МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6.$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2)$

1. Если $x+3=0$, то обе части равны нулю, а значит, получится верное равенство.

Проверим, имеет ли смысл $\sqrt{x^3-x+10}$ при $x=-3$.

$\sqrt{(-3)^3-(-3)+10}=\sqrt{-27+13}=\sqrt{-14}$. — не имеет смысла.

Следовательно $x=-3$ не является корнем.

2. $\sqrt{x^3-x+10}=x+2.$ $\boxed{ОДЗ\ x\geq -2.}$, т.к. кв. корень всегда больше или равен нулю

Помня про ОДЗ, возведем части в квадрат

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0.$

$(x^2+x-3)(x-2)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0, \\ x-2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0, \\ x=2; \end{array}\right. \longrightarrow 2>-2 \mid \text{принадлежит ОДЗ.}$$

Решим первое уравнение системы

$x^2+x-3=0.$

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-3)=13.$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$.

$3 < \sqrt{13} < 4$

Поэтому

$1 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < 1,5$. Поэтому принадлежит ОДЗ.

$-2,5 < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 2$. Поэтому не принадлежит ОДЗ.

Проверим теперь наличие смысла ~~выражения~~ $\sqrt{x^3-x+10}$.

1) $x=2$, тогда $\sqrt{2^3-2+10} = \sqrt{16} > 0$. Им. смысл.

2) $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Как мы уже выяснили, $1 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < 1,5$; сл-но

$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, т.е. $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) > 0$.

Следовательно

$\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)+10}$; $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)+10 > 0$. Им. смысл.

Ответ: $x=2$ и $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

~~3~~ 4.

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$.

I. При $x \geq 1$. Тогда $|x-1| = x-1$

$2x^4+x^2-2x-3x(x-1)+1 = 2x^4-3x^3+4x^2-2x+1 =$

$= (2x^2-x+1)(x^2-x+1)$.

$(2x^2-x+1)(x^2-x+1) \geq 0$.

Проверим множители.

1) $2x^2-x+1 \geq 0$, где $a=2$. График — парабола, ветви вверх.

$D = 1^2-4\cdot2\cdot1 = -7$; $a>0$, сл-но $2x^2-x+1 \geq 0$ при любых x.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x^2-x+1\geqslant 0$, где $a=1$. График – парабола, ветви вверх.
$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3$; $a>0$, ч-но $x^2-x+1\geqslant 0$ при любых x.

Раз $2x^2-x+1\geqslant 0$ и $x^2-x+1\geqslant 0$, то
$(2x^2-x+1)(x^2-x+1)\geqslant 0$ при любых x. Но мы в данном случае рассматриваем промежуток, где $x\geqslant 1$.
Поэтому $(-\infty;+\infty)\cap[1;+\infty)=[1;+\infty)$

II. При $x<1$. Тогда $|x-1|=1-x$.
$2x^4+x^2-2x-3x^2(1-x)+1=2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=$
$=(2x^2+x-1)(x^2+x-1)$
$(2x^2+x-1)(x^2+x-1)\geqslant 0$.

Проверим множители.

1) $2x^2+x-1\geqslant 0$; где $a=2$. График – парабола, ветви вверх.
$D=1^2-4\cdot2\cdot(-1)=9$.

$x_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$.

$x_2=\frac{-1-3}{4}=-1$

поэтому $x\in(-\infty;-1]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$.

2) $x^2+x-1\geqslant 0$, где $a=1$. График – парабола, ветви вверх.
$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot1=5$.

$x_1=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{-1-\sqrt5}{2}$.

Поэтому $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt5}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$

Но в данном случае мы рассматривали промежуток, где $x<1$.

Поэтому $\left(\left((-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty)\right)\cap\left((-\infty;-1]\cup[\frac{1}{2};+\infty)\right)\right)\cap(-\infty;1)=$

$=(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{5}}{2};1)$.

III. Объединим множества I и II.

$[1;+\infty)\cup\left((-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{5}}{2};1)\right)=$

$=(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty)$

<u>Ответ:</u> $x\in(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty)$

2.

$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1;\end{cases}$$

Система будет иметь бесконечно много решений, когда $x=y$. Исходя из этого,

$$\begin{cases}3ax+3bx=-12y+a,\\ 4bx=1-aby-b^2y.\end{cases}$$

Т.к мы не можем избавиться от параметра a, а нам это нужно, то $a=1$, в этом случае мы сможем упростить равенство и вычесть системы.

$$\begin{cases}3ax+3bx-4bx=-12y+a-1+aby+b^2y, & (x=y).\\ a=1;\end{cases}$$

$3-b=b+b^2-12$

$(b+5)(b-3)=0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b_1 = -5$; $b_2 = 3$.

Записав в виде $(a; b)$, получим

$(1; -5)$ и $(1; 3)$

Ответ: $(1; 3)$ и $(1; -5)$

(5).

$\overline{abcdefgh}$, такое, что $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 1400$ | кол-во — ?

Разложим 1400 на простые множители.

$1400 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7$.

Т.к. число должно быть восьмизначное, то добавим две единицы.

$1400 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1$.

Составим таблицу.

Цифра	Количество
1	2
2	3
5	2
7	1

Примером такого числа может быть 22255711. Количество нужных нам чисел мы могли бы найти по формуле $n!$, где n — количество цифр в числе. Но в зависимости от перестановок местами цифр 1, 2, 5 мы, возможно, будем получать те же числа. Поэтому необходимо исключить повторяющиеся варианты. Повторяющиеся по 2 раза цифры — 1 и 5 каждая из них исключает по $1+2+3+4+5+6+7$ вариантов, т.е. по 28 вариантов, всего 56. Повторяющаяся по 3 раза ~~цифр~~ цифра — 2, она исключает $\cancel{6}\cdot(6+5+4+3+2+1)$ вариантов, т.е. 126 вариантов.

Посчитаем $8!-56-126=40320-182=40138$.

Ответ: 40138.

(7).

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \le 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

I. Решим второе уравнение системы.

$$(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.$$

1) $(|x|-3)^2=9$, а $(|y|-4)^2=16$.

$\left[\begin{array}{l} |x|-3=3, \\ |x|-3=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |y|-4=4, \\ |y|-4=-4; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \\ x=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=8, \\ y=-8, \\ y=0; \end{array}\right.$

Получим $\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \\ x=0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=8, \\ y=-8, \\ y=0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$ $(6;0)$; $(6;8)$; $(6;-8)$; $(-6;0)$; $(-6;-8)$; $(-6;8)$; $(0;0)$; $(0;8)$; $(0;-8)$ — решения.

2) $(|x|-3)^2=16$, а $(|y|-4)^2=9$.

$\left[\begin{array}{l} |x|-3=4, \\ |x|-3=-4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |y|-4=3, \\ |y|-4=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=7, \\ y=-7, \\ y=1, \\ y=-1; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-7; \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получим $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=7; \\ x=-7;\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}y=7; \\ y=-7; \\ y=1; \\ y=-1;\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow$ $(7;7)$; $(7;-7)$; $(-7;7)$; $(-7;-7)$; $(7;1)$; $(7;-1)$; $(-7;1)$; $(-7;-1)$ – решения.

II. Проверим, какие из решений удовлетворяют первому неравенству.

1) $(6;0)$.
$|6-3-0|+|6-3+0|=3+3=6$. | $6=6$ Удовл.

2) $(6;8)$; $|6-3-8|+|6-3+8|=5+11=16$ | $16>6$ Не удовл.

3) $(6;-8)$; $|6-3+8|+|6-3-8|=11+5=16$ | $16>6$ Не удовл.

4) $(-6;0)$; $|-6-3-0|+|-6-3+0|=9+9=18$ | $18>6$ Не удовл.

5) $(-6;-8)$; $|-6-3+8|+|-6-3-8|=1+17=18$ | $18>6$ Не удовл.

6) $(-6;8)$; $|-6-3-8|+|-6-3+8|=17+1=18$ | $18>6$ Не удовл.

7) $(0;0)$; $|0-3-0|+|0-3+0|=3+3=6$ | $6=6$ Удовл.

8) $(0;8)$; $|0-3-8|+|0-3+8|=11+5=16$ | $16>6$ Не удовл.

9) $(0;-8)$; $|0-3+8|+|0-3-8|=5+11=16$ | $16>6$ Не удовл.

10) $(7;7)$; $|7-3-7|+|7-3+7|=3+11=14$ | $14>6$ Не удовл.

11) $(7;-7)$; $|7-3+7|+|7-3-7|=11+3=14$ | $14>6$ Не удовл.

12) $(-7;7)$; $|-7-3-7|+|-7-3+7|=17+3=20$ | $20>6$ Не удовл.

13) $(-7;-7)$; $|-7-3+7|+|-7-3-7|=3+17=20$ | $20>6$ Не удовл.

14) $(7;1)$; $|7-3-1|+|7-3+1|=3+5=8$ | $8>6$ Не удовл.
15) $(7;-1)$; $|7-3+1|+|7-3-1|=5+3=8$ | $8>6$ Не удовл.
16) $(-7;1)$; $|-7-3-1|+|-7-3+1|=11+9=20$ | $20>6$ Не удовл.
17) $(-7;-1)$; $|-7-3+1|+|-7-3-1|=9+11=20$ | $20>6$ Не удовл.

Первому неравенству и второму уравнению удовлетворяют только пары чисел $(6;0)$ и $(0;0)$.

Ответ: $(6;0)$ и $(0;0)$

(1).

Уравнения окружностей $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.
Т.к. по условию $x_0=y_0=0$, то $x^2+y^2=r^2$.

$r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

$r_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

Расстояние между ~~ж~~жуком и муравьём будет кратчайшим, когда они оба будут на одной прямой, которая вдобавок проходит через точку $(0;0)$, ведь центры окружностей совпали.

$y_1=k_1x_1$ и $y_2=k_2x_2$ — одна прямая, т.е. $k_1=k_2$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$ и $y=kx$

1) $y_1=\sqrt{4-x_1^2}$; $y_1=kx_1$

$k_1=\frac{\sqrt{4-x_1^2}}{x_1}$

2) $y_2=\sqrt{16-x_2^2}$; $y_2=kx_2$.

$k_2=\frac{\sqrt{16-x_2^2}}{x_2}$

$k_1=k_2$, т.к. $\frac{\sqrt{4-x_1^2}}{x_1}=\frac{\sqrt{16-x_2^2}}{x_2}$.

→ отсюда $x_2=2x_1$

подставив, получим, что

$x_1=1$; $x_2=2$.

Тогда $y_1=\sqrt{r_1^2-x_1^2}=\sqrt{3}$.

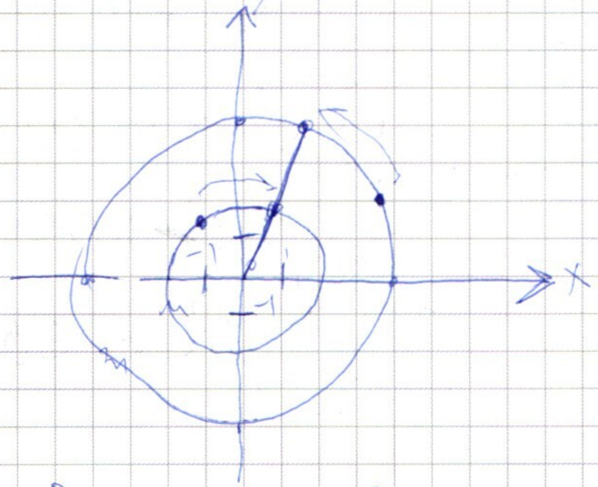
$y_2=\sqrt{r_2^2-x_2^2}=2\sqrt{3}$.

Ответ: $(1;\sqrt{3})$ и $(2;2\sqrt{3})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



ур-е окр. 1

$x^2+y^2=r^2$

$1+3=2^2$; $r=2$.

ур-е окр. 2.

$x^2+y^2=r^2$

$12+4=4^2$; $r=4$.

Расстояние будет кратчайшим, когда жук и муравей лежат на одной прямой, проход. через центр окр-ти.

$y=kx$. $k=-\sqrt{3}$.

$\begin{cases} \sqrt{3}=-k \\ 2=2k\sqrt{3} \end{cases}$ $-\sqrt{3}=k-b$

$2-\sqrt{3}=2k\sqrt{3}-k$

$(2\sqrt{3}-1)\cdot k=2-\sqrt{3}$

$k=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}=$

$\frac{6-\sqrt{3}-4}{6-\sqrt{3}}$

$\frac{2\sqrt{3}-3}{6-\sqrt{3}}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=kx \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=kx \\ x^2+y^2=16 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \sqrt{3}=-k \\ 2=2k\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} y=kx \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

1) $kx=4-x^2$

$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=k$.

2) $kx=16-x^2$

$\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}=k$.

$(2x^2-x+1)(x^2-x+1)$

$(2x^2-x+1)(x^2-x+1)$

(5)

$x^2-x+1\geq 0$

$\cancel{D<0}$

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0.$

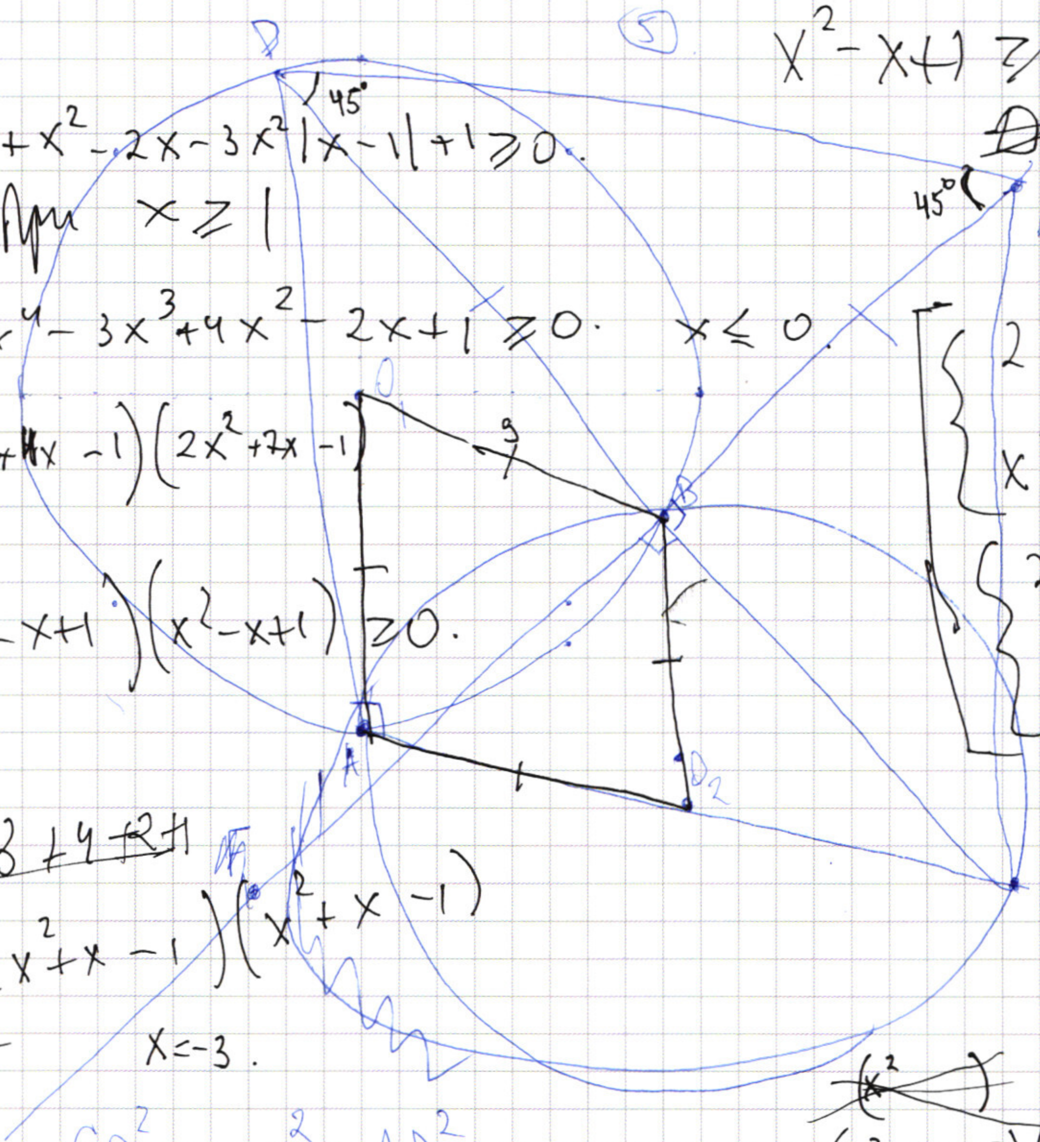
1) При $x\geq 1$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0.$ $x\leq 0.$

$(x^2+4x-1)(2x^2+7x-1)$

$(2x^2-x+1)(x^2-x+1)\geq 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-x+1\geq 0\\ x^2-x+1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-x+1\leq 0\\ x^2-x+1\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$\cancel{2+3+4+2+1}$

$(2x^2+x-1)(x^2+x-1)$

$x=-3.$

$(x^2+x+10)(x-1)$

$(x^2+2x-5)(x-2)$

$(x^2+2x-5)(x-2)$

$\sqrt{x^3-x+10}=\sqrt{-27+3+10}=\sqrt{-14}$ нс.

$CD^2=AC^2+AD^2$

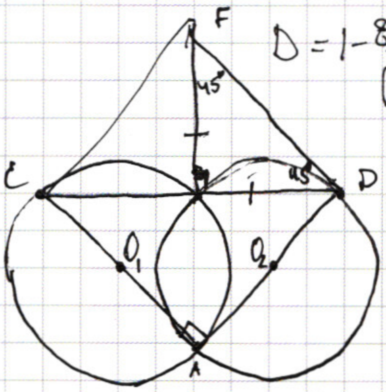
$CF^2=FB^2+BC^2=BD^2+BC^2$

$2x^2-x+1\geq 0.$

$D=1-8=-7.$ Всегда

$x^3-x+10\geq 0.$

$x(x-1)(x+1)+10\geq 0.$



$\angle CAD=90°$

$CD^2=AC^2+AD^2$

$CF^2=BF^2+BC^2=BC^2+BD^2=$

$=CD^2-2BC\cdot BD=$

$=AC^2+AD^2-2BC\cdot BD$

$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10})=x^2+5x+6.$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2).$

$\sqrt{x^3-x+10}$

$(x^2+x-3)(x-2)$

$x^3-x+10\geq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$

2 2

$X=Y$.

22255711

22255117

22255171

222

6+5+4+3+2+1

$$\begin{cases} 3ax+3bx+12y=a. \\ 4bx+aby+b^2y=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax+3bx=-12y+a \\ 4bx=1-aby-b^2y \end{cases}$$

$3ax-bx=-12y+a-1+aby+b^2y$

$3a-b=ab+b^2-12$, где $a=1$.

$3-b=b+b^2-12$.

$b^2+2b-15=0$.

$(b+5)(b-3)=0$

$b=-5$ | $b=3$.

1222

2122

2212

2221

4!

24-4

720·7=

=4900+140=

=5040.

122

212

221

6-3

120-5

$$\begin{cases} 3ay+3by+12y=a \\ 4by+aby+b^2y=1. \end{cases}$$

222

5040·8=

=40000+320=40320

1122

1212

1221

2211

2121

2112.

24-6.

$\frac{a}{3a+3b+12}=\frac{1}{4b+ab+b^2}$

$4ab+a^2b+ab^2=3a+3b+12$.

$a^2b+ab^2+4ab-3a-3b-12=0$.

5

В таких числах нет нулей!

1400 | 2·2·2·5·5·7·1·1

700

350

175

35

7

Все - простые множители.

7+6+5+4+3+2+1.

5

(7)

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \le 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25 \end{cases}$$

$|y|-4=\pm 3$

$|y|-4=3.$

$|y|=\pm 7.$

$|y|-4=4$

$|y=\pm 8.$

$y=0.$

$|x|-3=3 \mid |y|-4=4$

$|x|-3=3 \mid |y|-4=-4.$

$x-3=3$

$x=\pm 6$

$x-3=-3$

$x=0.$

$x=6$, то $y=0 \mid y=8. \mid y=-8.$

$x=-6$, то $y=0 \mid y=8 \mid y=-8.$

$x=0$, то $y=0 \mid y=8 \mid y=-8$

$|x|-3=4$

$x=\pm 7$

$x=\pm 7$ $y=\pm 7; \pm 1.$

$(6;0)(6;8)(6;-8)(-6;0)(-6;8)(-6;-8)(0;0)(0;8)(0;-8)$
$(-7;-7)(-7;+7)(-7;-1)(-7;1)(7;1)(7;-1)(7;-7)(7;7).$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)