \\ y=\dfrac{4bx-1}{-(a+b)b} \end{cases}$$

чтобы совпадали:

$$\begin{cases} \dfrac{\cancel{3}(a+b)}{+\cancel{12}_{4}}=\dfrac{4\cancel{b}}{+(a+b)\cancel{b}} \\ \dfrac{+a}{+12}=\dfrac{+1}{+(a+b)b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=16 \\ (a+b)ab=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \\ (a+b)ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

отсюда следуют следующие решение:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2+\sqrt{7} \\ b=-2-\sqrt{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2-\sqrt{7} \\ b=-2+\sqrt{7}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2+\sqrt{7} \\ b=-2-\sqrt{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2-\sqrt{7} \\ b=-2+\sqrt{7}. \end{cases}$

№3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+2)(x+3)$$

$x=-3$ не является корнем, т.к. $\sqrt{x^3-x+10}$ – не опред.

$$\sqrt{x^3-x+10}=(x+2). \quad |\uparrow^2$$

$$\begin{cases} x^3-x+10=x^2+4x+4 \\ x \geq -2. \end{cases}$$

$$x^3-x^2-5x+6=0.$$

$x=2$ – корень.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ x^2-5x & \\ \underline{x^2-2x} & \\ -3x+6 & \\ \underline{-3x+6} & \\ 0. & \end{array}$$

x^2+x-3: $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ – п.к., т.к. <-2.

Ответ: $x=2$; $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

возможные наборы цифр из которых состоит 8-ми значное число:

I: 2 2 2 5 5 7 1 1

II: 4 2 5 5 7 1 1 1

III: 8 5 5 7 1 1 1 1

количество вариантов для I-го:

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

без учета повторений

повтор двоек, повтор пятёрок, повтор единиц

для II-го: $\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 2 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$

для III-го: $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 0{,}5 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$

всего вариантов: I + II + III $= 3{,}5\,(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) = 5880$

Ответ: 5880 вариантов.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

рассмотрим 2 случая:

$x\geq 1$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

при $x\geq 1$ $2x^2\geq 2x$. $\quad 4x^2=2x^2+2x^2$

$2x^4+2x^2 \vee 3x^3$

$2x^2-3x+2 \vee 0$.

$D<0 \Rightarrow$ значение $>0 \Rightarrow 2x^4+2x^2>3x^3$

$2x^4+2x^2-3x^3+\cancel{4}2x^2-2x+1 \vee 0$

$2x^2\geq 2x$

$2x^4+2x^2>3x^3$

$\Rightarrow 2x^4+2x^2-3x^3+2x^2-2x+1>0$

$x<1$.

$2x^4\cancel{-x^3+4x}+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$.

$2x^4-x^3+4x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

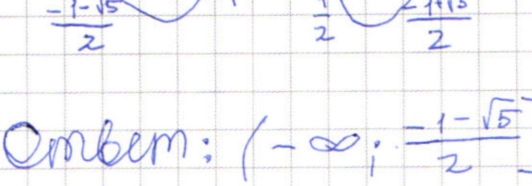
$x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)-(2x-1)\geq 0$.

$(2x-1)(x^3+2x^2-1)\geq 0$.

x^3+2x^2-1 : корни — $x_1=-1<1$

$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$

$x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<1$



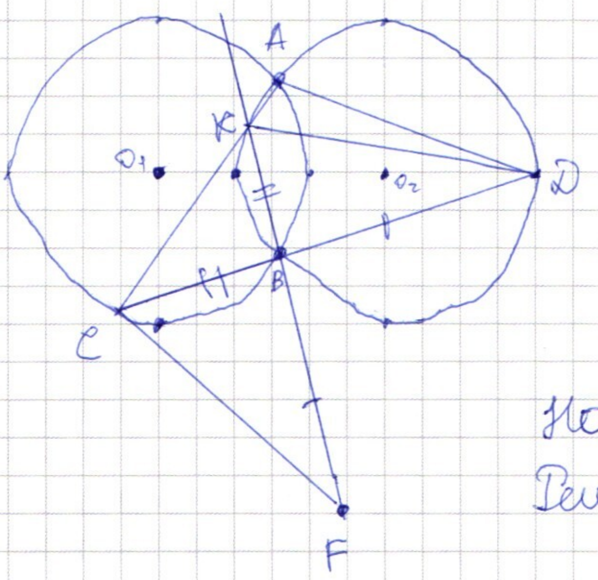
Ответ: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Дано: $\omega_1(O_1; 9)$ $\omega_2(O_2; 9)$

$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B.$

$C \in \omega_1$ $D \in \omega_2$ $B \in CD$.

$\angle CAD = 90°$

$BF \perp CD$ $BF = BD$

Найти: CF.

Решение: пусть BF пересекает AC в т. K

$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = 90° \\ \angle KBD = 90°\end{array}\right| \Rightarrow ADBK$ - вписанный $\Rightarrow K \in \omega_2$, т.к. $A, B, D \in \omega_2$.

$\angle CKB = 180 - \angle AKB = \angle ADB$ (из вписанности).

$\angle ACB = \angle ADB$ (опираются на одну дугу в одинаковых окружностях)

$\angle ACB = \angle CKB \Rightarrow BC = BK$

$\left.\begin{array}{l}BC = BK \\ BF = BD \\ \angle CBF = \angle KBD = 90°\end{array}\right| \Rightarrow \triangle CBF = \triangle KBD \Rightarrow CF = KD$.

$\left.\begin{array}{l}K \in \omega_2,\ D \in \omega_2 \\ \angle KAD = 90°\end{array}\right| \Rightarrow KD$ - диаметр $\Rightarrow KD = 2 \cdot 9 = 18$.

$CF = KD = 18$.

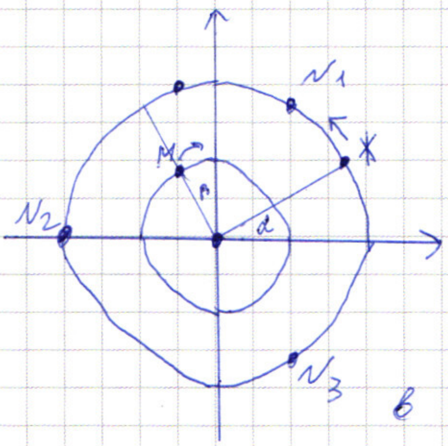
Ответ: $CF = 18$.

№1 (ω – угловая скорость)

радиус муравья: $\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$

радиус жука: $\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$.

$\frac{R_м}{R_ж}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_м}{\omega_ж}=\frac{2}{1}$. Наименьшее расстояние, когда Ж, М и О – на одной прямой.



$\cancel{\sin\alpha=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$tg\,\alpha=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30^\circ$

$tg\,\beta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta=30^\circ$.

в начальный момент между прямыми, соединяющими насекомых и центр – 90°.

т.к. $\frac{\omega_м}{\omega_ж}=\frac{2}{1}$, то на момент ~~встречи~~ наименьшего расстояния жук проползет ещё $90^\circ\cdot\frac{1}{3}=30^\circ$ $\alpha=60^\circ$.

~~М(~~ $N_1(2;2\sqrt{3})$

следующая встреча произойдет, когда вместе они пройдут $360^\circ \Rightarrow$ жук – 120°.

~~M_2(~~ $N_2(-4;0)$

3 встреча аналогично

~~M_3(~~ $N_3(2;-2\sqrt{3})$

далее всё зациклится, жук попадет в N_1

ответ: $(2;2\sqrt{3})$; $(-4;0)$; $(2;-2\sqrt{3})$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

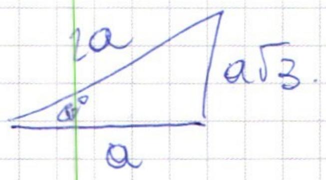
№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$a+b \neq 0$

$b \neq 0$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$$



$$x = \frac{1-(a+b)by}{4b}$$

$$\frac{3(a+b)(1-(a+b)by)}{4b} + 12y = a$$

$$3(a+b) - 3(a+b)^2by + 48by = 4ab$$

$$y = \frac{3a+3b-4ab}{3(a+b)^2b - 48b}$$

90°

90°

150°

75°

(x; y)

(0; 2)

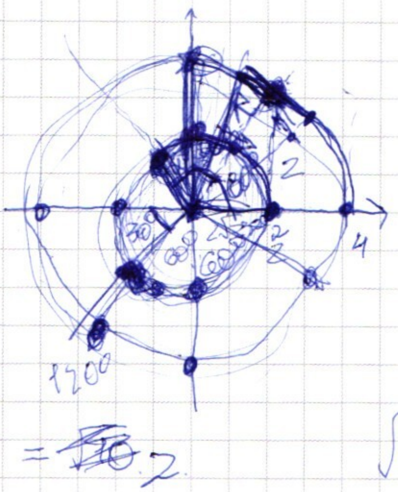
$(-1; \sqrt{3})$

$\sin 90 = 1$

(x)

(4)

$\frac{v}{R}$



$90 + \sin\frac{5}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}$

360

$\sin\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2\pi R = \frac{8\pi}{v}$

$\frac{4\pi}{v}$

$= 2$

$\sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4$

x2

$(a+b)=0$

$y = \frac{a}{12}$

$x = \frac{1}{4b}$

$y = \frac{3(a+b)x - a}{12}$

$y = \frac{4bx - 1}{(a+b)b}$

$$\begin{cases} \frac{\cancel{3}(a+b)}{\cancel{12}_4} = \frac{4b}{(a+b)\cancel{b}} \\ \frac{+a}{12} = +\frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

$16 = (a+b)^2$ $\quad a+b=4 \quad a+b=-4$

$12 = (a+b)\cancel{4}ab$

$ab = \cancel{4}3 \quad ab = -3$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} ab=-3 \\ a+b=\cancel{3}-4 \end{cases} \end{array} \right.$$

$a=1 \quad b=3$

$b = \cancel{4}4-a \quad 4a - a^2 = 3$

$a=$

$a^2 - 4a + 3 = 0$

$4-7=$

$a=3 \quad a=1$

$b=1 \quad b=3$

$a = -(b+4)$

$-b^2 - 4b + 3 = 0$

$b^2 + 4b - 3 = 0$

$b_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4 \cdot 3}}{\cancel{2}} = -2 \pm \sqrt{7}$

$a = -2 \pm \sqrt{7}$

№3

$(x+3)\sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$

$\cancel{(x+3)}\sqrt{x^3 - x + 10} = (x+2)\cancel{(x+3)}$

$\cancel{-27+3+10}$ $\quad -3$ – не корень

$\sqrt{x^3 - x + 10} = (x+2) \mid\mid^2$

$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4 \qquad x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$

$\cancel{27 - 9 - 15 + 6}$ $\quad x=3$ – нет

$8 - 4 - 10 + 6 \quad x=2$ – да

№3

$25 - 24 = 1$

$\frac{-5 \pm 1}{2} = -$

$x_1 = -2 \quad x_2 = -3$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x - 3 \\ \quad x^2 - 5x & \\ \quad \underline{x^2 - 2x} & \\ \qquad -3x + 6 & \\ \qquad \underline{-3x + 6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 + x - 3 \qquad D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \qquad x=2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overline{abcdefklg}$

1400	2
700	2
350	5
70	2
35	5
7	7
1	1

2 2 2 5 5 7 1 1

4 2 5 5 7 1 1 1

8 5 5 7 1 1 1 1

$$\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot2\cdot2} =$$

$$\frac{8!}{2!\cdot 3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} =$$

$2\cdot(8\cdot7\cdot6\cdot5)$

222

$$\frac{3\cdot2}{3!} = 1.$$

$$\frac{2^3}{3!}$$

2232. 4.

$$\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{3!} = 4.$$

1122
1221
1212
2211
2112
2121

22311.

$$\frac{4!}{2!\cdot2!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4} = 6.$$

$$\frac{8!}{4!\cdot2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot2} = 0,5\cdot(8\cdot7\cdot6\cdot5).$$

~~8 7 6~~ 5 $a+2a+0,5a = 3,5a$

56, 280.

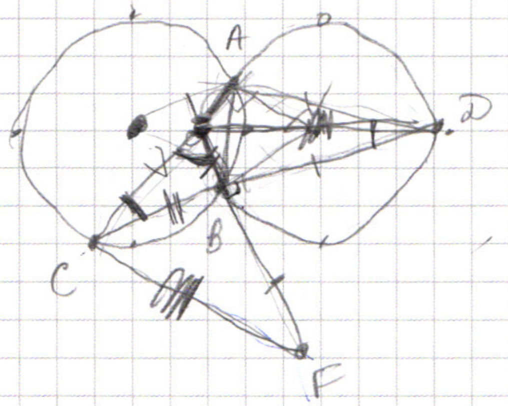
$\times$ 6 = 1680

~~1680~~

1680 $\times$ 3,5 = 8400 + 504 = 58800

5880.

18 ✓



$x \geq 1$ — всегда.

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$

$x \geq 1$

$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0.$

~~$2x^3(x-1) - x^2(x-1)$~~

~~$2x^4 - 2x^3 - x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x + x^2 + 1 \geq 0$~~

$2x^4 \quad 3x^3$

$2x \quad 3$

$x \geq 1{,}5.$

$2x^4 + 2x^2 \quad 3x^3$

$2x^2 + 2 \vee 3x.$

$2x^2 - 3x + 2 \vee 0.$

$9 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

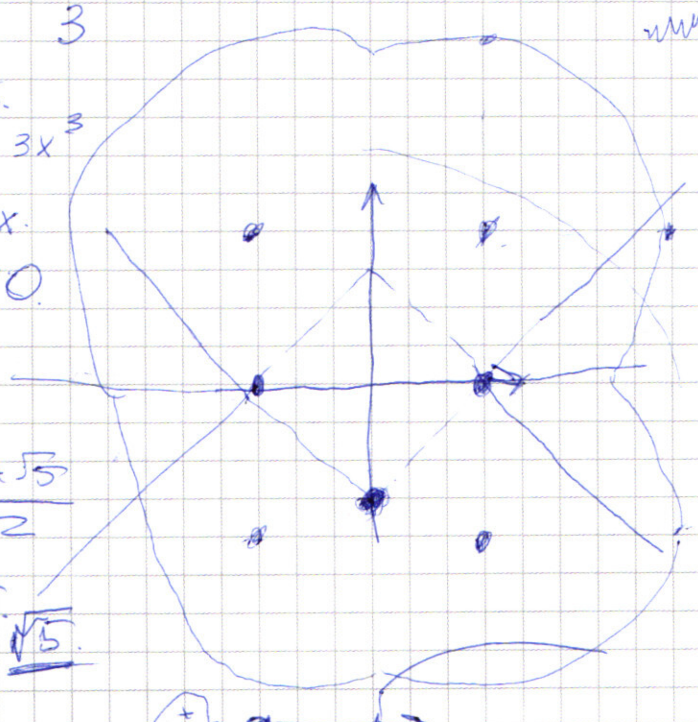
$x \leq 1$

$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0.$

$2x^4 - \cancel{x^3} + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0.$

$x^3(2x-1) + 2x^2(2x-1) - (2x-1) \geq 0.$

$(2x-1)(x^3 + 2x^2 - 1) \geq 0.$



$x^3 + 2x^2 - 1.$

$x^3 + 2x^2 - 1 \,|\, x+1$

$x^3 + x^2 \qquad x^2 + x - 1.$

$x^2 + 0x$

$x^2 + x$

$-x - 1$

$x^2 + x - 1$

$D = 5.$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$

$\frac{1}{2} \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{2}$

$2 \quad \sqrt{5}.$

$2 \vee \sqrt{5}.$