

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Давайте рассмотрим из каких ~~чисел~~^{цифр} может состоять число:

1	1	2	2	2	5	5	7
1	1	1	4	2	5	5	7
1	1	1	1	8	5	5	7

Заметим, что больше набрав быть не может, т.е. мы все набранные цифры получали из 120 путей перемножения в нем нескольких цифр по величине перемножения должно получаться цифра

Заметим также, что умножать на 1 не имеет смысла, а если на умножим 5 на 2, то получим уже цифру $\Rightarrow$ все числа восьмизначные можно получить перестановкой цифр в этих наборах:

$$\frac{8!}{2!3!2!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{4!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 (2 + 4 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 49 \cdot 120 = 5880$$

Ответ: 5880 чисел.

4. $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x - 1 + 1 \geq 0$

$$I \times \leq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

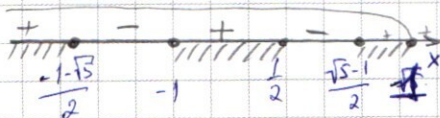
$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \oplus \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & 0 & -2 & 0 \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4x^2 + 0 \cdot x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 + 0 \cdot x - 2 \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = 5$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1].$$

II $x > 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

~~फ़ैनाइल एसेटेट~~

Ordnung: $x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1]$.

$$7. \begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25 \end{cases}$$

$$① |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} - & - & + & + \\ \hline - & + & - & + \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} |x-3-y| \\ |x-3+y| \end{array}$$

$$1) \begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-2x+6 \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0 \rightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3+y \\ x \geq 3-y \end{cases}$$

$$-x+3+y + x-3+y \leq 6$$

$$y \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3+y \\ x \leq 3-y \end{cases}$$

$$x-3-y - x+3-y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

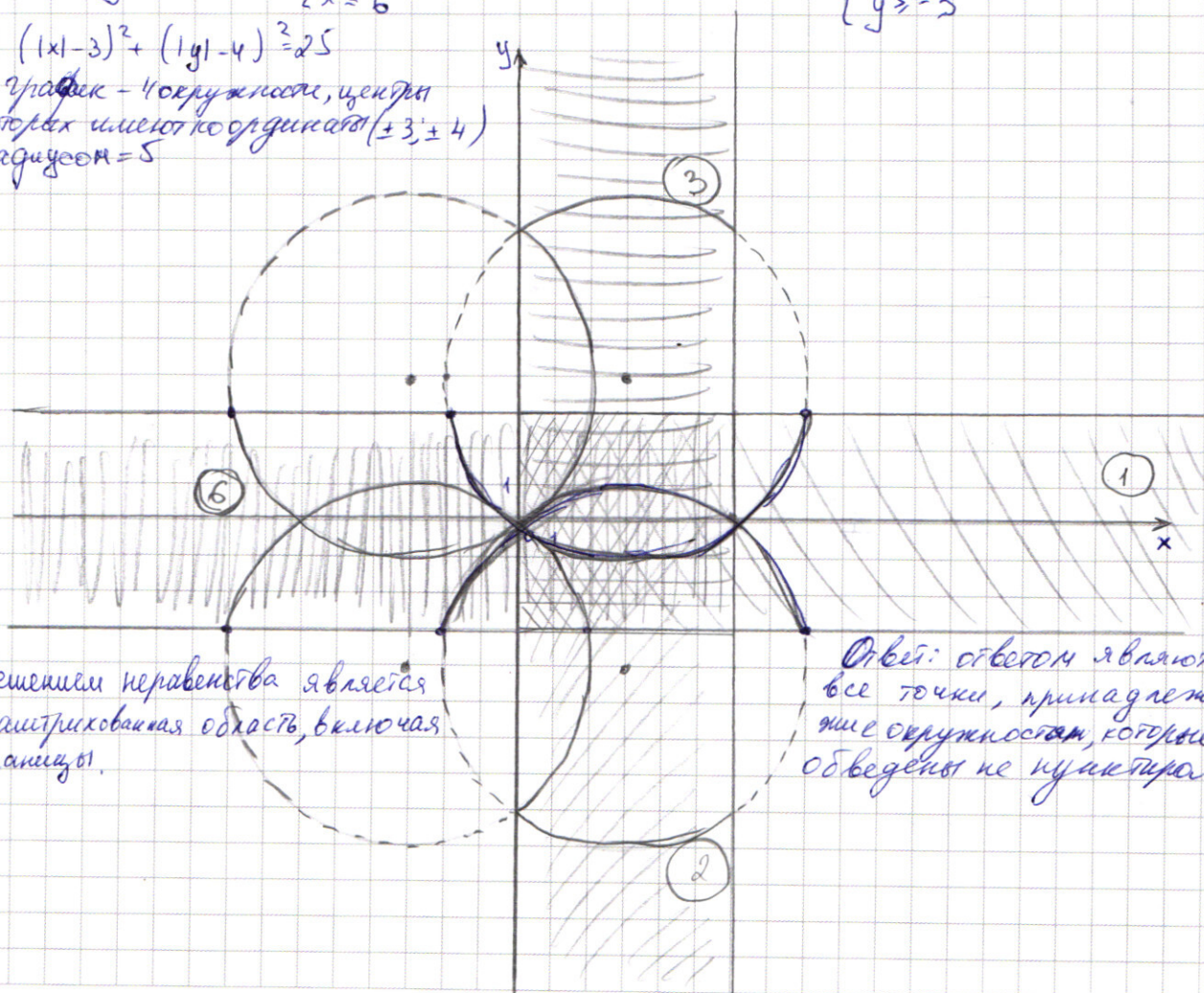
$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6 \rightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

$$② (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25$$

График - 4 окружности, центры которых имеют координаты $(\pm 3, \pm 4)$ и радиусом $= 5$

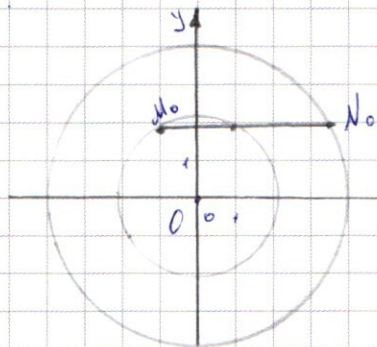


Решением неравенства является заштрихованная область, включая границы.

Ответ: ответом являются все точки, принадлежащие окружностям, которые обведены не пунктиром

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



$$OM_0 = \sqrt{1+3} = 2 = R_1$$

$$ON_0 = \sqrt{4+12} = 4 = R_2$$

Т.к. муравей и жук имеют равные скорости и бегут изначальную навстречу друг другу $\Rightarrow$ будет такой момент, когда они встретятся $\Rightarrow$ S между ними будет равно $R_2 - R_1 = 2$.

Уравнение положения муравья $\Rightarrow$ если муравей при этом будет иметь координаты $x, y \Rightarrow$ жук будет иметь координаты $(x+1), (y+\sqrt{3})$
уравнение $\omega_1(0; R_1): x^2 + y^2 = 4$
 $\omega_2(0; R_2): x^2 + y^2 = 16$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 16 \end{cases}$$

$$(x+1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 16$$

$$16 - 8\sqrt{3}y + y^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 - 4\sqrt{3}y + 6 = 0$$

$$D = 48 - 24 = 24$$

$$y = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{24}}{2} = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{6} \rightarrow x = 4 - 6 - 3\sqrt{2} = -2 - 3\sqrt{2}$$

$$y = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \rightarrow x = 4 - 6 + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2$$

Если $(-2 - 3\sqrt{2}; 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ - координ. муравья $\Rightarrow$ координ. жука $(-1 - 3\sqrt{2}; 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$
Если $(3\sqrt{2} - 2; 2\sqrt{3} - \sqrt{6})$ - координ. муравья $\Rightarrow$ координ. жука $(3\sqrt{2} - 1; 3\sqrt{3} - \sqrt{6})$

Ответ: $(-1 - 3\sqrt{2}; 3\sqrt{3} + \sqrt{6}), (3\sqrt{2} - 1; 3\sqrt{3} - \sqrt{6})$

$$2. \begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$1) b=0$$

$$0 \neq 1 \rightarrow b \neq 0$$

$$2) \frac{3(a+b)}{4} = \frac{12}{a+b}$$

$$3(a+b)^2 = 3 \cdot 16$$

$$a+b = \pm 4$$

$$12 = (a+b)ab$$

уравн. будет иметь бесконечно много решений $\Leftrightarrow$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1} \quad | \cdot b$$

$$I. a+b=4 \rightarrow ab=3$$

По теореме Виета корни:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$II. a+b=-4 \rightarrow ab=-3 \rightarrow b = -4-a$$

По теореме Виета корни:

$$\begin{aligned} -4a - a^2 &= -3 \\ a^2 + 4a - 3 &= 0 \\ D &= 28 \\ a &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

2. (продолжение)

$$\begin{cases} a = -2 - \sqrt{7} \rightarrow b = -4 + 2 + \sqrt{7} = -2 + \sqrt{7} \\ a = -2 + \sqrt{7} \rightarrow b = -4 + 2 - \sqrt{7} = -2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: при a и b равных: $(1; 3); (3; 1); (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}); (-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7})$ уравнение имеет бесконечно много решений.

3. $(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = \underbrace{x^2 + 5x + 6}_{(x+2)(x+3)}$

1) $x = -3 \rightarrow -27 + 3 + 10 < 0 \Rightarrow x \neq -3$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

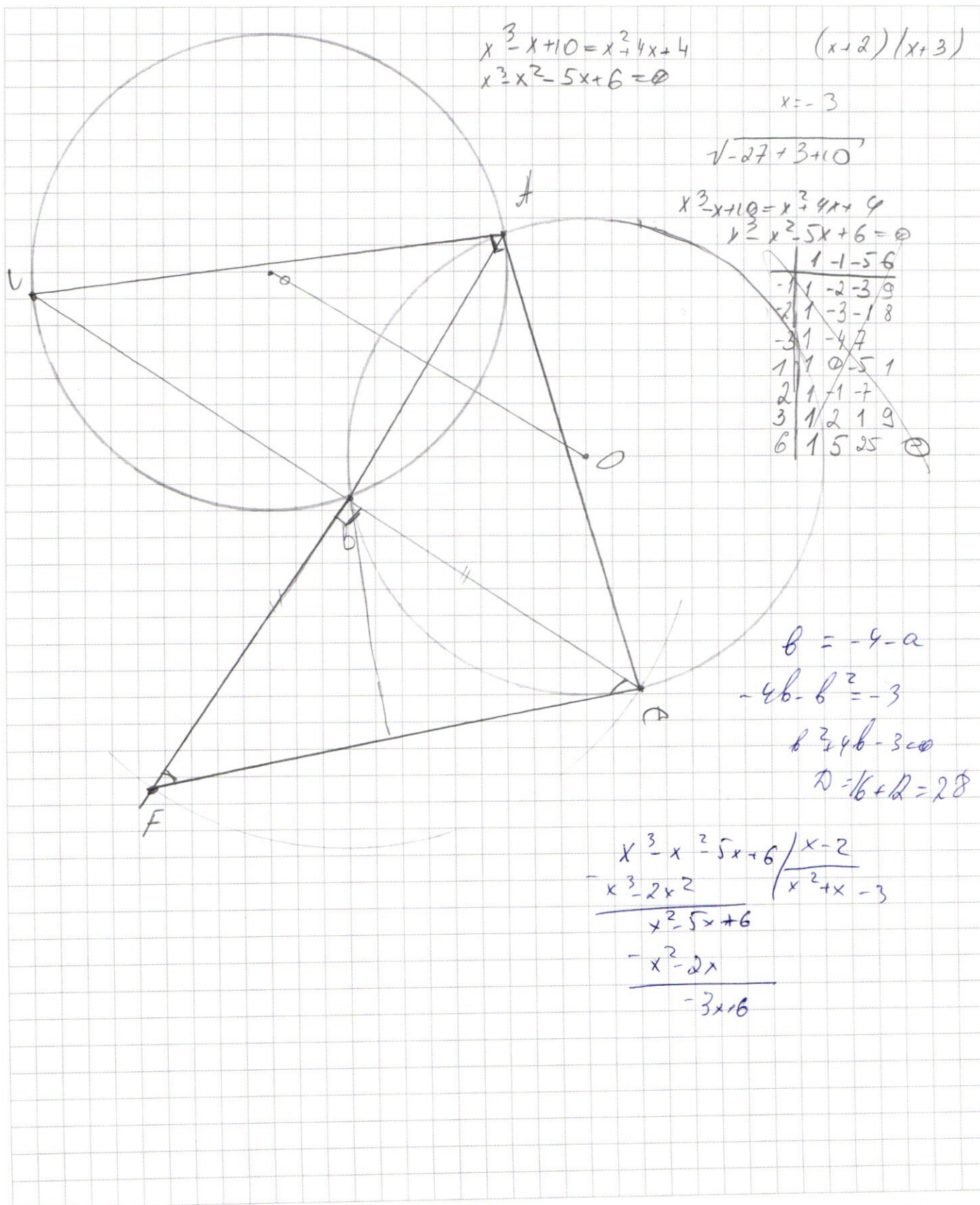
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 & & & & \\ & 1 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 0 \oplus \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left\{ 2; -\frac{1+\sqrt{13}}{2}; -\frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{3(a+b)}{4} = \frac{12}{a+b}$$

$$\frac{12}{a+b} = ab$$

$$3(a+b)^2 = 3 \cdot 16$$

$$ab = 3$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = \pm 4$$

$$a+b = 4$$

$$a = 4 - b$$

$$4b - b^2 = 3$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$(b-1)(b-3) = 0$$

$$b=1 \rightarrow a=3$$

$$b=3 \rightarrow a=1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x-3-y+x-3+y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

92x

$$y \geq x - 3$$

$$c/2, 3-x$$

9-6

4 3-3

$$x-3-y-x+3-y \leq 6$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x+3|)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\sqrt{x-3-y} + \sqrt{x-3+y} = 6$$

$$x-3-y=0$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)ky = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+3b=46 \\ 12=(a+b)6 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 + 3b = 4b \\ 12 = b(b+1) \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^3+5x+6$$

$$(x^2 + 6x + 9)(x^3 - x + 10) = x^2 + 5x + 6$$

$$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - x^3 - 6x^2 - 9x + 10x^2 + 60x + 90 = x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 51x + 90$$

$$x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 46x + 84 = 0$$

	1	6	8	3	48	84	
-1	1	5	3	0	48		
-2	1	4	0	3	42	0	+
-2	1	2	-4	7	20	✓	⊖
-3	1	3	-1	6	30	-6	⊖
-4	1	2	0	-1	52		⊖
-6	1	0	8				⊖
-7	1	-1	15				⊖
-14	1	-8					

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x = 0 \quad (1)$$

$$1400 / 23.5^2 = 7$$

2 2.2 5.5 7 11

4 2 5 5 7 1 1 1

~~1022 57 777~~

~~14 22 55 111~~

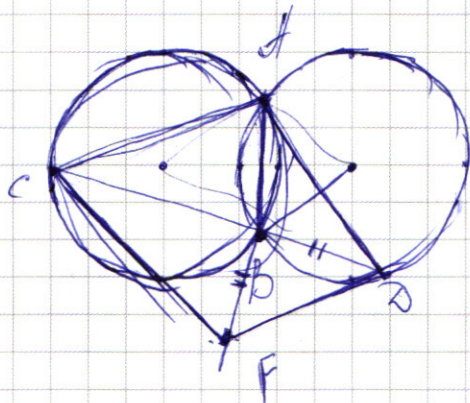
~~2 2 2~~ ~~3 5 5~~ ~~7 7 7~~

8 55 7 1111

$$\frac{8!}{3!2!2!} + \frac{8!}{2!3!} + \frac{8!}{4!2!}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 (2 + 4 + 1) =$$
$$= \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 5}_{75} \cdot \underbrace{7 \cdot 8}_{56} = 75 \cdot 56$$

$$\begin{array}{r} \cancel{7.6.7} + \cancel{4.5.6.7.8} \\ \phantom{\cancel{7.6.7} + } 4 \\ + 2.5.6.7.8 + \\ + 5.3.7.8 \end{array}$$



$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid +1 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 4 \ -2 \ 1 \\ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \\ \hline 1 \ 2 \ 5 \ 9 \ -11 \ 12 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ -1 \ 2 \\ \hline 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 10 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4x + (a+b)y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$39x + 12y = a$$

$$x(4 - 3(a+b)) + y(12(a+b) - 39) = \frac{1}{2} - a$$

$$b=1$$

$$3a+3b=4ab$$

$$(a+b) \geq 16$$

$$x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

$$\frac{3(a+b) \cdot 12}{4} = \frac{a+b}{a+b} = ab \quad 2x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x+1)(2x-1)(a+b) \pm 4$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ -2 \ -2 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 1 \ 2 \\ \hline -1 \ 2 \ 1 \ -3 \ 1 \ 0 \oplus \\ -1 \ 2 \ -1 \ -2 \ 3 \ 1 \ominus \\ \hline \frac{1}{2} \ 2 \ 4 \ 0 \ -2 \ 0 \oplus \\ \frac{1}{2} \ 2 \ 5 \ \ominus \\ \hline \frac{1}{2} \ 2 \ 2 \ -3 \ \ominus \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) &= \\ &= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad 1 \end{array}$$

$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1]$$

$$\frac{-2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{2x^4 + x^3 - x^2} \mid x^2 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2x^3 - x^2 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - x}$$

$$\frac{-2x^2 - x + 1}{-2x^2 - x + 1} = 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 = 0$$

$$2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

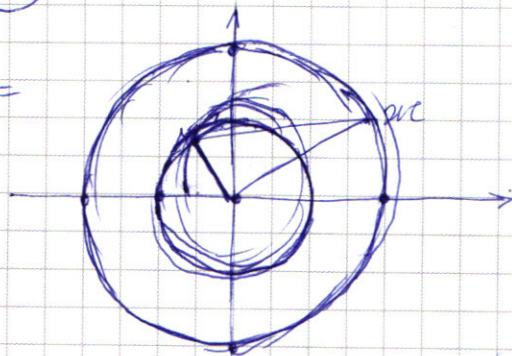
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq 1$$

$$\sqrt{5} \leq 3$$

$$\begin{array}{r} 2 \ -3 \ 4 \ -2 \ 1 \\ -1 \ 2 \ -5 \ 9 \ -11 \ 12 \\ \hline \frac{1}{2} \ 2 \ -2 \ 3 \\ \hline -\frac{1}{2} \ 2 \ -4 \ 6 \ -5 \end{array}$$

$$((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$x_0 = \sqrt{4 - y^2}$$



$$\begin{aligned} R^2 &= 3+1=4 \\ R &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= 12+4=16 \\ R &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$



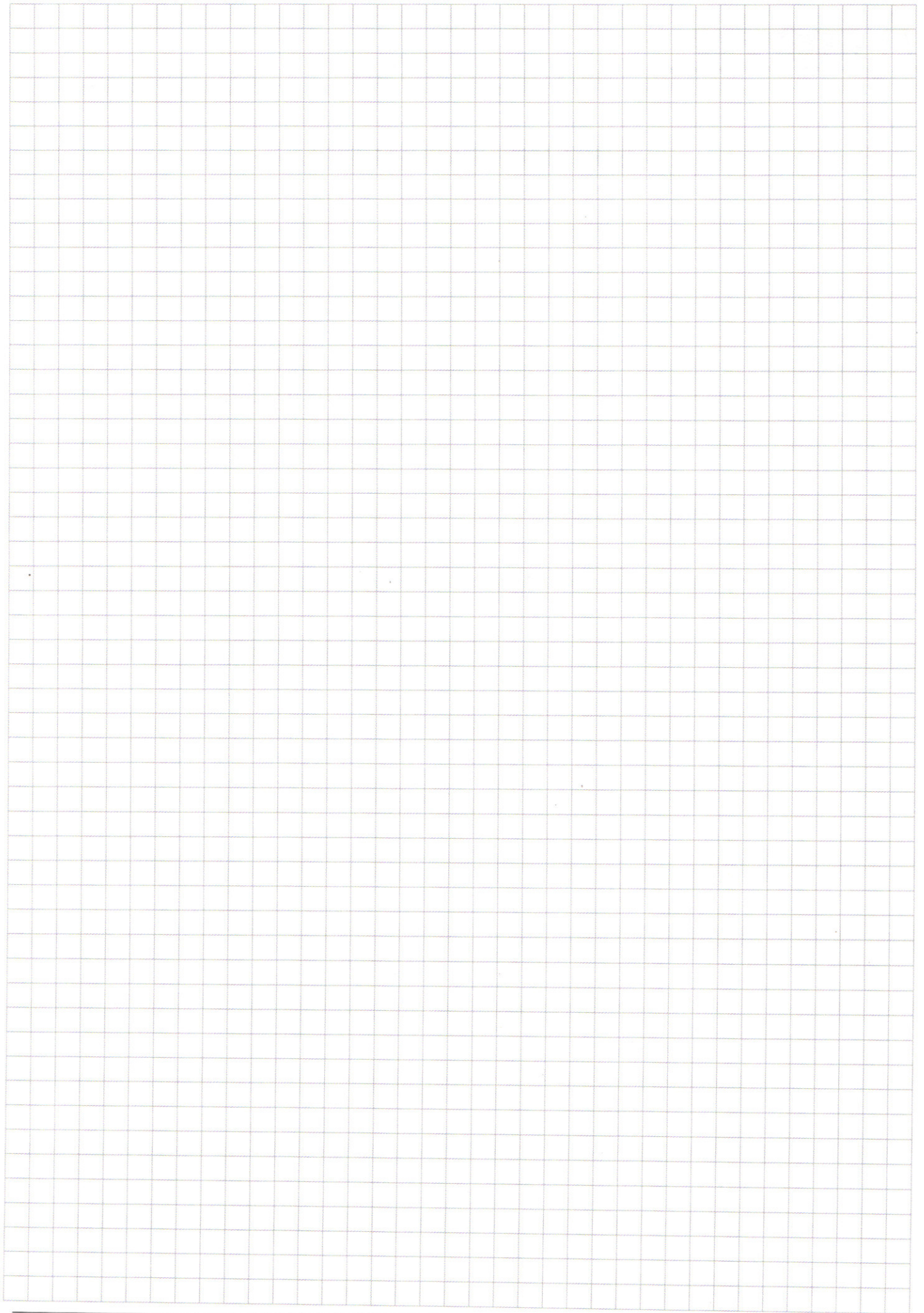
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)