

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

при $b=0$

уравнение II принимает вид:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow x, y \in \emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow b \neq 0$.

при $a=b$, $a-b=0 \Rightarrow$ уравнение I принимает вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 6y = a \\ 3 \cdot b \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{6} \\ x = \frac{1}{3b} \end{cases} \text{ — одно решение.}$$

$\Rightarrow a \neq b \Rightarrow a-b \neq 0$.

Уравнения I и II — уравнения прямой.
Если прямые непараллельны, то решение
единственное, если параллельны и не сов-
падают, то ~~нет~~ нет решений, если совпадают,
то решений бесконечно много. $\Rightarrow$
~~при~~ уравнения прямых должны совпадать.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2(a-b)}{3}x + y = \frac{a}{6} \\ \frac{3}{(a-b)}x + y = \frac{1}{(a-b)b} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{6} - x \left(\frac{a-b}{3} \right) \\ y = \frac{1}{b(a-b)} - x \left(\frac{3}{a-b} \right) \end{cases} \Rightarrow$ т.к. правые
 части должны совпадать, то
 и формулы должны быть математически равны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{3} = \frac{3}{a-b} \\ \frac{a}{6} = \frac{1}{b(a-b)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 9 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ \cancel{a-b=-3} \\ ab(a-b)=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-b=3 \\ ab(a-b)=6 \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=-3 \\ ab(a-b)=6 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-b=3 \\ ab \cdot 3 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=-3 \\ ab(-3) = 6 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=b+3 \\ ab=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b-3 \\ ab=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=b+3 \\ (b+3)b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b-3 \\ (b-3)b=-2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=b+3 \\ b^2+3b-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b-3 \\ b^2-3b+2=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=b+3 \\ b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=b-3 \\ (b-2)(b-1)=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+3 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ a=b+3 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ a=b-3 = -1 \\ b=2 \\ a=b-3 = -2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (a, b) \in \left\{ (-2; 1), (-1; 2), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

при $x = -5$ $x^3 - 16x + 25 = -125 + 80 + 25 = -20 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \neq -5 \Rightarrow x+5 \neq 0$$

разделим обе части на $(x+5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2) \Rightarrow x \geq 2$$

возведем в квадрат:

$$x^3 - 16x + 25 = 4(x^2 - 4x + 4) = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x = 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 3$$

$$x \geq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = 1 + 3 \cdot 4 = 13 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \geq 2$$

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{2} = x \\ x^2 \geq 2 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} = x \\ x^2 \geq 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(\sqrt{13} > 1 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2})$$

$$\begin{cases} \sqrt{13} > 3 \text{ т.к. } 13 > 9 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} > \frac{1+3}{2} = 2; \textcircled{1} \\ x = 3. \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } x \in \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 3 \right]$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0 \quad \sqrt{4}.$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2|x+1| \geq 0$$

$$6(x^2)^2 - 5 \cdot x^2|x+1| + (x+1)^2 \geq 0$$

$$(3x^2 - |x+1|)^2 (2x^2 - |x+1|) \geq 0$$

$$3x^2 - |x+1| - (2x^2 - |x+1|) = x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2 - |x+1|) \geq (2x^2 - |x+1|)$$

$$1) \text{ при } 2x^2 - |x+1| \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - |x+1| \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2 - |x+1|)(2x^2 - |x+1|) \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$$2) \text{ при } 2x^2 - |x+1| < 0 \Rightarrow$$

$$1) 3x^2 - |x+1| > 0 \Rightarrow \quad 2) 3x^2 - |x+1| \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2 - |x+1|)(2x^2 - |x+1|) < 0 \Rightarrow (3x^2 - |x+1|)(2x^2 - |x+1|) \geq 0$$

$$\textcircled{\times} \text{ при } 3x^2 - |x+1| \leq 0;$$

$$2x^2 - |x+1| \leq 3x^2 - |x+1| \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - |x+1| \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - |x+1| \geq 0 \\ 3x^2 - |x+1| \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+1(x-1) \geq 0 \\ \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{6}\right) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq 0 \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ 3x^2 - x - 1 \leq 0 \\ x \leq -1 \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x \leq -1 \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ (2x+1)(x-1) \geq 0 \\ x \geq -1 \\ \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{6}\right) \leq 0 \\ x \leq -1 \\ 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq 0 \\ x \leq -1 \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -0.5 \\ x \geq 1 \\ x \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{6}; \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right] \\ x \leq -1 \\ x \in \mathbb{R} \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \in [-1; -0.5] \\ x > 1 \\ \{x^2 - 1\} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \sqrt{13} \\ 3 < \sqrt{13} < 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow -4 < -\sqrt{13} < -3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 < 1 + \sqrt{13} < 5 \\ \Rightarrow -3 < 1 - \sqrt{13} < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < \frac{5}{6} < 1 \\ -0.5 < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -0.5] \\ x \in [1; +\infty) \\ x \in \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{6}; \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x \in (-\infty; -0.5] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{6}; \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$

15 заметим, что среди цифр нет 0, так произведение > 0 .

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1 = 4 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1^2 = 8 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1^3$$

при других комбинациях 5 умножается на

число $> 1 \Rightarrow 5 \cdot k \geq 5 \cdot 2 = 10$ - не цифра; или

7 умножается на число $> 1 \Rightarrow 7 \cdot l \geq 7 \cdot 2 = 14$ - не цифра

$\Rightarrow$ других комбинаций не может быть.

I) $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$, # цифры $\{2, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 1\}$

рассчитаем количество способов: для цифры 1 есть 1 место; для цифры 7 есть 7 мест; для цифр $\{2, 2, 2\}$ есть 6 мест; для цифр $\{5, 5, 5\}$ - 3 места $\Rightarrow$ для $\{5, 5, 5\}$ - 3 места - красная

кол-во способов: $N_1 = 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 =$
 $= 1120 \text{ (способов)}$

II) цифры $\{4, 2, 5, 7, 1\}$ $\{4, 2, 7, 7, 7, 5, 5, 5\}$
 кол-во способов: для 4 есть 4 места; для 2 - 7 мест; для 7 - 6 мест; для $\{1, 1\}$ - 5 мест $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ способов $= C_5^2$; для $\{5, 5, 5\}$ - 3 места $\Rightarrow$
 $= 7 \cdot 1$ способ. всего:

$N_2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot C_5^2 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= (p \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 3 = N_7 \cdot 3 = 1720 \cdot 3 = 3360.$$

III) $u, v, w \in \{0, 7, 5^x, 5, 5^7, 7, 7^3\}$

kal - bo'lmagan: qit¹, p¹ - 8 mecm; qit² - 7 mecm;
qit³ 5; 5; 53 - 6 mecm $\Rightarrow$ masaba C₆; qit⁴ 7; 7; 13 - 3 mecm
 $\Rightarrow$ masaba 7; harflardan beril:

$$N_3 = 8 \cdot 7 \cdot \binom{9}{6} \cdot 417 = N_1 = 1720.$$

первоначально: $N = N_1 + N_2 + N_3 = N_1 + N_1 \cdot 3 + N_1 =$
 $= 5 \cdot N_1 = 5 \cdot 1120 = 5600$ (человек)

Пример: $N = 5600$ часов

$$\sqrt{7} \quad |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$[(|x|-5)^2 + (|y|-5)^2] = 169 = 13^2$$

рассмотрим уравнение I.

$$\begin{aligned} |x+y+5| &\geq x+y+5 \\ + |x-y+5| &\geq x-y+5 \end{aligned}$$

$$10 \geq |x+y+5| + |x-y+5| \geq 2x+10 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0;$$

$$\begin{aligned} + |x+y+5| &= |-x-y-5| \geq -x-y-5 \\ + |x-y+5| &= |-x+y-5| \geq -x+y-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \geq |x+y+5| + |x-y+5| &\geq -2x-10 \Rightarrow -2x-10 \leq 10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2x \leq 20 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \geq -10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + |x+y+5| &\geq x+y+5 \\ + |x-y+5| &= |y-x-5| \geq y-x-5 \end{aligned}$$

$$10 \geq |x+y+5| + |x-y+5| \geq 2y \Rightarrow y \leq 5;$$

$$\begin{aligned} + |x+y+5| &= |-x-y-5| \geq -x-y-5 \\ + |x-y+5| &\geq x-y+5 \end{aligned}$$

$$10 \geq |x+y+5| + |x-y+5| \geq -2y \Rightarrow y \geq -5. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-10; 0], y \in [-5; 5]. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для любых x, y , которые подпадают под уравнение I верно, что $x \in [-10; 0]; y \in [-5; 5]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассмотрим уравнение II. Из I мы знаем,
что $x \leq 0 \Rightarrow (|x| - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 13^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-x - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 13^2 \Rightarrow (x + 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 13^2.$$

при $y \geq 0$. ~~$\Rightarrow (x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 13^2$. Это график~~
~~окружности с центром в точке $(-5; 12)$ и~~
~~радиусом 13, но ещё имеем условие, что $x \leq 0$~~
 ~~$y \geq 0$.~~

уравнение II: $(x + 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 13^2$

из I мы знаем, что $x \in [-10; 0] \Rightarrow x + 5 \in [-5; 5]$

$$\Rightarrow (x + 5)^2 \leq 5^2 = 25 \Rightarrow (|y| - 12)^2 = 13^2 - (x + 5)^2 \geq 13^2 - 5^2 = 12^2$$

$$(|y| - 12)^2 \geq 12^2 \Rightarrow \begin{cases} |y| - 12 \geq 12 \\ |y| - 12 \leq -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y| \geq 24 \\ |y| \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y| \geq 24 \\ y = 0 \end{cases}$$

из I мы знаем, что $y \in [-5; 5] \Rightarrow |y| \leq 5 \Rightarrow$
 $|y| \geq 24 \in \emptyset \Rightarrow y = 0$. при $y = 0$

$$(x + 5)^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow (x + 5)^2 = 5^2 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 5 \\ x + 5 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

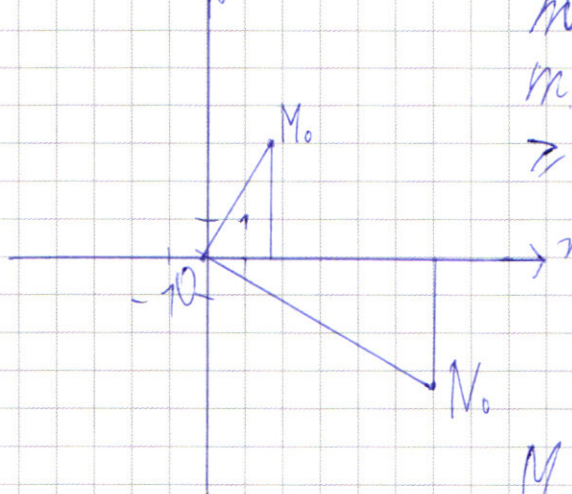
подставим в I.

$$|x + 5| + |x + 5| = 2|x + 5| \leq 10 \Rightarrow |x + 5| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 \leq 5 \\ x + 5 \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Rightarrow x \in [-10; 0]$$

при $x = -10$: $5 \leq 5$ при $x = 0$: $5 \leq 5$ $\Rightarrow (x, y) \in (-10; 0); (0; 0)$

Ответ: $(x, y) \in (-10; 0); (0; 0)$

д) Будем отмерять угол от Ox против часовой стрелки. Когда углы $MOx = \alpha$ и $NOx = \beta$ равны, тогда рассмотрим треугольник MNO .

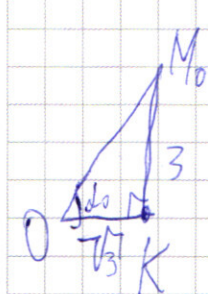


$$m.k. \quad MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2 OM \cdot ON \cdot \cos(\alpha + \beta)}$$

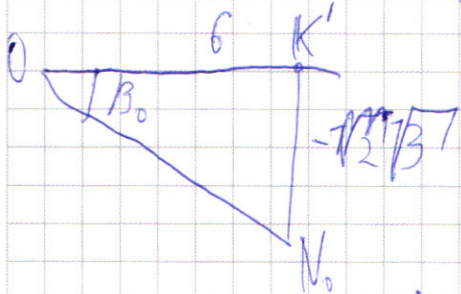
$$\geq \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2 OM \cdot ON} = |OM - ON|$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

но условием углы $MOx = \alpha$ и $NOx = \beta$



$$\tan \alpha_0 = \sqrt{3}; \alpha_0 > 0; \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{3}.$$



$$\tan \beta_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \beta_0 < 0; \beta_0 > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta_0 = -\frac{\pi}{6}.$$

но условием $|V_M| = |V_N|$.

$$|V_M| = |V_N| \cdot R_M; |V_N| = |V_M| \cdot R_N \Rightarrow |V_M| = |V_N| \cdot \frac{OM_0}{ON_0} = |V_N| \cdot \frac{\sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2}}{13^2 + (\sqrt{3})^2} = 2|V_N| \Rightarrow V_M = -2V_N$$

$$\alpha_t = \alpha_0 + \omega_M t = \alpha_0 - 2\omega_N t = \frac{\pi}{3} - 2\omega_N t = \frac{\pi - 6\omega_N t}{3}$$

$$\beta_t = \beta_0 + \omega_N t = -\frac{\pi}{6} + \omega_N t = \frac{-\pi + 6\omega_N t}{6}$$

$$= \alpha_t + \beta_t = \frac{2\pi - 12\omega_N t}{6} + \frac{\pi + 6\omega_N t}{6} = \frac{3\pi - 6\omega_N t}{6} = \frac{\pi}{2} - \omega_N t$$

$$= 2\pi n \Rightarrow 3\omega_N t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3\omega_n t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \omega_n t = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_t = \beta_0 + \omega_n t = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{2\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\beta_t \in [0; 2\pi] \Rightarrow \beta_t \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

$$ON_0 = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 4 \cdot 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow (x_t; y_t) \in (ON_0 \cdot \cos \beta_t; ON_0 \sin \beta_t) = (4\sqrt{3} \cos \beta_t; 4\sqrt{3} \sin \beta_t)$$

$$N_t \in \left\{ (4\sqrt{3} \cos 0; 4\sqrt{3} \sin 0); (4\sqrt{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right); 4\sqrt{3} \sin \left(\frac{2\pi}{3}\right)); \right. \\ \left. (4\sqrt{3} \cos \left(\frac{4\pi}{3}\right); 4\sqrt{3} \sin \left(\frac{4\pi}{3}\right)) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_t \in \{ (4\sqrt{3}; 0); (-6; 2\sqrt{3}); (-6; -2\sqrt{3}) \}$$

$$\text{Ответ: } N_t \in \{ (4\sqrt{3}; 0); (-6; 2\sqrt{3}); (-6; -2\sqrt{3}) \}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

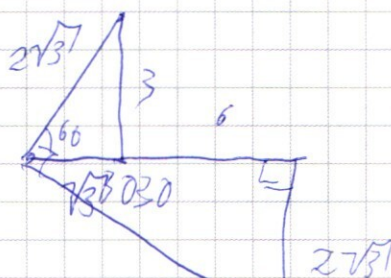
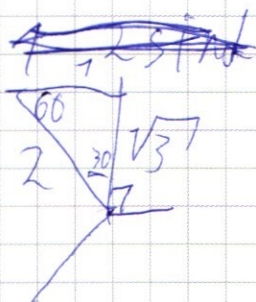
~~$$(2 \sin \alpha - 7)(2 \cos \alpha + 7) = -7 \quad \alpha = 70$$~~

~~$$(1 - 2 \sin \alpha)(1 + 2 \cos \alpha) = 1$$~~

~~$$2 \cos \alpha = 2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$~~

~~$$4\sqrt{3} \sin \alpha$$~~

~~$$4\sqrt{3} \cos \alpha$$~~



$$\cos(120) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

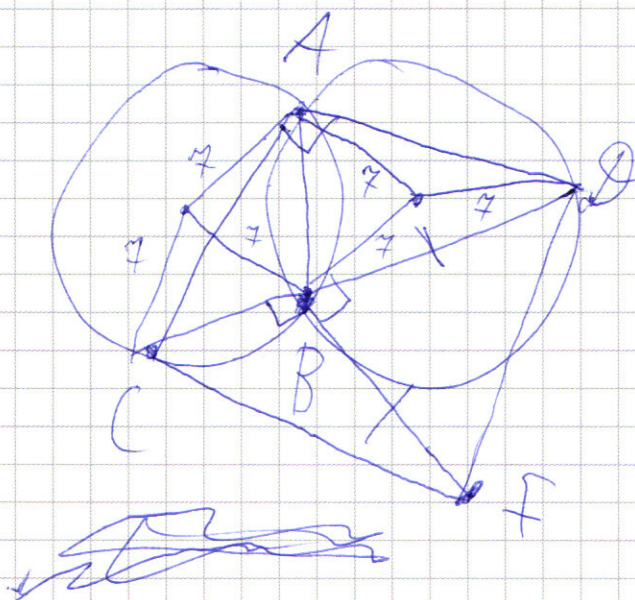
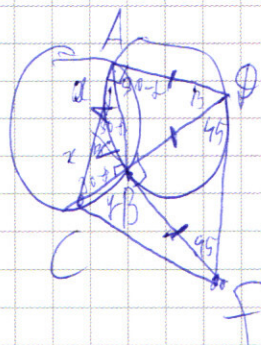
$$\sin(120) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(240) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(240) = -\frac{1}{2}$$

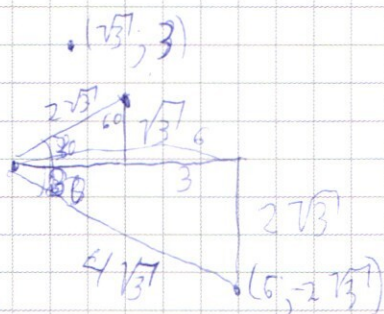
$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{-4}{2} \cdot 3 = -2 \cdot 3 = -6$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



$$\frac{y}{x} = \frac{x+d}{y+8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$V_1 = V_2 \quad 2R_1 = R_2$$

$$W_1 R_1 = W_2 R_2$$

$$W_1 R_1 = 2 W_2 R_1$$

$$W_1 = 2 W_2$$

$$\begin{cases} a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3abx + ab(a-b)y = a \\ 3by + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$a \neq 0, a \neq 1, ab = 2$$

$$\begin{cases} a < b \\ ab = -2 \\ a = a+3 \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \\ a = -1, -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b+3 \\ b^2 + 3b - 2 = 0 \\ (b+2)(b-1) = 0 \\ b = -2, 1 \\ (a, b) = (-1, 2), (-2, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \neq 0 \\ a \neq b \\ a \neq 0 \\ 2(a-b) = \frac{a}{a-b} \\ a(a-b)^2 = 9 \\ |a-b| = 3 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(a-b)}{3b} = a \\ \frac{6}{(a-b)b} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 3ab \\ 6 = a^2b(a-b) \Rightarrow 3ab = \frac{6}{a-b} \\ ab = \frac{6}{3a-b} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

$$x = -5 \quad \text{---} \Rightarrow x \neq -5$$

$$+ \frac{125}{25} - \frac{125}{45} - \frac{16}{80}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$x^3-16x+25$$

$$-125 + 80 + 25 = -20$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$$

$$x \geq 2$$

$$x^3-16x+25 = 4(x-2)^2 = 4x^2-16x+16$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 2$$

$$D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$D = 1 - 8$$

$$2(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} + \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}) + \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} =$$

$$1 + 1 = 2x$$

$$1 + 1 = 2x$$

$$6x^4(x+1)^2 - 5x^2(x+1)$$

$$1 + 1 = 4 \geq 0$$

$$6(x^2)^2 - 5x^2y + y^2 = (3x^2 - y)(2x^2 - y) = 0$$

$$D = 25y^2 - 24x^2y^2 \quad x = \frac{5y \pm 4}{2 \cdot 6} = \left(\frac{4}{12}, \frac{6}{12} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$$

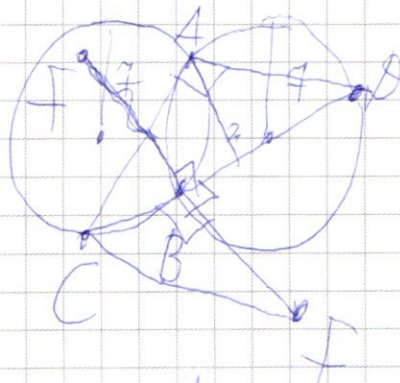
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P - \text{ЗМ} \Rightarrow N(\overline{a b c d e f g h}) ; \Rightarrow$
 $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 7000$

$$7000 = 7000 \cdot 1 = 10^3 \cdot 7 = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7$$

$$2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 = 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} \times 1720 \\ 3 \\ \hline 3360 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 1720 \\ 5 \\ \hline 5600 \end{array}$$



$$\begin{cases} y \geq -5 \\ y \leq 5 \\ x \leq 0 \\ x \geq -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &|-x-y-5| + |y-x-5| \leq 10 \\ &-2x-10 \leq 10 \\ &-2x \leq 20 \\ &-x \leq 10 \\ &x \geq -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &\geq |-x-y-5| + |x-y-5| \geq -2y \\ -2y &\leq 10 \\ -y &\leq 5 \\ y &\geq -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y &\in [-10; 10] \\ (x+5) &\pm y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y \in [-5; 5] \Rightarrow \\ &x \in [-10; 0] \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+y \in [-15; 5] \\ &x+y+5 \in [-10; 10] \\ &x+5 \in [-5; 5] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 13^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x+y+5| &\geq x+y+5 \\ |x-y+5| &\geq x-y+5 \end{aligned}$$

$$I \geq 2y \quad x+5 \in [-5; 5]$$

$$2y \leq 10 \quad (x+5)^2 \leq 25$$

$$y \leq 5$$

$$-y \geq -5$$

$$\begin{aligned} (y-12)^2 &\geq 144=12^2 \\ (y-12)^2 &\geq 12^2 \\ |y-12| &\geq 12 \\ y-12 &\geq 12 \\ 12-y &\geq 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y &\geq 0 \\ y &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x+5 \in [-5; 5]$$

$$y \in [-5; 5]$$

$$|x+y+5| \geq x+y+5$$

$$|x-y+5| \geq x-y+5$$

$$I \geq 10+2x$$

$$10+2x \leq I \leq 10$$

$$\begin{aligned} x &\leq 0 \\ -x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$|x-y+5|$$

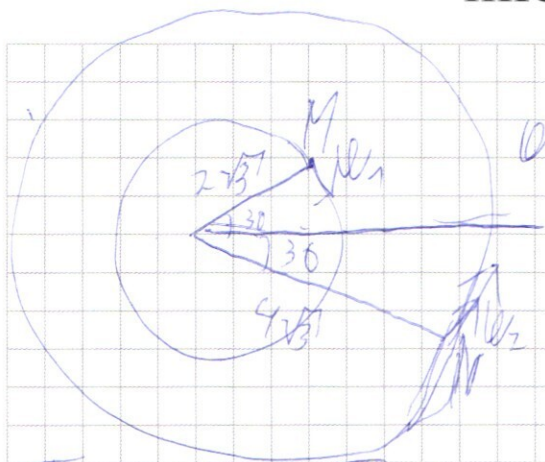
$$|-x+(-y)-5|$$

$$|-x+(-y)-5| = -x-y-5$$

$$-x > 0; -y-5 \geq 5-5=0 \Rightarrow$$

$$-x-y-5 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\omega_1 R_1 = V_1 = V_2 = \omega_2 R_2 = 2\omega_2 R_1$$

$$R_2 = 2R_1 \quad \omega_1 = 2\omega_2$$

~~$$M = 2\sqrt{3} \cdot 5$$~~

$$\omega_2 t = \alpha$$

$$\varphi_0 = \pi$$

$$30 = \frac{\pi}{6}$$

~~$$\frac{\pi}{6} - 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\omega_1 t = \varphi(M_t) = 30 - \omega_1 t = 30 - 2\omega_2 t$$~~

~~$$\alpha - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \omega_2 t = \varphi(N_t) = -30 + \omega_2 t$$~~

$$\varphi(M_t) - \varphi(N_t) = 2\pi \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(M_t) = \varphi(N_t) + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{6} - 2\omega_2 t = \varphi(N_t) + 2\pi n = -\frac{\pi}{6} + \omega_2 t + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{3} = 3\omega_2 t + 2\pi n = 3\alpha + 2\pi n$$

$$-2\pi n + \frac{\pi}{3} = 3\alpha$$

$$3\alpha = \frac{\pi}{3} - 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k$$

$$\varphi(N_t) = \alpha - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} k$$

$$= -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} k$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{23\pi}{18} \right]$$

$$\varphi \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -70^\circ \\ 70^\circ \\ 230^\circ = 180^\circ + 50^\circ \end{array} \right\}$$

$$\frac{U}{I_P} = 70^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha = \sin(3\alpha) = \sin(4 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha)$$

$$4 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cos^2 \alpha + 2 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1$$

$$2 \cos^2 \alpha = 2 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= -3 + 4 \cos^2 \alpha = 4 - 4 \sin^2 \alpha - 3 = 1 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 4 \cos^2 \alpha - 3 = (4 \cos^2 \alpha - 1) - 2 = \frac{\sin^2(3\alpha)}{\sin^2 \alpha} = 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$$

$$\alpha = 70^\circ$$

$$\sqrt{3} \sin \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$0 = 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \sin \alpha (\cos \alpha + 0.5) - (\cos \alpha + 0.5) \Rightarrow$$

$$(2 \sin \alpha - 1)(\cos \alpha + 0.5) = -1$$