

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\frac{\sqrt{x^3-16x+25}}{2} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$$

$$x^3-16x+25 = (2x-4)^2$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2+16-16x$$

$$\begin{cases} x^3-4x^2+9=0 \\ x^3-16x+25 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3-4x^2+9 \leq x^3-16x+25$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4x^2-16x+16 \\ 0 &\leq (2x-4)^2 \end{aligned}$$

$$abcdefgk = 4000$$

$$\begin{aligned} 4000 &= 4 \cdot 1000 = 4 \cdot 5 \cdot 200 = 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 100 = \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = \\ &= 4 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 1 \end{aligned}$$

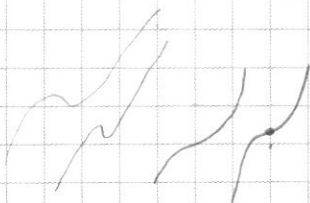
$$\begin{aligned} 6 \cdot 4 + 4 - 2 + 5 - 5 + 1 &= \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^3+x^2-3x+1 &\leq 0 \\ 6x^3-3x &\leq -1-x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3^3 \cdot C_5^3 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 \\ C_2^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \\ C_3^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \end{aligned}$$

$$6x^3+1=$$



$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_8^3$$

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$6 \cdot \frac{1}{6^3} + \frac{1}{36} - \frac{3}{6} + 1 =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{18}{36} + 1 =$$

$$6 \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9} - 1 + 1 =$$

$$6x^3-3x+x^2+1 = 3x(x^2-1)+x^2+1$$

$$6 \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{36} + \frac{3}{6} + 1 =$$

$$= -\frac{1}{36}$$

N7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

II случай:

$$\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ x-y+5 \leq 0 \\ -x-y-5-x+y-5 \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \\ -x-10 \leq 0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-5 \geq x+5 & -2x \geq 10 \\ x \geq -20 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq -20 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\text{I случай: } \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \\ x+y+5+x-y+5 \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -5-x \\ y \leq x-5 \\ 2x+10 \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5 \geq -5-x \\ x \leq 0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -x \\ x \leq 0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 25 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ (|y|-12)^2 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 24 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{эти корни побочные,} \\ \text{т.к. не удовн. двум} \\ \text{первым неравенствам} \end{array} \right)$$

III
(x,y) = (0;0)

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)$$

$$x^3-16x+25 = (2x-4)^2$$

$$x^3-16x+25-4x^2-16+16x=0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$24-4 \cdot 9+9=24-36+9=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+9 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & \\ -x^2+9 & \\ \underline{-x^2+3x} & \\ -3x+9 & \\ \underline{-3x+9} & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3-4x^2+9 \\ x^3-3x^2 \\ \hline -x^2+9 \\ -x^2+3x \\ \hline 3-3x \end{array}$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x^3-3x^2+3x+9-3x-x^2=x^3-4x^2+9$$

$$x^3-16x+25 \geq x^3-4x^2+9$$

$$4x^2-16x+16 \geq 0$$

$$4(x^2-4x+4) \geq 0$$

$$4(x-2)^2 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} = -\frac{2(a-b)}{6}x + \frac{a}{6}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} = -\frac{3b}{(a-b)b}x + \frac{1}{(a-b)b}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b}$$

$$a(a-b)b = 6$$

$$\begin{cases} ab(a-b) = 6 \\ (a-b)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\frac{36}{a^2b^2} = 9$$

$$a^2b^2 = 4$$

$$\begin{cases} ab = 2 \\ ab = -2 \end{cases}$$

$$(0 - \sqrt{3})^2 + (0 - 3)^2 = R_1^2$$

$$3 + 9 = R_1^2$$

$$R_1 = 2\sqrt{3}$$

$$(0 - 6)^2 + (0 + 2\sqrt{3})^2 = R_2^2$$

$$36 + 12 = R_2^2$$

$$R_2^2 = 48$$

$$R_2 = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{36}{(a-b)b} = \frac{2(a-b)}{6}$$

$$18 = 2(a-b)^2$$

$$(a-b)^2 = 9$$

$$a-b = \frac{6}{ab}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -5-x \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$b \neq 0$$

$$a=0?$$

$$x \geq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 + 2x + 1 - 4x^2 \geq 0$$

$$6 - 5 - 4 + 2 + 1 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$6.$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 : x-1 \\ \underline{6x^4 - 6x^3} \\ -x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ -3x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1$$

$$6x^3 - 3x + (x-1)(x+1)$$

$$3x(2x-1)$$

$$(b+3)b = 2$$

$$(b-3)b = -2$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

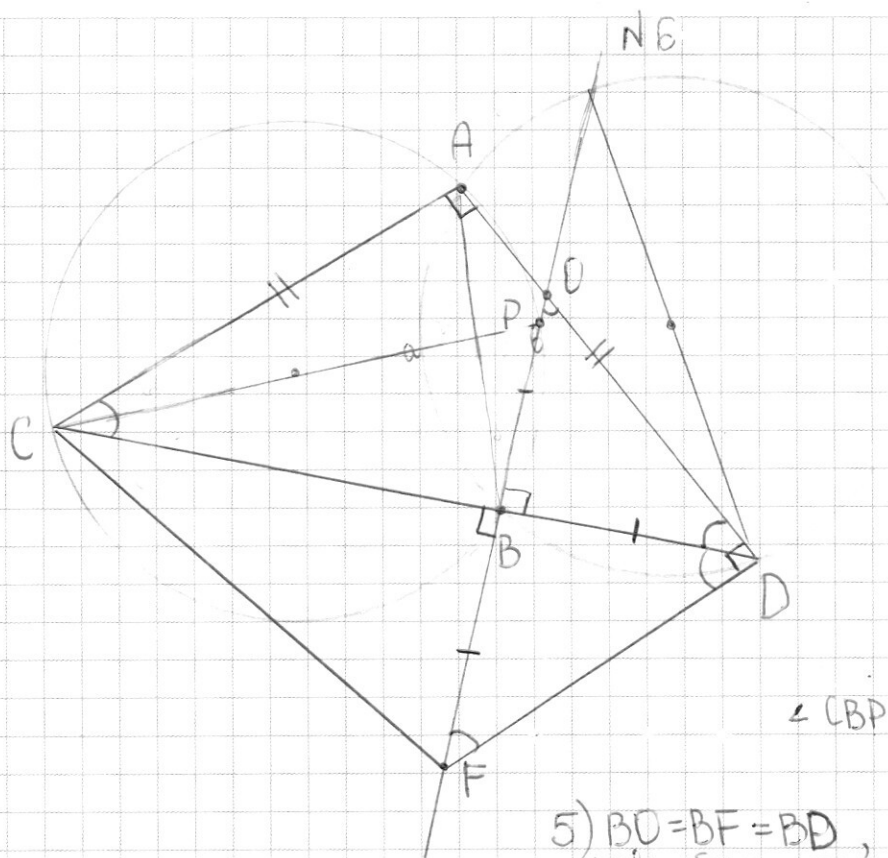
$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(b-1)(b-2) = 0$$

$$\begin{cases} b=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ a=-1 \end{cases}$$



1) $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (по св-ву точек перес. двух окружн.), т.к. R окружн. одинаков, то $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADB = 45^\circ$ (опир. на равные дуги) $AC = AD$ (углы при осн. равны)

2) $\triangle CAD \sim \triangle FBD$, т.к. $\sphericalangle B = \sphericalangle A = 90^\circ$, а также эти треуго. равнобедр. по док.) Значит, $\sphericalangle BFD = \sphericalangle BDF = 45^\circ$

3) Продолжим BF.

4) CP - диаметр 1-ой окружности, т.к. $\sphericalangle CBP = 90^\circ$
 $\sphericalangle FCD = 45^\circ$

5) $BD = BF = BD$ т.к. это равнобедр. треуго. с провед. биссектр.

6) P совпадает с O. и лежит на W_1 . Тогда CB - высота и медиана в $\triangle FCP$. Следовательно $CF = CP = \text{диаметр (по док.)} = 2 \cdot 7 = 14$

Ответ: $CF = 14$

№4

• $x \geq -1$:

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

• $x \leq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 6x^2 + 5x^3 + 2x + 1 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

I сл.:
$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \\ 2x \leq 0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y \geq -5-x \\ y \leq x+5 \\ 2x \leq 0 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases} \quad \begin{cases} x+5 \geq -5-x \\ 2x \geq -10 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

II сл.:
$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 \leq 0 \\ (2) \quad x+y+5-x+y-5 \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -5-x \\ y \geq x+5 \\ (2) \quad 2y \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -5-x \\ y \geq x+5 \\ (2) \quad y \leq 5 \end{cases}$$

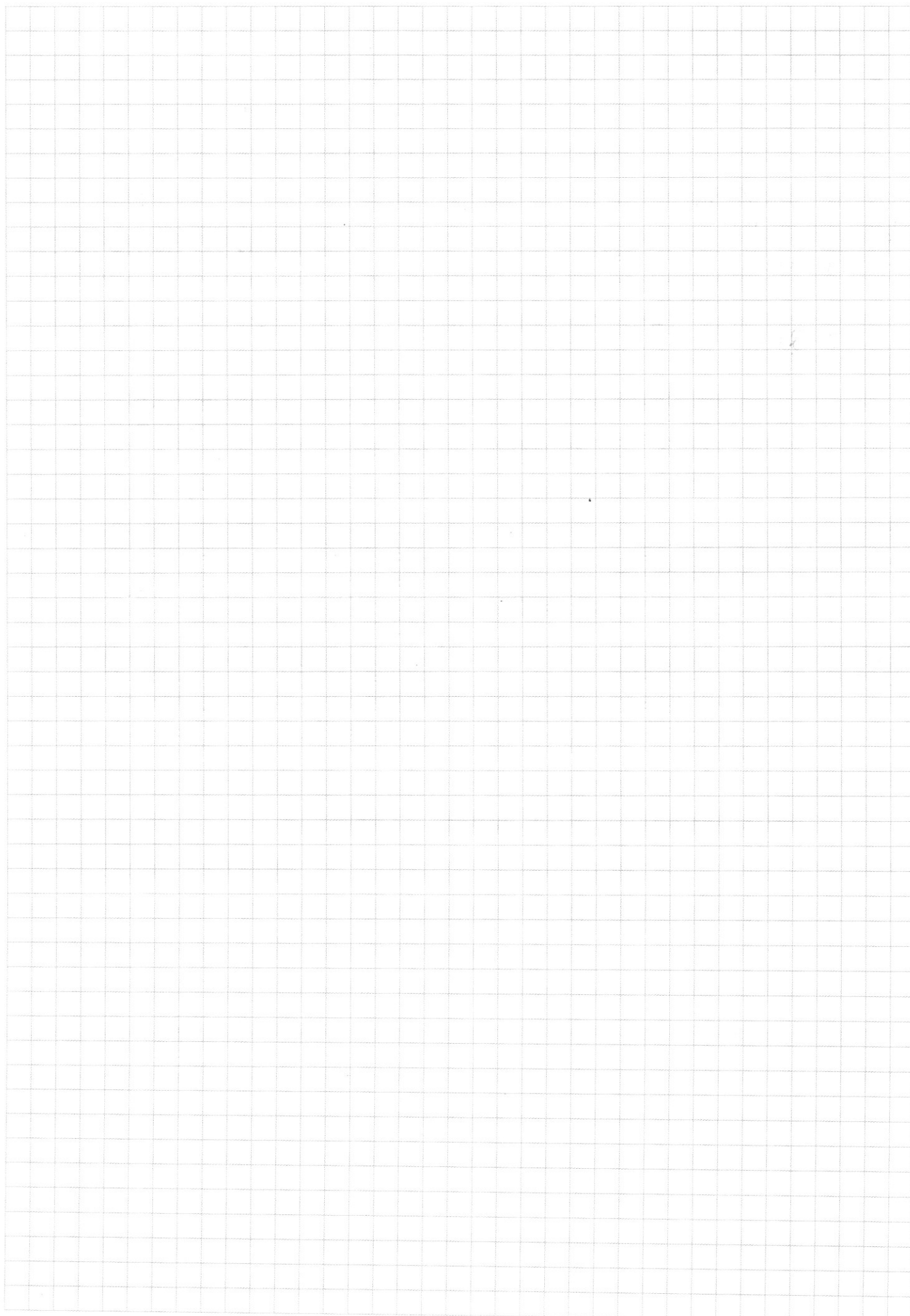
III сл.:
$$\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \\ (2) \quad -x-y-5+x-y+5 \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \\ (2) \quad 2y \geq -10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \\ (2) \quad y \geq -5 \end{cases}$$

IV сл.:
$$\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ x-y+5 \leq 0 \\ (2) \quad -x-y-5-x+y-5 \leq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \\ (2) \quad -2x \leq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \\ (2) \quad x \leq -10 \end{cases}$$

Теперь надо нарисовать графики:

1-ое уравнение будет иметь 4 разных графика,
а 2-ое уравнение — окружности с $R=13$ и
центрами в точках:

$$\begin{pmatrix} -5; -12 \\ -5; 12 \\ 5; 12 \\ 5; -12 \end{pmatrix}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 + 16 - 16x$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0, \text{ заметим, что } x=3 \text{ корень уравн.}$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \quad | \quad x-3 \\ x^3 - 3x^2 \quad | \quad x^2 - x - 3 \\ \hline -x^2 \quad | \quad -x^2 + 3x \\ -x^2 + 3x \quad | \quad -x^2 + 3x \\ \hline -3x + 9 \quad | \quad -3x + 9 \\ -3x + 9 \quad | \quad -3x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ x^2-x-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1-\sqrt{1+12}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{1+12}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Теперь проверим, все ли корни уравн. $x^3 - 4x^2 + 9 = 0$ попадают в область опред. изначального уравнения:

$$\begin{cases} x^3 - 16x + 25 \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 9 = 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$x^3 - 16x + 25 \geq x^3 - 4x^2 + 9$$

$$4x^2 - 16x + 16 \geq 0$$

$$4(x-2)^2 \geq 0$$

Всегда верно.

Ответ: $3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 $\sqrt{2}$

Эти уравнения явл. линейными, следовательно их графиками явл. прямые. А 2в прямые могут иметь бесконечно много решений только тогда, когда полностью совпадают.

$$(1) y = \frac{a-2(a-b)x}{6} = -\frac{(a-b)}{3}x + \frac{a}{6}$$

$$(2) y = \frac{1-3bx}{b(a-b)} = -\frac{3b}{b(a-b)}x + \frac{1}{b(a-b)}$$

Следовательно надо решить систему:

$$\begin{cases} \frac{a-b}{3} = \frac{3}{a-b} \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{b(a-b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)^2 = 9 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ ab \cdot 3 = 6 \\ a-b=-3 \\ ab \cdot 3 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ ab=2 \\ a-b=-3 \\ ab=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+3 \\ b(b+3)=2 \\ a=b-3 \\ b(b-3)=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+3 \\ \begin{cases} b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ a=b-3 \\ \begin{cases} b=1 \\ b=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ a=-2 \\ b=1 \\ a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right); (-2; 1);$
 $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right); (-1; 2).$

↓ 1

$$R_{\text{вн}}^2 = (0-\sqrt{3})^2 + (0-3)^2$$

$$R_{\text{вн}}^2 = 9+3=12$$

$$R_{\text{вн}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow L_{\text{вн}} = 2\pi R_{\text{вн}} = 4\sqrt{3}\pi$$

$$R_{\text{вн}}^2 = (0-6)^2 + (0+2\sqrt{3})^2$$

$$R_{\text{вн}} = 4\sqrt{3} \Rightarrow L_{\text{вн}} = 2\pi R_{\text{вн}} = 8\sqrt{3}\pi$$

Кратчайшее расстояние равно разности радиусов:

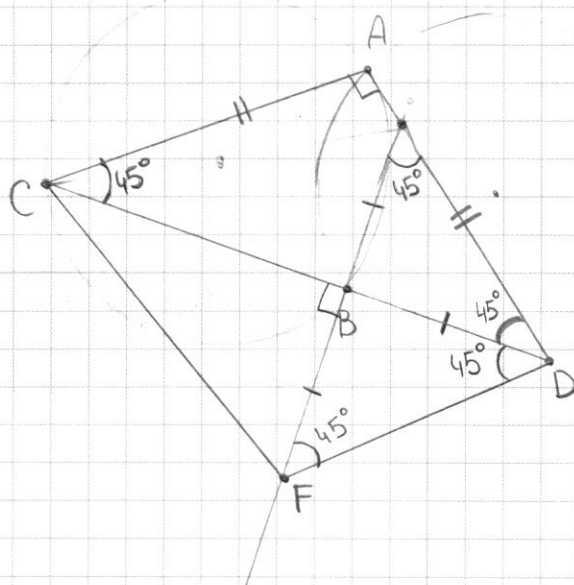
$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Формула расст. между двумя точками:

$$S = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Построим график 2-го уравнения: №4



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a-2(a-b)x}{6} \\ y = \frac{1-3bx}{(a-b)b} \end{cases}$$

$$\frac{a-2(a-b)x}{6} = \frac{1-3bx}{(a-b)b}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ 3b=2(a-b) \\ b(a-b)=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b=2(1-b) \\ b(1-b)=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b=2-2b \\ b-b^2=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5b=2 \\ b^2-b+6=0 \end{cases}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

115

Разложим 4000 на простые множ.:
 $4000 = 4 \cdot 2^3 \cdot 5^3$, т.к. множ. 4, а цифр 8, то ост. множ. единицы!

Так как число состоит из цифр, то наше число может быть записано из 3х наборов цифр:

1. $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$
2. $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$
3. $4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Кол-во различных чисел, которые могут быть записаны 1-ым или 3 набором одинаково, по

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 20 = 1120$$

чисел в каждом наборе (1 или 3).

Можно также для 2-го набора:

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 56 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{2!}{1!} \cdot 1 = 56 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 56 \cdot 20 \cdot 3 = 1120 \cdot 3 = 3360$$

А всего таких чисел:

$$1120 + 1120 + 3360 = 1120 \cdot 5 = 5600 + 600 = 5600$$

Ответ: 5600 чисел.

№ 3

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x+5)(x-2)$$

Если $x = -5$, то $x^3 - 16x + 25 = -125 + 80 + 25 = -20 < 0$
 Значит, $x = -5$ — не корень уравнения. Сократим на $(x+5)$

$$\sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x-2) \cdot 2$$

Запишем, что $x^3 - 16x + 25 \geq 0$ и возведем в квадрат.