

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

$$00000000$$

- 1) 3 двойки, 3 пятёрки, семёрка, единица
- 2) 1 двойка, 1 четвёрка, 3 пятёрки, одна семёрка, 2 единицы
- 3) 1 восьмёрка, 3 пятёрки, 1 семёрка, 3 единицы

4)

5)

- 6) 7 двойки, 1 четвёрка, 2 пятёрки

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 56 \cdot 20 \cdot 3 = 7180 \cdot 3 =$$

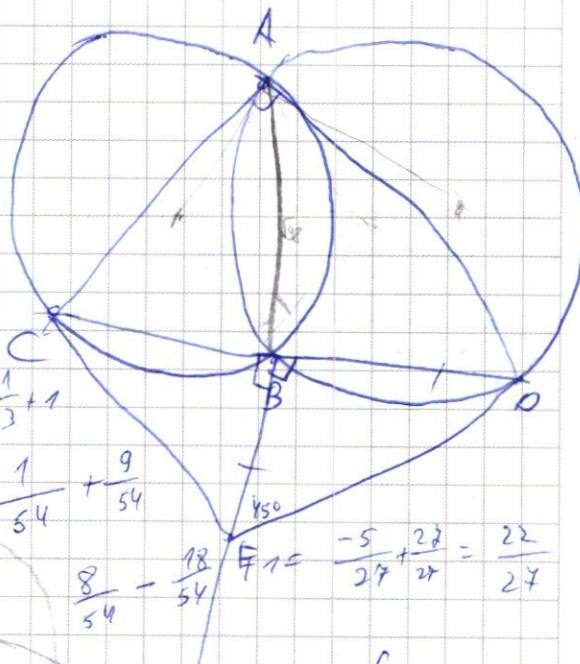
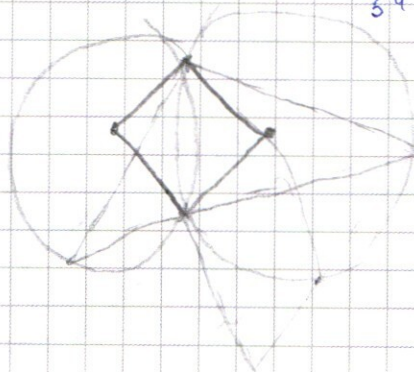
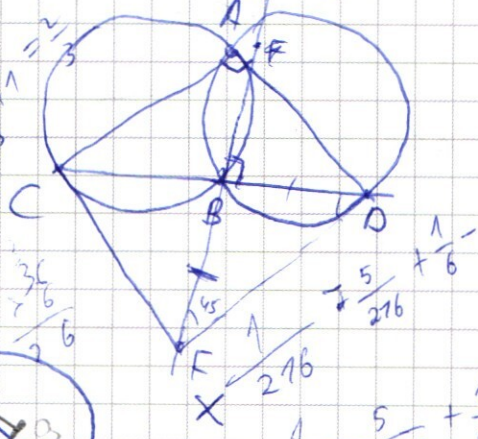
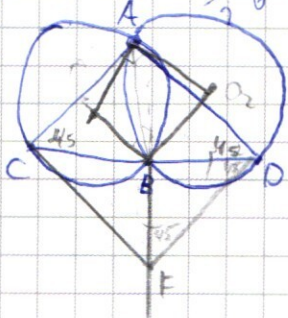
$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6} = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\frac{8!}{6 \cdot 6} =$$

$$\frac{7180 \cdot 5}{5} = 5900$$

5900 - ответ

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{18} \times \frac{6}{24} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$



$$\frac{8}{54} - \frac{18}{54} = \frac{-5 + 28}{27} = \frac{23}{27}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{8} + \frac{6}{4} = \frac{2}{24} - \frac{5}{24} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$6x + 6y = \frac{3 + \sqrt{72}}{2}$$

$$x + y = \frac{3 + \sqrt{72}}{12}$$

$$\frac{-9 + 3\sqrt{72}}{2} x + \frac{-78 + 6\sqrt{72}}{2} y = 1$$

$$(-9 + 3\sqrt{72})x + (-78 + 6\sqrt{72})y = 2$$

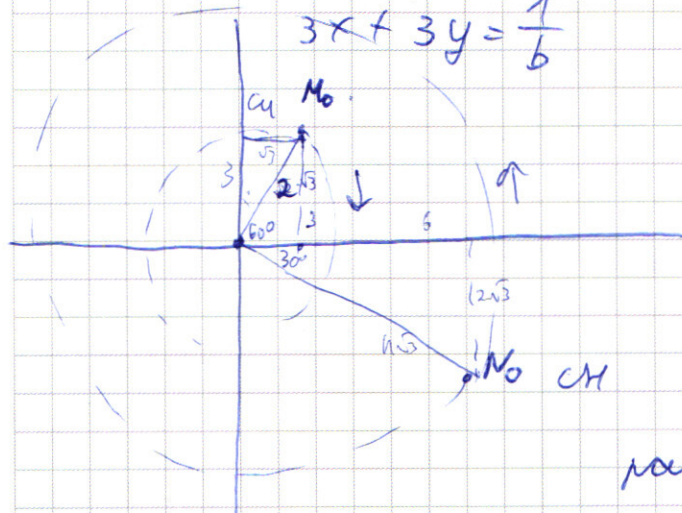
$\frac{3\sqrt{72}}{753}$

$$(153 - 27\sqrt{72})x + (306 - 54 - 78\sqrt{72})y = 2(3 + \sqrt{72})$$

$$72x + 6y = 0$$

$$6x + 6y = 0$$

$$3x + 3y = \frac{1}{b}$$



$$\frac{2}{b} = a \quad 2 = ab \quad \frac{2\sqrt{72}}{3} \quad \frac{4\sqrt{72}}{12}$$

$$\text{сфера: } x_a^2 + y_a^2 = 12$$

$$\text{сфера: } x_b^2 + y_b^2 = 48$$

$$4x_a^2 + 4y_a^2 = x_b^2 + y_b^2$$

$$\text{расст.} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \geq \sqrt{(x_b - x_a)^2}$$

$$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + k^2(x_b - x_a)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{72}$$

$$36 + 72$$

$$= x_b - x_a \sqrt{k^2 + 1}$$

$$y_b = kx_b$$

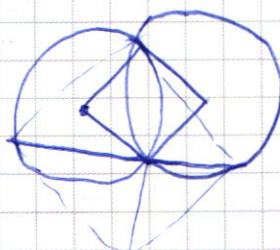
$$y_a = kx_a$$

$$x_a^2 + x_b^2 + y_a^2 + y_b^2 = 60 \geq$$

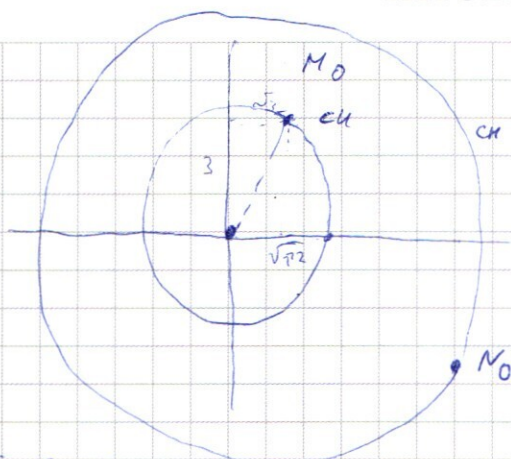
$$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \geq 72$$

$$24 \geq x_a x_b + y_a y_b$$

$$48 \geq 2x_a x_b + 2y_a y_b$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 + y^2 = 12$$

$$x^2 + y^2 = 48$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = a \end{cases}$$

$$y = \frac{a + 2bx - 2ax}{6}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{ab - b^2}$$

$$2ax - 2bx + 6y = a$$

$$3bx + aby - b^2y = a$$

$$\frac{a + 2bx - 2ax}{6} = \frac{1 - 3bx}{ab - b^2}$$

$$(a + 2bx - 2ax)(ab - b^2) = 6 - 18bx$$

$$a^2b - ab^2 + 2ab^2x - 2a^2bx + 2ab^2x - 2b^3x + 18bx - 6 = 0$$

$$ab(a-b) + 2abx(b-a) + 2ab^2x(a-b) + 6(3bx-1) = 0$$

$$(a-b)(ab - 2abx + 2b^2x) + 6(3bx - 1) = 0$$

$$x(2ab^2 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3 + 18b) = ab^2 - a^2b + 6$$

$$2ab^2 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3 + 18b = 0$$

$$ab^2 - a^2b + 6 = 0$$

$$2ab^2 - 2a^2b + 12 = 0$$

$$2ab^2 - 2b^3 + 18b - 12 = 0$$

$$2ab^2 - a^2b - b^3 + 9b = 0$$

$$-a^2b + 2ab^2 + 9b - b^3 = 0$$

$$-a^2b + 2ab^2 + 9b - b^3 = 0$$

$$-a^2b + ab^2 + 6 = 0$$

$$0 = b^2 + 24b$$

$$\frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4 + 24b}}{-2b}$$

$$b^4 + b^3(9-b^2) = 9b^2$$

$$\frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4 + 24b}}{-b} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 24b}}{b}$$

$$\frac{-b^2 + \sqrt{b^2 + 24b}}{-2b} = b - 9$$

$$\sqrt{b^2 + 24b} - b^2 = 78b - b^2$$

$$b^2 + 24b = 78b^2$$

$$b + 24 = 324b$$

$$b^2(b+3) - b(b+3)^2 + 6 = 0$$

$$3b^2 - 6b^2 - 9b + 6 \Rightarrow -b^2 - 3b + 2$$

$$b^2(b-3) - b(b-3)^2 + 6 = 0$$

$$-3b^2 + 6b^2 - 9b + 6$$

$$b^2 - 3b + 2$$

$$\sqrt{x^2 - 16x + 16} > 0$$

$$x^2 - 4x(x-2) > 0$$

$$x \neq 2$$

$$x^3 - 76x + 25 > 0$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$(x+5)(x-2)$$

$$I. x = -5 \quad 0 = 0 \text{ ok.}$$

$$II. x = \dots$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x - 2$$

$$\frac{1}{4}x^3 - 4x + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{1}{4}x^3 + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x^3 + 9 = 0$$

$$-9 + 26\sqrt{9} + 25 > 0$$

$$1 + \sqrt{9} > 0 \text{ ok.}$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 7 > 0$$

$$I. x > -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 7 > 0$$

$$6x^4 - 4x^2 - 5x^3 + 2x + 7 > 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 7 > 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 7) > 0$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$0 \rightarrow -1$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \rightarrow -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$(x-1)(2x+7)(3x^2-x-7) > 0$$

$$-\frac{8 \cdot 6^2}{27 \cdot 9} + \frac{4}{3} + 1$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}$$

$$-\frac{46}{9} + \frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}$$



$$1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}} > 6$$

$$7 + 2\sqrt{3} > 25$$

$$1 - \frac{\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}$$

$$< -\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{3}} > 4$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-76x+25} = x^2+3x-70$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-76x+25} = (x-2)(x+5)$$

I. $x = -5$ — подходит.

II. $x \neq -5$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-76x+25} = x-2 \quad x^3-76x+25 \geq 0$$

$$\frac{1}{4}x^3 - 4x + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0 \Rightarrow x = \left\{3; \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}\right\}$$

1) $x = 3$.

$$x^3 - 76x + 25 = 27 - 48 + 25 = 4 \geq 0 \text{ И.}$$

2) $x = \frac{1-\sqrt{73}}{2}$

$$x^3 - 76x + 25 = \frac{-13\sqrt{73} + 1 - 3\sqrt{73} + 39}{8} - 8 + 8\sqrt{73} + 25 =$$

$$= -2\sqrt{73} + 5 - 8 + 8\sqrt{73} + 25 = 6\sqrt{73} + 22 \geq 0 \text{ И.}$$

3) $x = \frac{1+\sqrt{73}}{2}$

$$x^3 - 76x + 25 = \frac{1 + 3\sqrt{73} + 39 + 73\sqrt{73}}{8} - 8 - 8\sqrt{73} + 25 =$$

$$= 5 - 8 + 25 - 6\sqrt{73} = 22 - 6\sqrt{73} \geq 0, \text{ т.к. } 22 \geq 6\sqrt{73}, \text{ т.к.}$$

4847, 468

Ответ: $x = \{-5; \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; 3\}$

N4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 7 \geq 0$$

I. $x \geq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 7 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 7 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)(2x+1)(3x^2 - x - 1) \geq 0$$

$$D = 1 + \sqrt{72}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}$$

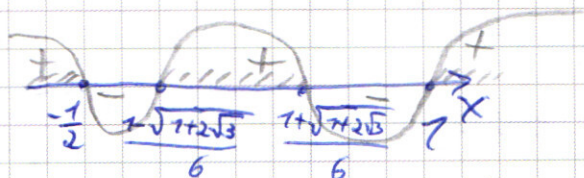
$$\frac{1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} \geq -\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} < 1, \text{ т.к. } \sqrt{1+2\sqrt{3}} < 5,$$

$$\text{т.к. } 2\sqrt{3} < 24, \text{ т.к. } \sqrt{72} < 24.$$

$$\frac{1 - \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} < 1, \text{ т.к. } \frac{1 - \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} < \frac{1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} \text{ и}$$

$$\frac{1 - \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} > -\frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sqrt{1+2\sqrt{3}} < 4, \text{ т.к. } 2\sqrt{3} < 15.$$

Метод интервалов:



$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}; \frac{1+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

~~$$\frac{1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} \geq -1, \text{ т.к. } \sqrt{1+2\sqrt{3}} \leq 7, \text{ т.к. } 2\sqrt{3} \leq 48$$~~

~~$$\frac{1 + \sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6} \text{ Значим } x \in [\frac{1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}; \frac{1+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}] \cup [1; +\infty)$$~~

$$\text{Значит, } x \in [-1; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}; \frac{1+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II. $x < -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^2 + 5x^3 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Заметим, что $6x^4 \geq |5x^3|$, т.к. $6 > 5$; $x^4 \geq |x^3|$, т.к.

$$x^2 \geq |x|, \text{ т.к. } x < -1.$$

Кроме того, $6x^2 \geq |2x|$, т.к. $6 > 2$; $x^2 \geq |x|$, т.к. $x < -1$.

Значит, $6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$ при $x < -1$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}; \frac{1+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

N5

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Значит, число может состоять из:

- 1) 3 двоек, 3 пятёрки, 1 семерки, 1 единица
- 2) 1 двойка, 1 четвёрка, 3 пятёрки, 1 семерка, 2 единицы
- 3) 1 восьмёрка, 3 пятёрки, 1 семерка, 3 единицы.

Других вариантов нет, так как $5^2 > 10$, $2 \cdot 7 > 10$, $5 \cdot 7 > 10$

$$\text{Значит, всего таких чисел } \frac{8!}{3! \cdot 3!} + \frac{8!}{3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$$

$$= 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \cdot 35 \cdot 4 = 1400 \cdot 4 = 5600 (\text{ч.})$$

Ответ: 5600 чисел

№ 2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y = \frac{a - 2ax + 2bx}{6} \\ y = \frac{1 - 3bx}{ab - b^2} \end{cases}$$

$$\frac{a - 2ax + 2bx}{6} = \frac{1 - 3bx}{ab - b^2}$$

I. $b = 0$

$$\begin{cases} 2ax + 6y = a \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Такого не бывает $\Rightarrow b \neq 0$

II. $b = a$

$$\begin{cases} 6y = a \\ 3ax = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{6} \\ x = \frac{1}{3a} \end{cases} \Rightarrow \text{бесконечно много решений}$$

III. $b \neq 0, b \neq a$

$$(a + 2bx - 2ax)(ab - b^2) = 6 - 78bx$$

$$a^2b + 2ab^2x - 2a^2bx - ab^2 - 2b^3x + 2ab^2x = 6 - 78bx$$

$$x(4ab^2 - 2a^2b - 2b^3 + 78b) = 6 + ab^2 - a^2b$$

Заметим, что при фиксированных значениях a и b $A = 4ab^2 - 2a^2b - 2b^3 + 78b$ и $B = 6 + ab^2 - a^2b$ принимают фиксированные значения. $\Rightarrow$ если $A \neq 0$, то x тоже фиксированно, но тогда y принимает не более 1 значения, что следует из системы (*). Тогда $A = 0 \Rightarrow B = 0$.

$$1) 4ab^2 - 2a^2b - 2b^3 + 78b = 0$$

$$2) 6 + ab^2 - a^2b = 0$$

$$3) -a^2b + 2ab^2 + 9b - b^3 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b \neq 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 2\alpha b + 9 - b^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 9 - b^2 \quad b^2 + 9 - b^2 = 9$$

$$\alpha = \frac{-b \pm 3}{-1} = b \pm 3$$

Подставим в равенство 2)

$$\bullet \alpha = b + 3$$

$$6 + b^2(b+3) - b(b+3)^2 = 0$$

$$6 + 3b^2 - 6b^2 - 9b = 0$$

$$-b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ \alpha = \frac{+3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \alpha = b - 3$$

$$6 + b^2(b-3) - b(b-3)^2 = 0$$

$$6 - 3b^2 + 6b^2 - 9b = 0$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$(b-2)(b-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ \alpha=-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b=2 \\ \alpha=-1 \end{cases}$$

Проверка.

$$1) \begin{cases} \alpha = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha - b = 3$$

$$\begin{cases} 6x + 6y = \alpha \\ 3x + 3y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

Система принимает такой вид

$\frac{2}{b} = a$, т.к. $ab = \frac{17-9}{4} = 2 \Rightarrow$ система имеет бесконечно много решений.

2) $\begin{cases} a = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad a-b=3$

$$\begin{cases} 6x+6y=a \\ 3x+3x=\frac{1}{b} \end{cases}$$

система принимает такой вид

$\frac{2}{b} = a$, т.к. $ab = \frac{17-9}{4} = 2 \Rightarrow$ система имеет бесконечно много решений.

3) $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \quad a-b=-3$

$$\begin{cases} 6y-6x=a \\ 3y-3x=-\frac{1}{b} \end{cases}$$

система принимает такой вид

$-\frac{2}{b} = a$, т.к. $ab = -2 \Rightarrow$ бесконечно много решений

4) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \quad a-b=-3$

$$\begin{cases} 6y-6x=a \\ 3y-3x=-\frac{1}{b} \end{cases}$$

система принимает такой вид

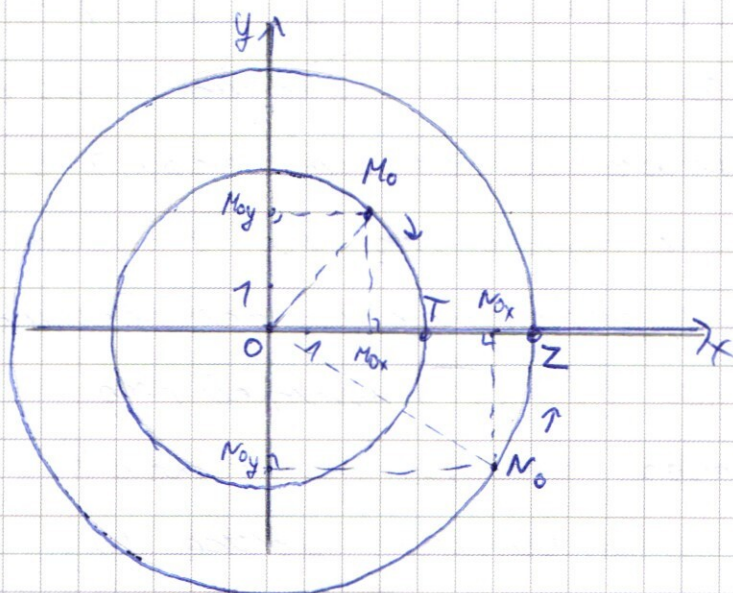
$-\frac{2}{b} = a$, т.к. $ab = -2$

Ответ: $a = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $b = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$; $a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$;

$a = -1$, $b = 2$; $a = -2$, $b = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1



$$\left. \begin{aligned} M_0 M_{0y} &= \sqrt{3} = OM_{0x} \\ OM_{0y} &= 3 = M_{0x} M_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow OM_0 = 2\sqrt{3} \Rightarrow \angle M_0 OM_{0x} = 60^\circ$$

$$OM_{0x} = 6, M_{0x} M_0 = 2\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow OM_0 = \sqrt{48} \Rightarrow \angle M_{0x} OM_0 = 30^\circ$$

Скорости скелера и сеницы равны; значит, сеница пролетит дугу $M_0 T$ за ~~время~~ то же время, что скелер пролетит дугу $M_0 Z$, т.к. $v_{M_0 T} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{12}}{6}$, $v_{M_0 Z} = \frac{2\pi \cdot 2\sqrt{12}}{12}$. Длины дуг равны. (Радиус окружности сеницы равен $\sqrt{12}$, т.к. $x_{M_0}^2 + y_{M_0}^2 = 12$; радиус окружности скелера равен $2\sqrt{12}$, т.к. $x_{M_0}^2 + y_{M_0}^2 = 48$)

Пусть L_M — длина дуги, которую пролетела сеница за время t , L_N — длина дуги, которую пролетел скелер за время t .

Тогда $\frac{2\pi \cdot \sqrt{12}}{360^\circ : \alpha} = \frac{2\pi \cdot 2\sqrt{12}}{360^\circ : \beta}$, где α — угол, под которым видна дуга $M_0 T$ из O , а β — угол, под которым видна дуга $M_0 Z$ из O .

ры видна дуга скелера из O . $\Rightarrow \angle = 2\beta$

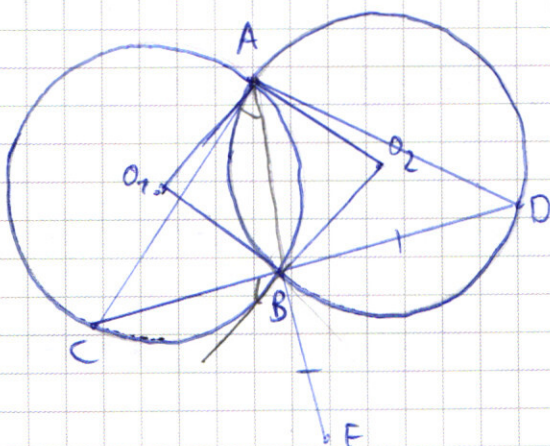
Пусть γ — угол, под которым виден отрезок, образованный пересечением двух лучей, из O .

Тогда расстояние между точками по теореме косинусов равно $\sqrt{OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \gamma}$, где M и N — точки, в которых находятся лучи. Значит, расстояние минимально тогда, когда $\cos \gamma = 1$, то есть $\gamma = 0^\circ$.

Осталось заметить, что первый раз угол γ будет равен 0° , когда обе лучи окажутся на оси абсцисс. Тогда координаты скелера $(0; 2\sqrt{2})$. Второй раз угол γ будет равен 0° , когда скелер окажется в точке, диаметрально противоположной точке N_0 , то есть координаты будут $(-6; 2\sqrt{3})$. Третий раз угол γ будет равен 0° , когда скелер будет в точке с координатами $(-6; -2\sqrt{3})$. В четвертый раз угол γ будет равен 0° , когда скелер окажется в точке, в которой γ впервые стал $0^\circ \Rightarrow$ нулевых положений скелера больше нет.

Ответ: $(0; 2\sqrt{2})$, $(-6; 2\sqrt{3})$, $(-6; -2\sqrt{3})$.

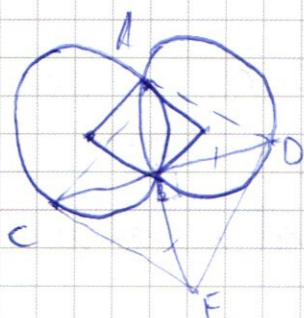
№ 6



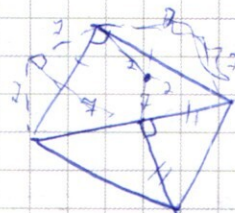
Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей.

Тогда $O_1A = O_1B = O_2B = O_2A = r$, $\triangle AO_1B = \triangle BO_2A$ по трём сторонам $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle BO_2A \Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = 45^\circ \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{CD}{FO} =$$



$\Rightarrow \angle A O_1 B = \angle A O_2 B = 90^\circ \Rightarrow A O_1 B O_2$ - вписанный. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle O_1 A O_2 + \angle O_1 B O_2 = 180^\circ$, но $\angle O_1 A O_2 = \angle O_1 B O_2$, так
 $\Delta O_1 A O_2 = \Delta O_1 B O_2$ по трём сторонам. $\Rightarrow \angle O_1 A O_2 =$
 $= \angle O_1 B O_2$, $A O_1 O_2 B O_2$ - квадрат, $\Delta A C O$ - равнобе-
 ренный прямоугольный.

~~Заметим, что $CF^2 = FO^2 + CB^2 - BO^2 = CB^2 - BF^2$~~
 ~~$= CF^2 \Rightarrow$~~ $CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$

Заметим, что $O_1 B$ - касательная к окружности
 с центром O_2 ; $O_1 A$

$O_2 A$ и $O_2 B$ - касательные к окружности с
 центром O_1 , так как $\angle O_1 B A = \angle B D A = 45^\circ$ (для
 остальных - аналогично).