

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 3 & x &\geq 3 & y &\geq 4 \\ y &\geq 4 & 3 &\leq x &< 4 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6;$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3);$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)) = 0;$$

$$x+3=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x^3-x+10} = x+2; \Rightarrow x+2 \geq 0$$

$$x = -3;$$

Проверка:

$$-27+3+10 = -14 < 0;$$

$\Rightarrow x = -3$ - посторонний
корень.

$$x^3-x+10 = (x+2)^2;$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4;$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0;$$

Делителями 6:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6;$$

2-корень уравнения

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ x^2-5x & \underline{x^2+x-3} \\ x^2-2x & \underline{-3x+6} \\ -3x+6 & \underline{-3x+6} \\ 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0;$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x^2+x-3 = 0$$

Проверка:

$$8-2+10 = 16 > 0;$$

Проверка:

$$2+2=4 > 0$$

$$2+2=2$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 12 = 13;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Проверка: $3 < \sqrt{13} < 4$

$$\frac{-1-4}{2} = -2,5; \quad \frac{-1+3}{2} = 1;$$

$$-15,625 + 2,5 + 10 < 0$$

Проверка:

$$3,6 < \sqrt{13} < 3,7$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3,6}{2} = 1,3$$

$$1,3 + 2 = 3,3 > 0$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3,6}{2} = -2,3$$

$$-2,3 + 2 = -0,3 < 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \text{ — посторонний корень}$$

Ответ: $2; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

$$\text{№ 4. } 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x - 1 + 1 \geq 0;$$

I Если $x \geq 1$:

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0; \text{Рассм. } 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0;$$

По т. Безу возможные корни: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$

$x \geq 1 \Rightarrow$ возможный корень: 1;

$$2 - 3 + 4 - 2 + 1 = 2 \Rightarrow \emptyset$$

$\Rightarrow$ При $x \geq 1$ всегда

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ или } 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 < 0;$$

Возьмём $x = 2$

$$2 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 =$$

$$= 32 - 24 + 16 - 4 + 1 = 21 > 0;$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ при } x}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x - 1 + 1 \geq 0 \text{ при } x \in [1; +\infty).$$

II Если $x < 1$;

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0;$$

$$\text{Рассм. } 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0;$$

По т. Безу возможные корни: $\pm 1; \pm \frac{1}{2};$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x < 1 \Rightarrow$ возможные корни: $-1; \pm \frac{1}{2}$

Если $x = -1$:

$$2 - 3 - 2 + 2 + 1 = 0;$$

$$\Rightarrow x = -1; \Rightarrow \begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 & x+1 \\ \hline 2x^4 + 2x^3 & 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ x^3 + x^2 & \\ \hline -3x^2 - 2x & \\ -3x^2 - 3x & \\ \hline x + 1 & \\ x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) = 0;$$

Рассм. $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0;$

По т. Безу и с учетом $x < 1$ возможные корни:

$$-1; \pm \frac{1}{2}.$$

Если $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0,5 - 1,5 + 1 = 0;$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 & 2x-1 \\ \hline 2x^3 - x^2 & x^2 + x - 1 \\ \hline x^2 - 3x & \\ 2x^2 - x & \\ \hline -2x + 1 & \\ -2x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1) = 0;$$

Рассм. $x^2 + x - 1 = 0;$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 3;$$

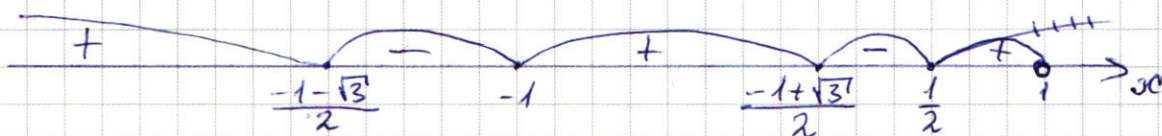
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow x_2 < 1;$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} < 2; \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} < 1; \Rightarrow x_1 < 1;$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0;$$

Решим неравенство методом интервалов:



$$\Rightarrow x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}] \cup [-1; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{1}{2}; 1).$$

III При всех значениях x :

$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}] \cup [-1; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}] \cup [-1; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty).$

№ 4.

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6; \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25; \end{cases}$$

I $x-3 \geq |y|; x \geq 3; y \geq 4 \Rightarrow x \geq 4, y \geq 4 \Rightarrow x \geq 4$

$$\begin{cases} x-3-y + x-3+y \leq 6; \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \leq 12; \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25; \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \leq 6; \Rightarrow \emptyset$$

II $x-3 < |y|; x-3 \geq |y|; x < 3; y < 4 \Rightarrow y \leq 0;$

$$\begin{cases} x-3-y + x-3+y \leq 6, \\ (-3-x)^2 + (-4-y)^2 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25 \end{cases}$$

III $x-3 \geq |y|$

$$\begin{cases} x-3-y + x-3+y \leq 6; \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6; |x| - \text{любое число} \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

1) $0 \leq x \leq 6; \Rightarrow 0 \leq |y| \leq 3; 0 \leq y \leq 3; \Rightarrow 3 \leq x \leq 6;$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq (x-3)^2 \leq 3 \\ 0 \leq (x-3)^2 \leq 9 \\ -4 \leq (y-4) \leq -1 \\ 1 \leq (y-4)^2 \leq 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Подходят лишь такие} \\ &1 \leq (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 25 \\ &\Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ &\Rightarrow (x-3)^2 = 9; (y-4)^2 = 16; \\ &x = 6; y = 0; \\ &(x = 0; y = 8 - \text{посторонние корни}) \end{aligned}$$

(6; 0)

~~I 2) $0 \leq x \leq 3$, $\Rightarrow x < 0; |y| \leq -3 \Rightarrow \emptyset$~~

~~II $-|y| \leq x-3 < |y|$~~

$$\left\{ \begin{aligned} -x+3+y+x-3+y \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25; \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} y \leq 3, |y| \text{ - любое число} \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{aligned} \right.$$

~~i) $0 \leq y \leq 3; -3 \leq x-3 \leq 3; 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 3$~~

~~$-y \leq x-3 < y; 0 < x-3 < 3; 3 < x < 6$~~

~~$\Rightarrow 0 < (x-3)^2 < 9; -4 \leq (y-4) \leq -1$~~

~~$(y-4)^2 \quad 1 \leq (y-4)^2 \leq 16$~~

~~$\Rightarrow 1 < (x-3)^2 + (y-4)^2 < 25$~~

~~$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 - \emptyset$~~

~~III $x-3 \leq -|y|$~~

$$\left\{ \begin{aligned} 3+y-x+3-y-x \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25; \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \Rightarrow -2x \leq 0; \\ x \geq 0; \end{aligned} \right.$$

~~$-|y| \leq 0; \Rightarrow x-3 \leq 0; -3 \leq x-3 \leq 0; 0 \leq x \leq 3;$~~

~~$-3 \leq -|y| \leq 0; 0 \leq |y| \leq 3; -3 \leq y \leq 3$~~

$$-(|x|-3) \leq$$

$$-3 \leq (x-3) \leq 0;$$

$$0 \leq (x-3)^2 \leq 9;$$

$$-\frac{4}{3} \leq (|y|-\frac{4}{3}) \leq \frac{4}{3}$$

$$0 \leq (|y|-\frac{4}{3})^2 \leq \frac{16}{9}$$

$$0 \leq (x-3)^2 + (|y|-\frac{4}{3})^2 \leq 25$$

$$\Rightarrow x=0; y=0$$

($x=6; y=\pm 8$ - посторонние корни)

$$\Rightarrow (0;0)$$

$$\text{II} \quad 2) \quad y < x-3 < -y \Rightarrow y \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x} = \text{любое число}$$

$$(y+4)^2 + (|x|-3)^2 = 25$$

$$x \geq 0:$$

$$(y+4)^2 + (x-3)^2 = 25$$

$$(y+4)^2 \geq 16;$$

$$(x-3)^2 \leq 16$$

$$(x-3)^2 = 25 - 16$$

$$\Rightarrow y=0;$$

Ответ: $(6;0); (0;0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3((a+b)x + 4y) = a, \\ 4b(4x + (a+b)y) = 1; \end{cases}$$

$$\cancel{3} 3((a+b)x + 4y) = ab(4x + (a+b)y);$$

$\Rightarrow$ Чтобы система имела бесконечно много решений $(a+b)x + 4y = n(4x + (a+b)y)$

Заметим $a+b=t$

$$\Rightarrow tx + 4y = n(4x + ty);$$

$$\Rightarrow n=1; \Rightarrow t=4 \Rightarrow a+b=4; \Rightarrow (a+b)x + 4y = 4x + (a+b)y;$$

$$\begin{cases} a+b=4; \\ ab=3; \end{cases} \quad \begin{cases} a=4-b; \\ (4-b)b=3; \end{cases}$$

$$(4-b)b=3;$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0;$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 3$$

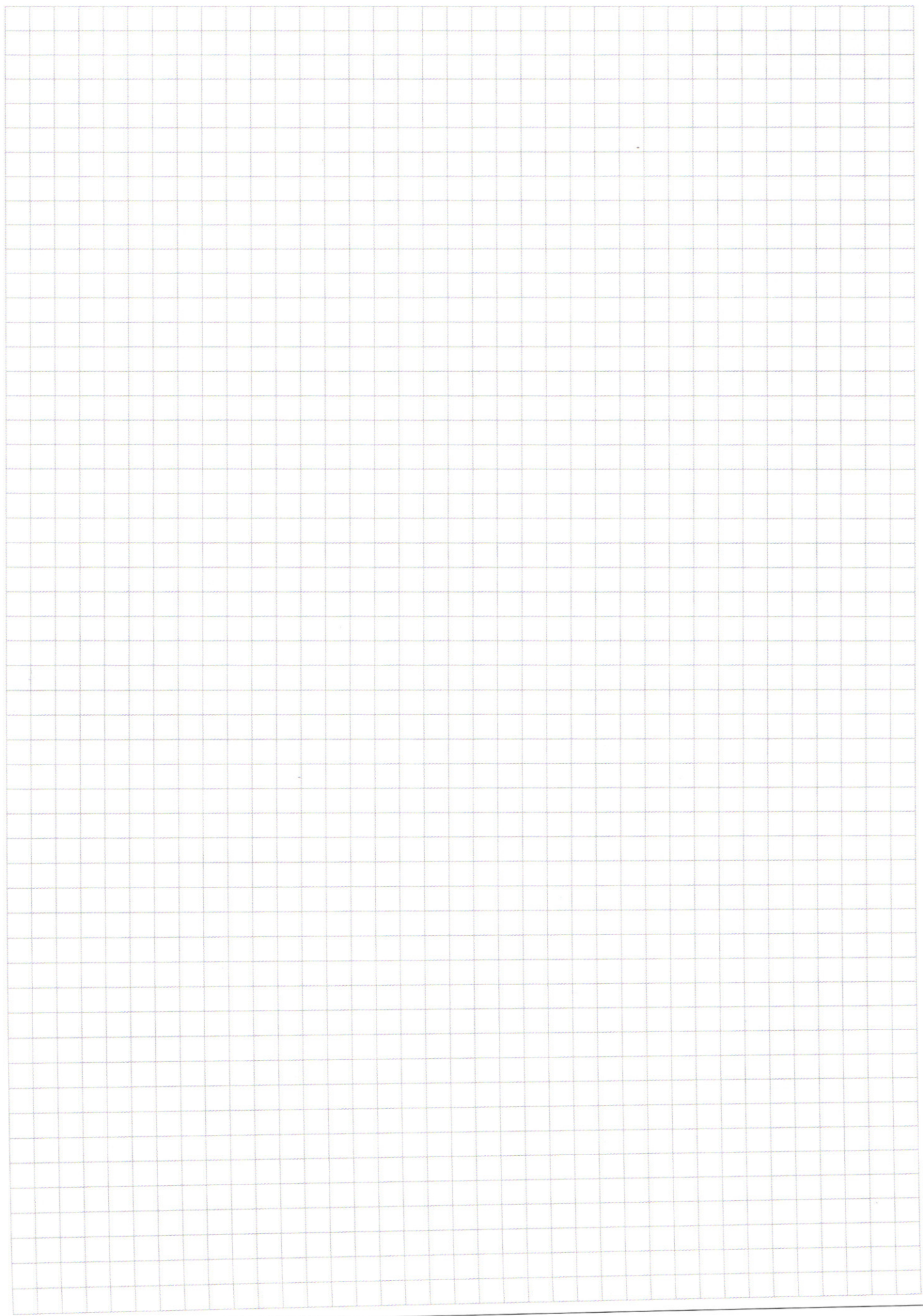
(по т., обратной т. Виета)

$$a_1 = 4 - b_1 = 3;$$

$$a_2 = 4 - b_2 = 1;$$

$$(3; 1); (1; 3).$$

Ответ: пары параметров: $(3; 1); (1; 3).$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$M \rightarrow \sqrt{3}$$

$$U_M = U_N \int_0^1 (x+ib) dx + 12y = a,$$

$$(4b)x + (a+b)y = 1;$$

$$[3(a+b)x + 12y = a]$$

$$(4x + (a+b)y) = \frac{1}{b}; -$$

$$(5x - y)(a + b) + 4(3y - x) = a - \frac{1}{5}b$$

$$(3(a+b)x + 12y = a$$

$$[4bx + (a+b)by = 1$$

$$3((a+b)x + 4y) = a$$

$$b(4x + (a+b)y) = 1$$

$$\frac{3((a+b)x + 4y)}{b(4x + (a+b)y)} = a$$

$$4x + 4y = 12$$

0. () 0. ()

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6;$$

$$(x+3)(x^2-x+10) = (x+2)(x+3)$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = (x$$

$$\frac{(-1 + \sqrt{13})^3}{8} - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 11$$

$$x^2 + 5x + 6$$

$$\frac{10 + 3 - (1 + \sqrt{13})^3 - 4 - 4\sqrt{13} + 80}{1 + 2} = 10$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x \\ - 2x + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+6 \\ \hline 2x-0 \end{array}$$

$$(x+3)(x^3-x+10-x-2)=0$$

$$\frac{-1-3,4}{2} = -2,35$$

$$\underline{x = -3} \quad x^2 - x + 10 = x + 2;$$

②

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 10$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2}$$

$$3 \quad 2,5 > 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 : x - 2 \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 5x \\ x^2 + 2x \\ \hline -3x + 6 \end{array}$$

☒ черновик

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 + 1 \geq 0;$$

$$2x^4 - 3x^2 | x-1 + x^2 - 2x + 1 \geq 0;$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

$$0,125 - 3 \cdot 0,125 + 1 - 1 + 1$$

$$0,125 + 3 \cdot 0,125 + 1 + 1 - 1$$

$$\frac{2}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{4} - \frac{2}{2} + 1$$

$$2 - 3 - 2 + 2 + 1$$

$$\frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$D = -1 + 4 = 3$$

.....

$$\begin{array}{r} 14002 \\ 4002 \\ 3502 \\ 1455 \\ 355 \\ 44 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22255411 \\ 42552111 \\ 85521111 \end{array}$$

