

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$1400 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2}_{6 \text{ цифр}} \Rightarrow$$

Остатки же это единицы.

1, 2, 2, 2, 5, 5, 7 - цифры из которых надо

составить 8-значное число. Всего 6 вариантов.

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$1680 \Rightarrow$$

Ответ: 1680 чисел.

№3.

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^3 + 5x + 6.$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2) \Rightarrow x = -3 \text{ - корень}$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x+2. \quad \text{т.к. } x^3 - x + 10 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^3 - x + 10 = (x+2)^2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4,$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + x - 3) = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

Ответ:

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

VD

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$4bx + (a+b)by = 1$$

Бесконечно много решений $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ 12 = (a+b)b \end{cases}$$

$$b \neq 0$$

$$12 = (a+b)b$$

$$\frac{(a+b)}{4} = \frac{4}{a+b}$$

$$(a+b)^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$|a+b| = 4 \Rightarrow$$

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$a = -1$$

$$b = -3$$

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$a = -2$$

$$b = -2$$

$$a = 3$$

$$b = 1$$

$$a = -3$$

$$b = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:

$$a=1 \quad b=-3$$

$$a=-2 \quad b=-2 \quad - \text{ не подходит } \Rightarrow$$

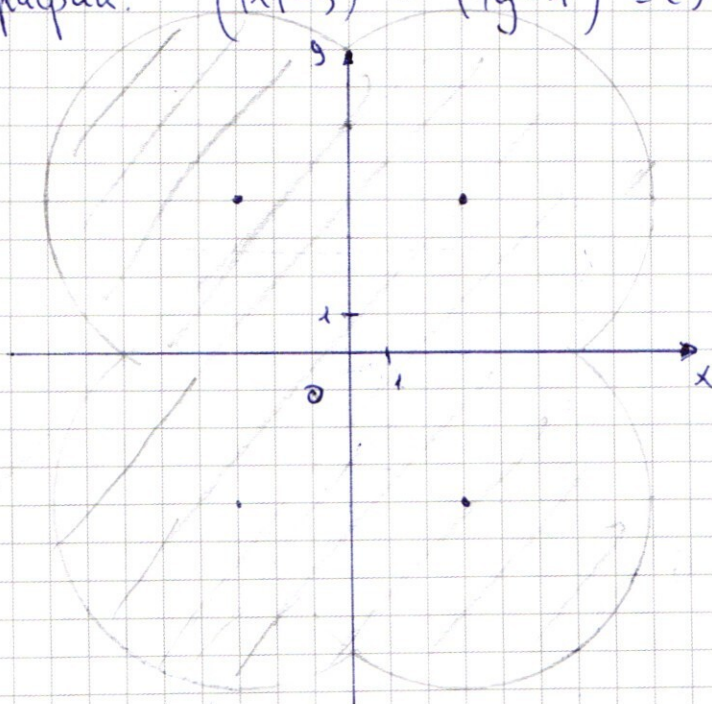
$$a=-3 \quad b=-1$$

Ответ: $(1; 3) \quad (2; 2) \quad (3; 1)$

№ 7

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

эскиз. $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$ - и окружности с $R=5$.



- решение $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$.

эпюра |x теперь рассмотри эпюра

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

Заметим

если

$$x-3-y > 0 \Rightarrow$$

$$x-3+y > 0$$

при $x \geq 3+y$

можно раскрыть так.

$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$x \leq 6 \Rightarrow$$

$$6 \geq 3+y \Rightarrow$$

$$y \leq 3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$x+y \leq 9$$

при $x-3+y \leq 0$

$$x-3-y \leq 0 \Rightarrow$$

при $x \leq 3-y$

можно

раскрыть так.

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow$$

$$y > 3$$

$$\begin{cases} x \geq 0 & x > 0 \\ y > 3 & y < 3 \end{cases}$$

$$x-y > -3$$

при $3-y \leq x < 3+y$

$$-x+3-y + x-3+y \leq 6$$

$$0 \leq 6$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

x - продолжение

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$$R = g$$

A и B - т. пересечения

B ∈ CD

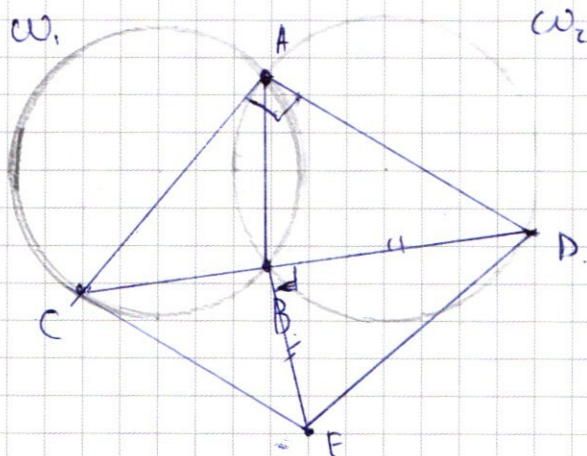
$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF \perp CD$$

$$BF = BD$$

CF = ?

Проведем AB



$$\angle ACB = \angle ADB \quad \text{т.к.} \quad (\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow AB \text{ — хорда}$$

равны углы $\Rightarrow$ углы опирающиеся на эти

углы равны) $\Rightarrow$

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \quad \text{т.к.} \quad \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\triangle CAD - \text{равнобедр.} \Rightarrow AC = AD \Rightarrow$$

$$\text{углы } \angle ABC = \angle ABD, \quad \text{т.к.} \quad AD = AC \Rightarrow \text{и } \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow$$

AD и AC стягивают одинаковые дуги $\Rightarrow$

$$\angle ABC = \angle ABD = 45^\circ \quad \text{т.к.} \quad \text{они смежные} \Rightarrow$$

AB — высота, медиана $\Rightarrow$

$$CB = BD \text{ и } \Rightarrow CB = BF \Rightarrow$$

BF — высота и медиана в треугольнике BDF $\Rightarrow$

$$\triangle DFC - \text{равнобедр.} \Rightarrow BF = FD = CF.$$

$$\angle ABD = 45^\circ \text{ и } \text{звезда вписана в } \omega_2 \Rightarrow$$

AD - диаметр $\Rightarrow$

$$AD = 18 \text{ см} \Rightarrow$$

$\square$ $BD = AB$ (т.к. высоты проведенные в равнобедренном треугольнике равны $\frac{1}{2}$ гипотенузы) $\Rightarrow$

$$AB = BF \Rightarrow$$

$\triangle ADFC$ - ромб. т.к. диагонали AC и DF перпендикулярны и делят друг друга пополам $\Rightarrow$

$$AD = CF \Rightarrow$$

$$CF = 18 \text{ см.}$$

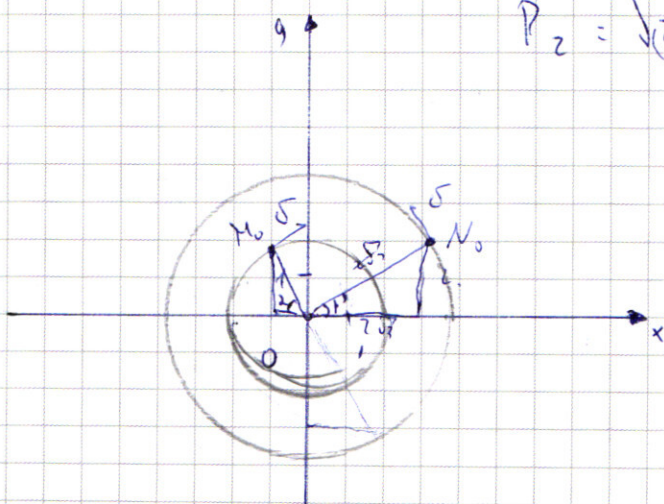
Отсюда: $CF = 18 \text{ см.}$

центр $(0; 0) \Rightarrow$

$\sim 1.$

$$R_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$R_2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$



$$r_1 = r_2$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega_1 \cdot 2 = \omega_2 \cdot 4$$

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

$$\tan 2 = \sqrt{3} \Rightarrow 2 = 60^\circ$$

$$180^\circ - 2 = 120^\circ \quad \angle M_0 O X = 120^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 30^\circ \Rightarrow \angle N_0 O X = 30^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$120^\circ - \omega_1 t = 30^\circ + \omega_2 t$$

$$90^\circ = \omega_1 t + \omega_2 t$$

$$90^\circ = 3\omega_2 t \Rightarrow$$

$$\omega_2 t = 30^\circ \Rightarrow \text{хуи} \text{ сдвинул} \text{ на} \text{ тридцать градусов} \Rightarrow$$

$$\angle \beta = 60^\circ \Rightarrow$$

$$x_* = \sin 30^\circ \cdot 4 = 2$$

$$y_* = \cos 30^\circ \cdot 4 = 2\sqrt{3}$$

$$(2; 2\sqrt{3}) - 1 \text{ координаты} \Rightarrow$$

хуи поворачивает 120° и муравей поворачивает 240° , и его угловая скорость в 6 раз больше $\Rightarrow$

$$\beta = 180^\circ \Rightarrow$$

$$x_* = -4$$

$$y_* = 0$$

$$(-4; 0) - 2 \text{ координаты.}$$

Опять хуи поворачивает 120° и муравей $240^\circ \Rightarrow$

$$x_* = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$x_* = 2 = 4 \cdot \sin 30^\circ$$

$$y_* = -2\sqrt{3} = 4 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot \cos$$

$$(2; -2\sqrt{3}) - \text{такое} \text{ тогда.}$$

далее он пройдет еще 120° и
окажется в точке первой вершины $\Rightarrow$
всего 3 координат имеет верш.

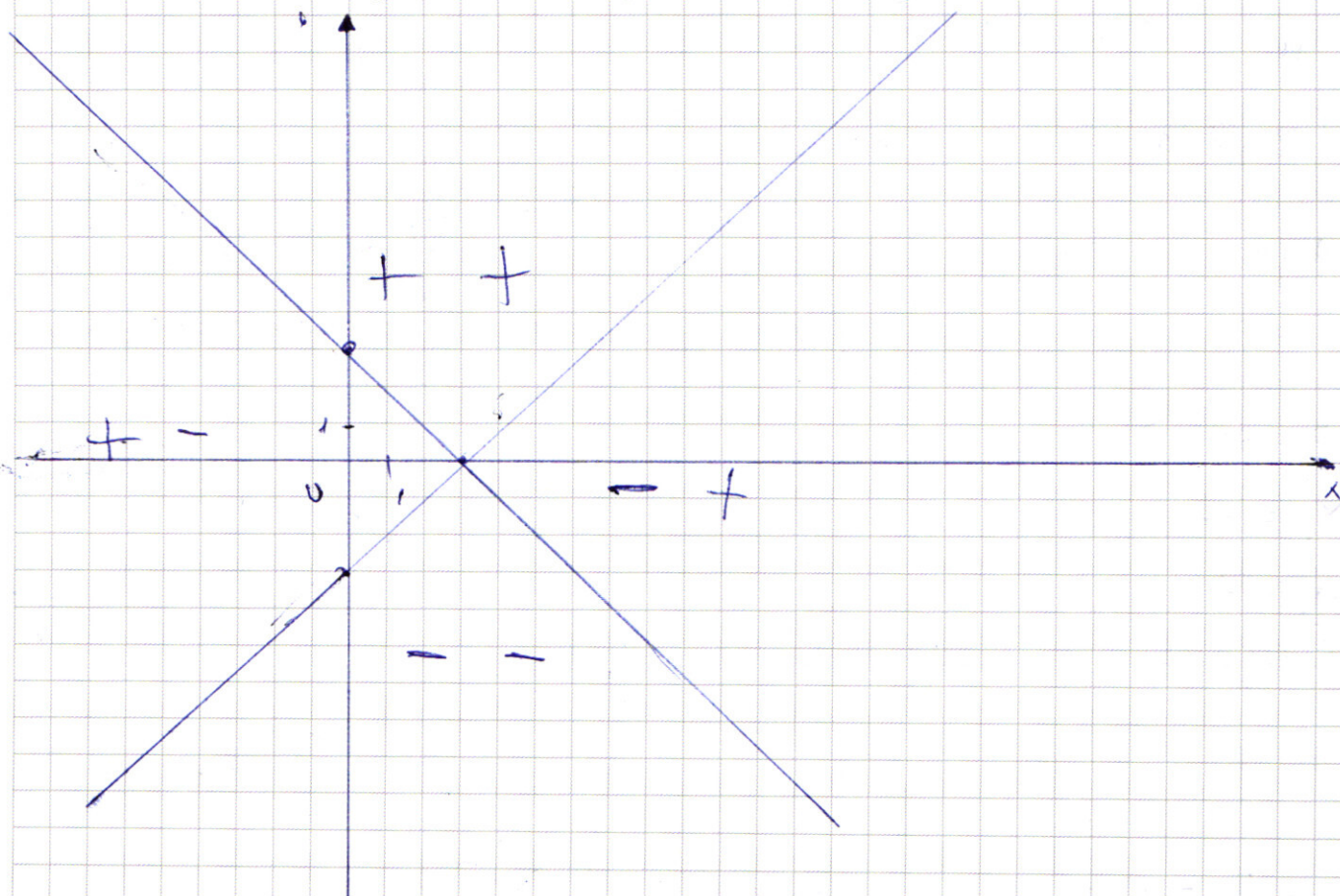
Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$; $(-4; 0)$; $(2; -2\sqrt{3})$.

$\sim 7^*$ (продолжение)

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| = 6$$

$$\mathbb{R} \quad 3 = x-y \quad 3 = x+y.$$



$$x \in (-\infty; 3) \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$x-3-y = x+3+y = 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = -3 \text{ — подходит}$$

$$0 = 6 \text{ — не подходит}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad y \in (0; +\infty)$$

$$x - y - 3 + x + y - 3 = 6$$

$$2x = 12 \quad y \in \mathbb{R}$$

$$x = 6 \text{ — подходит}$$

$$x \in [3; +\infty) \quad y \in \mathbb{R}$$

$$0 = 6 \text{ — не подходит}$$

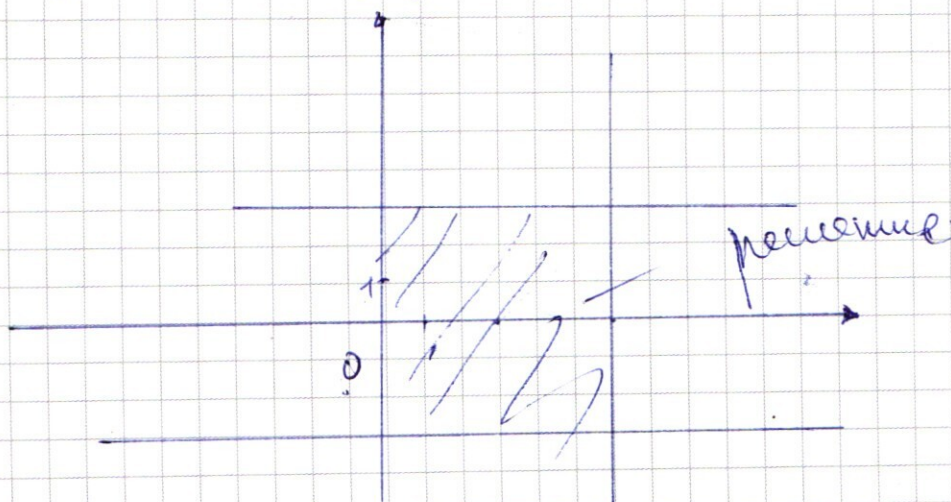
$$-x + 3 + y + x - 3 + y = 6$$

$$y = 3 \text{ — подходит}$$

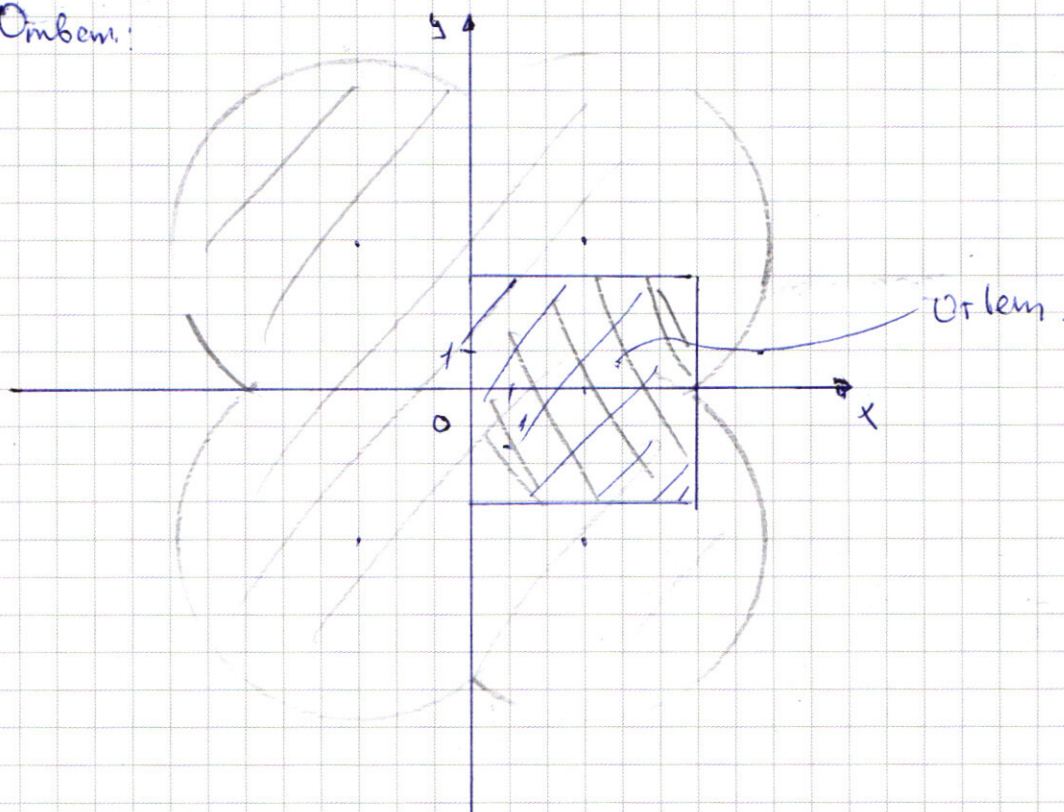
$$x \in \mathbb{R} \quad y \in (-\infty; 0)$$

$$-x + 3 + y - x + 3 - y = 6$$

$$x = 0 \text{ — подходит} \Rightarrow$$



Омбсн:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & -12x + 12y = -1 \\ 4bx + (a+b)by = 1 & -12x + 12y = 1 \end{cases}$$

$$4bx - 12y + (a+b)by - 3(a+b)x = 1 - a$$

$$4(bx - 3y) + (a+b)(by - 3x) = 1 - a$$

$$4(bx - 3y) + (a+b)(by - 3x) + (a-1) = 0$$

$$3(a+b) = 4b$$

$$(a+b)b = 12$$

$$3(a+b) = 4b$$

$$12 = (a+b)(b)$$

$$12x + 12y = 2$$

$$8x + 8y = 1$$

$$b \neq 0$$

$$\frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)}{4}$$

$$a+b = 4$$

$$1 + 3$$

$$2 + 2$$



черновик

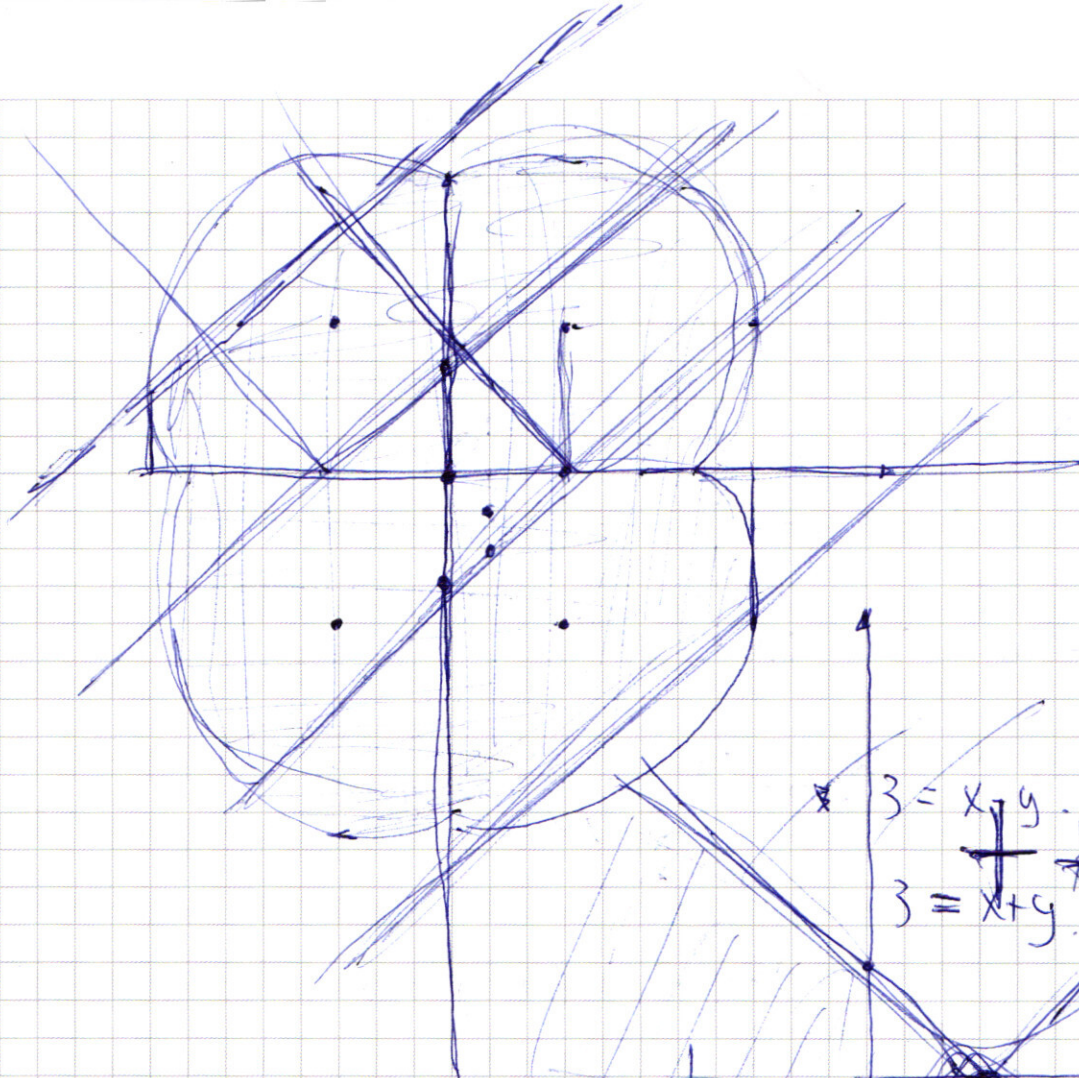


чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x+y=3$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y \geq 0 \Rightarrow$$

$$x-3+y \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq 3+y$$

$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$x \leq 6 \Rightarrow$$

$$y \leq 3, \quad x \leq 6$$

$$x+y \leq 9, \quad y < 3$$

$$x+y < 9$$

$$x < 3+y \Rightarrow$$

$$6 \geq 3+y$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$3+y > 0$$

$$y < 3$$

$$x+y > -3$$

$$x-3-y > 0 \Rightarrow$$

$$x-3+y > 0$$

$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$3 = x+y$$

$$3 = x+y$$

$$x-3-y > 0$$

$$x > 3+y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 + y^2 = 4$ 210
 $x_1^2 + y_1^2 = 16$ 1680.
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1}$
 $\tan \alpha = \sqrt{3}$
 $\alpha = 60^\circ$
 $x^2 + y^2 - x_1^2 - y_1^2 = 4$
 112
 121
 211
 11225
 41
 2171
 1122
 1212
 2211
 2121
 1221 2112

$0 + 2^2 = 1$
 $0 + 2^2 = 4$
 $4 \cdot 3 = 12 + 4 = 16$
 4
 $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ 1400
 $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ 14 \cdot 100
 $\omega_1 = 2\omega_2$ 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2
 $\omega_1 \cdot 2 = \omega_2 \cdot 4$
 $\omega_1 = 2\omega_2$ 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2
 $\omega_1 = 2\omega_2$
 $60 + \omega_1 t = 60 + \omega_2 t$ 7!
 $2! \cdot 2! \cdot 2! =$
 $360^\circ - \omega_1 t = 60 + \omega_2 t$
 $300^\circ = 3\omega_2 t$
 $100 \omega_2 t$
 $30 = \omega_2 t$
 $\frac{31}{21} = \frac{6}{1} = 3$
 $60 - \omega_1 t = 300 + \omega_2 t$
 $-240 = 3\omega_2 t$
 $-80 = \omega_2 t$
 $\frac{51}{21} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 7} = 5$
 $260 + \omega_1 t = 260 - \omega_2 t$
 $2 \cdot 120 - \omega_1 t = -100^\circ + \omega_2 t$
 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$
 $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$
 300

$$\begin{cases} 3ax + 3bx + 12y = a \\ 4bx + abg + b^2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + 2x^3 + 2x^2 \hline -5x^3 - x^2 + x \\ -5x^3 - 5x^2 \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ 2x^2 - 5x \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x + 1 \geq 0 \\ 2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x \geq 1 \quad 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \hline 3x^3 - x^2 + x \\ 3x^3 + 3x^2 + 3x \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x + 1 \\ 2x^2 + 3x \hline \end{array}$$

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$(x^2 + bx + c) + (2x^2 + bx + c)$$

$$2b + b = -3$$

$$2x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \hline x^3 - 3x + 1 \\ x^2 \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2c_2 + 2c_1 + b_1 = 1 \\ bc_2 + b_1c \end{array}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$2x^4 - 2x^3 +$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x^3 - 2x^2 + 2x + 8 - 4 - 10 + 6 =$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \quad + x^2 + 2x + 1$$

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$2x^2 - 2x^3 + 2x^2 - x^3 + x^2 - x - 2x^2 + 2x + 2$$

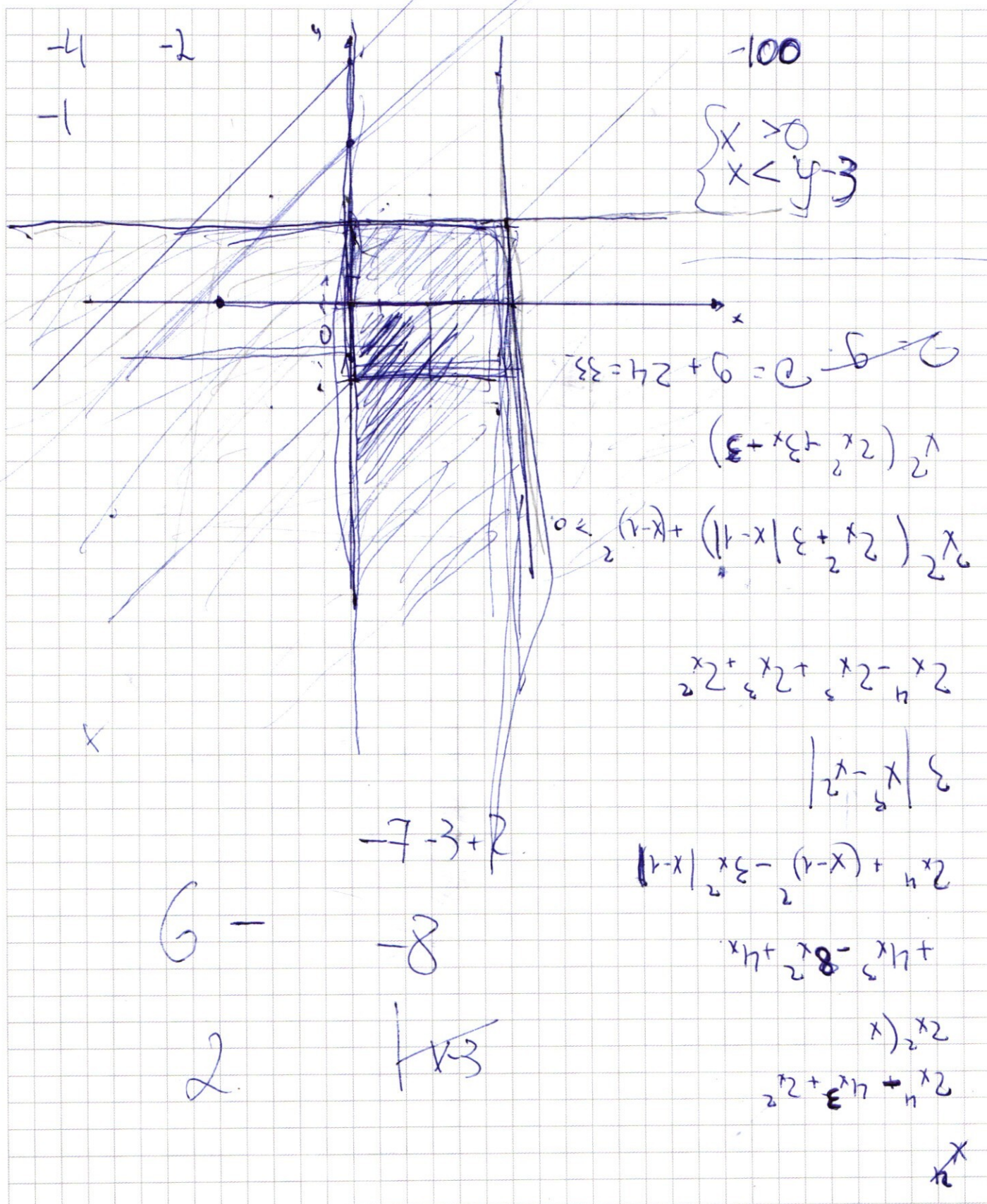
$$(x-2)(x^2 + x - 3) = 0$$

$$2x^2(x^2 + x + 1)$$

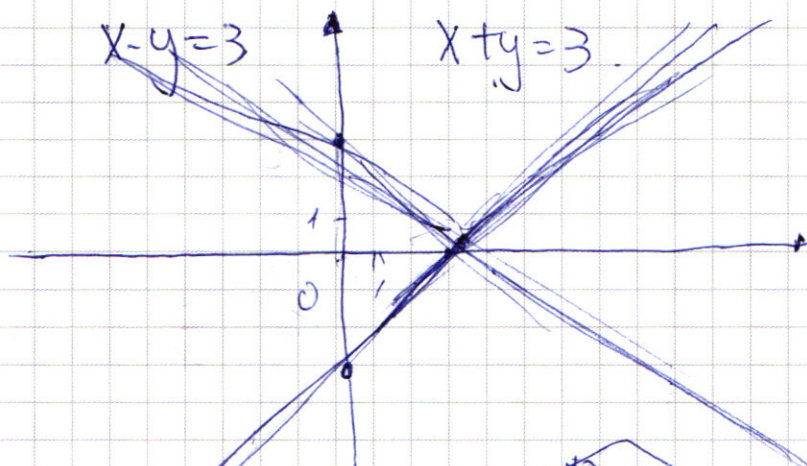
$$\Rightarrow 0 = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 \hline -x^3 - x^2 + x \\ -x^3 - x^2 - x \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ 2x^2 - x \hline \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x-3-y| + |x-3+y| = 6$$



$|x|$

$$|x-3-y| = 0$$

