

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

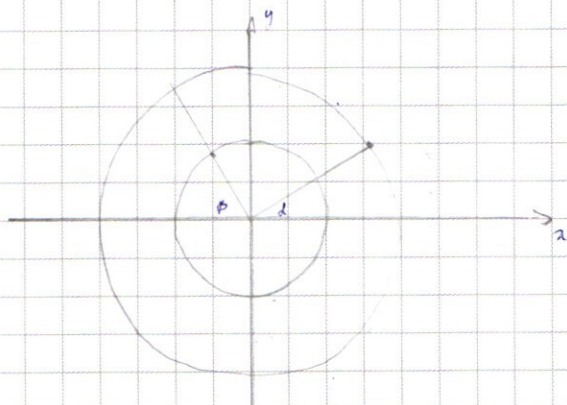
№1

Если муравей и жук движутся по окружностям с центрами в $(0;0)$, то их движение можно задать формулами $x^2 + y^2 = m^2$ и $x^2 + y^2 = g^2$ соответственно.

Поскольку, т.к. начинают они с точек M_0 и N_0 , то
 ~~$(-1; \sqrt{3})$~~ $(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = m^2$ и $(2\sqrt{3})^2 + (2)^2 = g^2 \Rightarrow m=2; g=4$ ($m, g > 0$)

Т.к. их скорости равны, то (m и g - радиусы окружностей их движения)

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{360^\circ}{\frac{2\pi m}{v}} \\ \omega_g = \frac{360^\circ}{\frac{2\pi g}{v}} \end{cases} \Rightarrow \omega_m = 2\omega_g, \text{ где } \omega - \text{угловая скорость.}$$



Заметим, что, по условию
 $\sin \alpha = \frac{2}{g}; \cos \beta = \frac{m}{g} \Rightarrow$
 $\rightarrow \alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ$ ($\alpha < 90^\circ$, т.к. $2, 2\sqrt{3} > 0$)

$$180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

Найдём I встречу:

$$\frac{90^\circ}{\omega_m + \omega_g} \cdot \omega_g + \alpha = 60^\circ \text{ (угол считаем от } O x \text{ против часовой)}$$

II встреча:

(До встречи или нулевого сдвига 360°)

$$\angle_I = \frac{360^\circ}{w_g + w_m} \cdot w_g + \angle_I = 180^\circ \quad (\angle_I - \text{угол при I встрече})$$

III встреча:

$$\angle_{III} = \frac{360^\circ}{w_g + w_m} \cdot w_g + \angle_{II} = \frac{360^\circ}{3w_g} \cdot w_g + \angle_{II} = 300^\circ$$

IV встреча:

$$\angle_{IV} = \frac{360^\circ}{w_g + w_m} \cdot w_g + \angle_{III} = 420^\circ, \text{ но, т.к. } 420^\circ > 360^\circ, \text{ то}$$

$$\angle_{IV} = 60^\circ = \angle_I, \text{ значит дальнейшие углы встреч зайдутся.}$$

з тогда жук и муравей ~~и~~ встретятся на углах $60^\circ; 180^\circ$ и 300°

Ответ: $60^\circ; 180^\circ; 300^\circ$ (Координаты жука $A_1(2; 2\sqrt{3}); A_2(-4; 0); A_3(2; -2\sqrt{3})$ соответственно)

(Очевидно, что наименьшее расстояние между муравьем и жуком — $d = 2$, когда они находятся на одной луче с началом в ~~центре~~ $(0; 0)$).

~2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

Если $b = 0$, то $0 = 1 \Rightarrow$ решений нет.

Тогда, из 1 равенства $y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$

Подставим во 2:

$$48bx + ab(a+b) - 3(a+b)^2bx = 12$$

$$48bx - 4x = 48bx - 3(a+b)^2bx = 12 - ab(a+b)$$

$$x(3(a+b)^2b - 48b) - ab(a+b) = 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $3(a+b)^2b - 48b = 0$, а $ab(a+b) - 12 \neq 0$, то
решений нет.

Если $3(a+b)^2b - 48 \neq 0$, то решение одно, т.к.
 $x = \frac{ab(a+b) - 12}{3(a+b)^2b - 48}$ и $y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$, а $12 \neq 0$.

Тогда, $3(a+b)^2b - 48b = 0$ и $ab(a+b) - 12 = 0$
Т.к. $b \neq 0$, то

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \\ ab = -3 \\ a+b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ a = 3 \\ b = 1 \\ a = -1 \\ b = -3 \\ a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Заметим, что если $ab = 3$ и $a+b = 4$, то

$$\begin{cases} 12x + 12y = a \\ 4bx + 4by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 12y = a \\ 12x + 12y = a \end{cases} \text{ - бесконечно много решений}$$

Т.к. $ab = -3$; $a+b = -4$

$$\begin{cases} -12x + 12y = a \\ 4bx - 4by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 12y = a \\ -12x + 12y = a \end{cases} \text{ - бесконечно много решений}$$

Ответ: пар $(a; b)$: $(1; 3); (3; 1); (-3; -1); (-1; -3)$
и 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x+2 = \sqrt{x^3-x+10} \end{cases}$$

Если $x = -3$, то $\sqrt{x^3-x+10} < 0 \Rightarrow \sqrt{x^3-x+10} \notin \mathbb{R}$

$$x+2 = \sqrt{x^3-x+10}$$

$$x^2+4x+4 = x^3-x+10$$

$$0 = x^3-x^2-5x+6$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}, \text{ если } x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \text{ то } x+2 < \sqrt{13} > 3$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 < \left(\frac{-1-3}{2}\right)^3 = -8$$

Пусть $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) + 10 = \frac{-1+3\sqrt{13}-3\cdot 13-13\sqrt{13}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 10 =$$

$$= -5 - 2\sqrt{13} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 10 = 10 - 1,5\sqrt{13} - 4,5, \text{ то}$$

$$5,5 > 1,5\sqrt{13}$$

$$121 > 9 \cdot 13 = 117, \text{ значит } x^3-x+10 > 0$$

Пусть $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

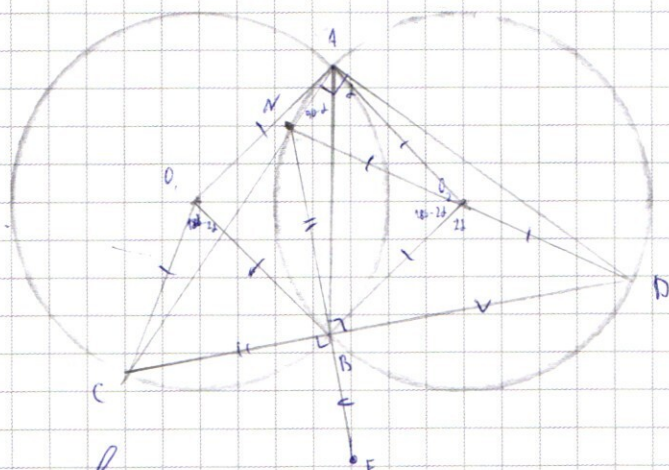
$$x^3-x+10 = \frac{-1+3\sqrt{13}-3\cdot 13+13\sqrt{13}}{8} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} + 10 =$$

$$= 1,5\sqrt{13} + 10 - 4,5 > 0$$

Ответ: $x = 2; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NG



$\neg AD$ и $\neg AC$ - глуп.,
на которых не лежит
 B , тогда

$$\angle APD = 2\angle ABD = 360^\circ -$$

$$- 2\angle ABC = 360^\circ - \angle AC \Rightarrow$$

=> хотя бы одна из

только одна из точек лежит внутри $\triangle ABC$ (либо обе на сторонах). Пусть O_2 .

Morgan $\sim ABC = \sim AD \Rightarrow \angle AO_1C = \angle AO_2D \Rightarrow \Delta AO_1C = \Delta AO_2D$

3 Проведем перпендикуляр к CD через B , тогда он пересечет окружность O_2 в другой точке N . $BN \perp$

$\angle DBN = 90^\circ$, то DN - диаметр $\odot D, O, N$ - на одной

красной. Пусть $\angle BO_2D = 2\alpha$, тогда $\angle NO_2B = 180^\circ - 2\alpha$;

$$\begin{aligned} \angle BAD = \alpha; \text{ m.k. } \angle CAD = 90^\circ; \text{ m.w. } \angle CAB = 90 - \alpha \Rightarrow \angle CDB = 180 - 2\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle CDB = \angle NDB \Rightarrow \triangle CDB = \triangle NDB \Rightarrow NB = CB. \end{aligned}$$

Giải. NB = CB; BD = BF và $\angle NBD = \angle CBF = 90^\circ$, mà

$$\triangle CBF = \triangle NBD \Rightarrow CF = ND = 18$$

Ombem: $CF = 18$

№5.

$$14000 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

III. к. $2 \cdot 5 \geq 10$; $2 \cdot 7 \geq 10$, то наборы цифр могут быть только такими (все остальные ^{цифры} - это!)

1) 2 2 2 5 5 7

2) 2 4 5 5 7

3) 8 5 5 7

1) Всего способов выбрать такие числа -

$$- C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = 56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$$

2) Всего таких чисел -

$$C_8^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 28 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 28 \cdot 12 \cdot 10 = 3360$$

3) Всего чисел -

$$C_8^2 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

Ответ: $1680 + 840 + 3360 = 5880$

№4

$$\textcircled{1} \int |x-3+y| + |x-y+3| \leq 6$$

$$\textcircled{2} \int (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25$$

① 1) $x-y \geq 3$; $x+y \geq 3$

$$2x-6 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 6$$

2) $x-y \leq 3$; $x+y \geq 3$

$$2y \leq 6 \Leftrightarrow y \leq 3$$

3) $x-y \geq 3$ $x+y < 3$

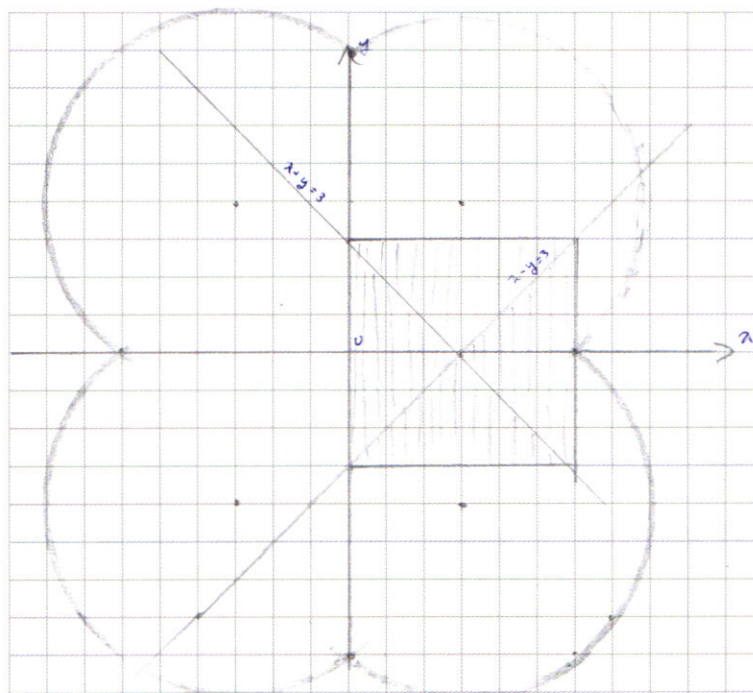
$$-2y \leq 6 \Leftrightarrow y \geq -3$$

4) $x-y < 3$; $x+y < 3$

$$-2x+6 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 2x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



(график $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2$ -
это окружность с
центром в $O(3; 4)$ и
радиусом 5)

$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$ равносильно $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, при $x, y \geq 0$

Значит, это график $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, у которого
сделаем симметрично относительно Ox , затем Oy
I четверти.

П.к. данные графики пересекаются только в
точке $X(6; 0)$, то это и есть единственное решение
системы.

Ответ: $x=6; y=0$.

н4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

1) $x \geq 1$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(2x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1) \geq 0$$

П.к. Δ дискриминанты $2x^2-x+1$ и x^2-x+1 соответственно равны $D_1 = 1-8 < 0$ и $D_2 = 1-4 < 0$, то

$2x^2-x+1 \geq 0$ и $x^2-x+1 \geq 0$ при всех x , т.е. коэффициенты при x^2 положительны.

Тогда,

$$(2x^2-x+1)(x^2-x+1) \geq 0 \text{ при всех } x \text{ (} x \geq 1 \text{)}$$

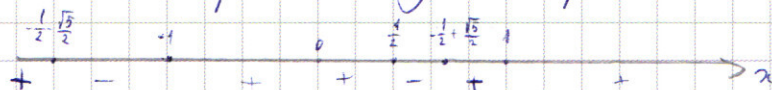
2) $x < 1$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(2x^2+x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

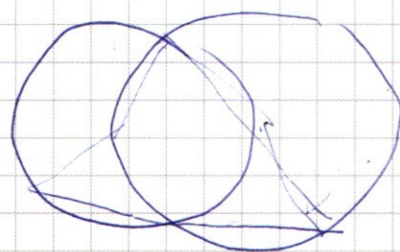
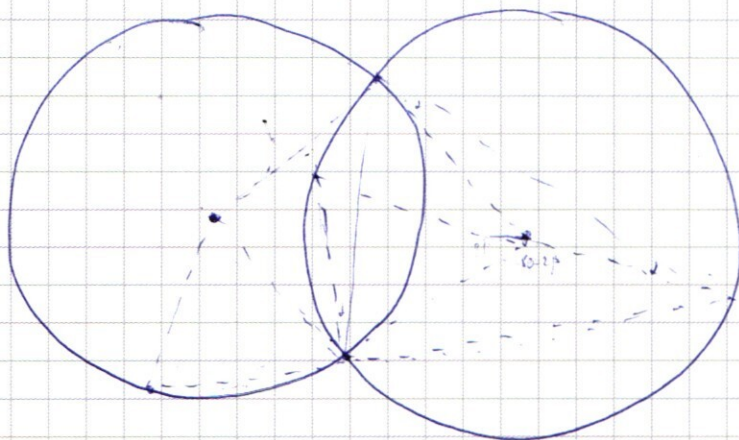
$$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$

Посмотрим на знакопеременности данного многочлена:



Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \geq 1$$

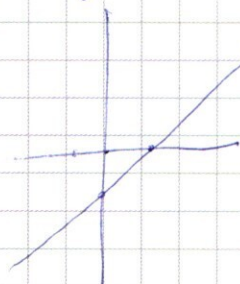
$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \{ x - y + 3 \geq 0$$

$$8 - 3 + 4$$

$$(2x+1)(2x^3$$

$$(2x^2+x+1)(x^2+3x+1)$$

$$(2x^2+x+1)(x^2-x+1)$$



$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

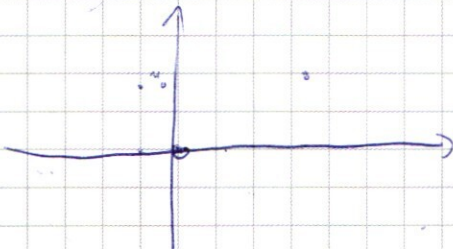
$$(2x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) > 0$$

$$\left(x - \left(-\frac{-1 \pm 3}{4}\right)\right) \left(x - \left(-\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$\begin{matrix} (x+1) & (2x-1) & \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

$$1,5 > \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x^2 + y^2 = m^2$
 $x^2 + y^2 = g^2$
 $m = 2$
 $g = 4$

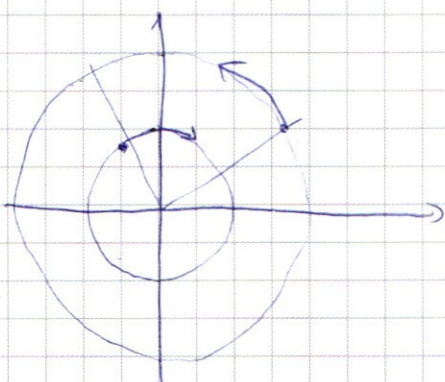
$(x+2)(x^2-2x+3)$
 $(x-2)(x^2+x-3)$
 $x^2+4x+4 = x^2-x+16$
 x^3-x^2-5x+6
 $8-4-16$

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
 $2 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 7$
 $4 \ 2 \ 5 \ 5 \ 7$
 $8 \ 5 \ 5 \ 7$

$(x+5)(x+2)(x+1)$
 $1+12$
 $-1+\sqrt{13}$
 2

$3ax+12y-aby-b^2y = a - \frac{3}{4}$
 $d = 3$
 $\frac{3c^2x+12y}{4d^2x+cd^2y} = 1$

$(\sqrt{13}-1)^3 = 13\sqrt{13}-3 \cdot 13 \cdot 1 + 3 \cdot 13 - 1$
 $= 2\sqrt{13}-5$
 $1,5\sqrt{13}-4,5 = 1,5\sqrt{13}+5,5$



$\frac{q}{2} = t_m$
 360
 t_m
 $y = \frac{1-4bx}{(a+b)b}$
 $3(a+b)$
 $3(a+b)x + \frac{12-48bx}{(a+b)b} = a$
 4200
 $(a+b)ab^2y + 4aby = (a+b+4)aby - 3(a+b+4)xy$
 $8(a+b+4)(ab-3) = a^2b + ab^2 + 4ab + 3a - 3b + 12y =$
 $= \frac{a-4abx}{y} + \frac{a-3ax-3bx}{y} - 4ab-3a-3b$
 $= \frac{2a}{y} - (4ab+3a+3b) \left(\frac{x+y}{y} \right)$
 $121 > 9 \cdot 13 = 117$
 $11 > 3\sqrt{13}$
 $5,5 > 1,5\sqrt{13}$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b}$$

$$2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$C_6^2 \cdot 3 = 60$$

$$C_6^3 \cdot 3 = 60$$

$$12x + 12y = a$$

$$4bx + (a - 4b)y = 1$$

$$ab(a+b) - 3(a+b)^2xb = 12 - 48bx$$

$$ab(a+b) - 12 = 3(a+b)^2b - 48bx$$

$$x = \frac{ab(a+b) - 12}{3(a+b)^2b - 48b}$$

$$48b - 4b$$

$$3(a+b)^2 = 4$$

$$a+b = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3}x + 12y = a$$

$$4bx + \frac{2}{\sqrt{3}}by = 1$$

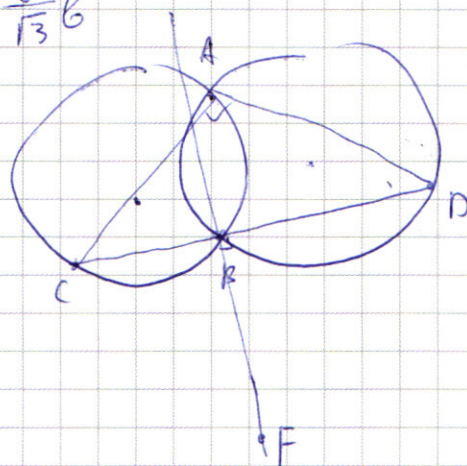
$$2\sqrt{3}x + 12y = \frac{2}{\sqrt{3}} - b$$

$$x = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - b - 12y}{2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}by}{4b}$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}}b - 4b^2 - 48by = 2\sqrt{3} - 4by$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}}b$$



$$ab = 3$$

$$a+b = 1$$

$$a+b = 1$$

$$x+y = \frac{a}{12}$$

$$4bx + 4by = 1$$

$$\frac{4ba}{3} = 1$$

$$ab = 3$$

