

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.
2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y_{m1} = \sin 60^\circ \cdot R_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$$

~~$$x_{m1} = \sin 180^\circ \cdot R_m = 0 \cdot 4 = 0$$~~

$$x_{m2} = \cos 180^\circ \cdot R_m = -1 \cdot 4 = -4$$

$$y_{m2} = \sin 180^\circ \cdot R_m = 0 \cdot 4 = 0$$

$$x_{m3} = \cos 300^\circ \cdot R_m = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$y_{m3} = \sin 300^\circ \cdot R_m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = -2\sqrt{3}$$

Ищем координаты всех искомого
положений муха: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (2; -2\sqrt{3})$
 Ответ: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (2; -2\sqrt{3})$

Задача 3

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+2x+3x+6$$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x(x+2) + 3(x+2)$$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)) = 0$$

$$\begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{x^3-x+10} - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2 \quad | \cdot 2$$

$$(\sqrt{x^3-x+10})^2 = (x+2)^2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0$$

$$x^3-2x^2+x^2-5x+6 = 0$$

~~Анти~~ муравей пройдёт $\frac{1}{6}$ окружности.

$$\frac{1}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$\Delta \beta = 60^\circ$$

$\beta - \Delta \beta = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, значит между мушкетёром, соединяющей тук, муравья и $\odot$ и мушкетёром $\odot F$ лежит угол 60° . Значит $x_m = \cos 60^\circ \cdot 4 = 2$; $y_m = \sin 60^\circ \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Значит, когда тук, муравей и $\odot$ встанут в одну линию в первый раз, тук будет в точке с координатами $(2; 2\sqrt{3})$.

$$\frac{n_m}{n_m} = \frac{\frac{v}{4\pi}}{\frac{v}{8\pi}} = \frac{8\pi v}{4\pi v} = 2$$

Муравей, тук и $\odot$ выстроятся в ряд, когда муравей и тук в конце пройдут окружность: ведь именно после этого их расстояние между ними будет минимальным. Поскольку $\frac{n_m}{n_m} = 2$, то муравей до очередного минимального расстояния пройдёт вдвое большую часть своей окружности, чем тук своей. Тогда тук до этого будет проходить $\frac{1}{3}$ своей окружности (а муравей $\frac{2}{3}$, итого $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$). $\frac{1}{3}$ окружности — 120° . Значит от минимального расстояния будет до следующего минимального расстояния будет увеличиваться на 120° . Значит все искомые α : $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.
 $x_m = \cos 60^\circ \cdot R_m = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \alpha = \frac{y_{H0}}{R_m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

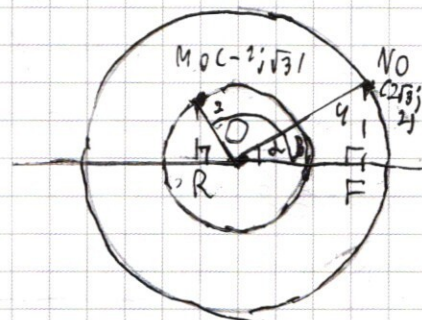
$$\alpha = 30^\circ (\sin 30^\circ = \frac{1}{2})$$

$$\cos \beta = \frac{x_{H0}}{R_m} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = 120^\circ (\cos 120^\circ = -\frac{1}{2})$$

$$\beta - \alpha = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

$$\Delta \varphi = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi \quad \Delta \varphi = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$$



Чтобы расстояние между насекомыми было минимальным, нужно, чтобы они были в одной линии с O . В настоящий момент времени до первого такого положения насекомых в сумме надо пройти четверть окружности.

t , сек - время до первой встречи

$$t = \frac{\Delta \varphi}{\pi u + \pi v} = \frac{0,25 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{8\pi}} = \frac{0,25}{\frac{3}{8\pi}} = \frac{0,25 \cdot 8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$\Delta \varphi$ - угловое расстояние, пройденное

$$t = \frac{\Delta \varphi}{\pi u + \pi v} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{8\pi}} = \frac{0,25}{\frac{3}{8\pi}} = \frac{2\pi}{3}$$

$\Delta \varphi$ - угловое расстояние, которое составляет муравей до первой встречи

$$\Delta \varphi = \frac{t \cdot v}{2\pi R_m} = \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Значит до первого искомого положения

Задача 1

Найдём радиус окружностей, по которым движут муравей и тук

$$R_k = OM_0$$

$$OM_0 = \sqrt{(x_{M_0} - x_0)^2 + (y_{M_0} - y_0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$R_m = 2$$

$$R_N = ON_0$$

$$ON_0 = \sqrt{(x_{N_0} - x_0)^2 + (y_{N_0} - y_0)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$R_m = 4$$

$$C_k = 2\pi R_k = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

$$C_m = 2\pi R_m = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

$V_{\text{ед.сек}}$ — скорость насекомых

$n_{\text{об.сек}}$ — количество проходов муравья

по кругу за секунду

$n_{\text{м.об.сек}}$ — количество проходов тук

по кругу за секунду

$$n_k = \frac{V}{C_k} = \frac{V}{4\pi}$$

$$n_m = \frac{V}{C_m} = \frac{V}{8\pi}$$

Так как насекомые движутся навстречу друг другу, то муравей & сек. одновременно тук за секунду делают $n_k + n_m$ оборотов

Теперь найдём количество насекомых в указанные величины.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2(x-2) + x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$(x^2 + x - 3)(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$x^2+x-3=0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2 - 1} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Мы получили корни $x = -3, x = 2, x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2},$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Проверим их

$$(-3 + 3) \sqrt{1 - 3 + 10} = 0 \quad \sqrt{-2 + 13} = 0 \quad \sqrt{11}$$

Под корнем отрицательное число, уравне-
ние не имеет решения. Проверю

$$(2 + 3) \sqrt{2^2 - 2 + 10} = 5 \cdot \sqrt{8 - 2 + 10} = 5 \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$x^2 + 5 \cdot 2 + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$$

$$20 = 20$$

Верно

$$\left(x - \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + 3\right) \sqrt{1 - \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10} =$$

$$= \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \sqrt{-\frac{40 + 8\sqrt{13}}{8} + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10} =$$

$$= \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \sqrt{-5\sqrt{13} - \frac{20 + 2\sqrt{13}}{2} + \frac{12\sqrt{13}}{2} + \frac{20}{2}} =$$

$$\begin{aligned} & \neq \left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 3 \right) \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)^3 + \frac{1+\sqrt{13}}{2} + 10} = \\ & = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \sqrt{-\frac{40+18\sqrt{13}}{8} + \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{20}{2}} = \\ & = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \sqrt{-\frac{10+4\sqrt{13}}{2} + \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{20}{2}} = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{2}} = \\ & = \sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25-10\sqrt{13}+13}{4}} = \sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{38-10\sqrt{13}}{4}} = \\ & = \sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}} = \sqrt{\frac{209-112\sqrt{13}+195}{4}} = \\ & = \sqrt{\frac{404-112\sqrt{13}}{4}} = \sqrt{101-28\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 10} = \sqrt{-\frac{40+16\sqrt{3}}{8} + \frac{9+4\sqrt{3}}{8} + \frac{80}{8}} = \\ & = \sqrt{\frac{44-12\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{11-3\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{9-2\cdot 3\sqrt{3}+13}{4}} = \\ & \frac{8+2}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{13}}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} = \sqrt{\frac{13-3\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$x + 2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + 2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

Зверно

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{13}-1}{2} + 10} = \sqrt{\frac{40+16\sqrt{13}}{8} + \frac{4\sqrt{13}-4}{8} + \frac{80}{8}} = \\ & = \sqrt{\frac{96+20\sqrt{13}}{8}} = \sqrt{\frac{9+5\sqrt{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18+10\sqrt{13}}{4}} = \\ & = \sqrt{\frac{9+2\cdot 5\sqrt{13}+13}{4}} = \sqrt{4} \\ & x+2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{13})^2}{4}} = \sqrt{\frac{9-6\sqrt{13}+13}{4}} = \\ & = \sqrt{\frac{22-6\sqrt{13}}{4}} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12}{ca+bb} = a$$

$$\frac{12}{\left(\frac{3b}{4b-3} + b\right)b} = a$$

$$\frac{12}{b \cdot \frac{4b^2}{4b-3}} = \frac{3b}{4b-3}$$

$$\frac{12}{4b-3} = \frac{3b}{4b-3} \quad | \cdot \frac{4b-3}{4b-3}$$

$$\frac{12b^4}{(4b-3)^2} = 12 \quad | \cdot (4b-3)^2$$

$$12(4b-3)^2 = 12b^4$$

$$12b^2 - 288b + 108 = 12b^4$$

$$(4b-3)^2 = b^4$$

$$16b^2 - 24b + 9 = b^4$$

$$b^4 - 16b^2 + 24b - 9 = 0$$

$$b^4 + b^3 - 15b^2 + 24b - b^3 - b^2 + 15b - 9 = 0$$

$$b(b^3 + b^2 - 15b + 24) - (b^3 + b^2 - 15b + 24) = 0$$

$$(b-1)(b^3 + b^2 - 15b + 24) = 0$$

$$(b-1)(b^3 + 4b^2 - 3b - 3b^2 - 12b + 24) = 0$$

$$(b-1)(b^3 + 4b^2 - 3b - 3b^2 - 12b + 24) = 0$$

$$(b-1)(b-3)(b^2 + 4b - 3) = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{2-\sqrt{13}}{2} + 10} &= \sqrt{\frac{-4+16\sqrt{13}}{8} + \frac{4-4\sqrt{13}}{8} + \frac{80}{8}} = \\ &= \sqrt{\frac{44+12\sqrt{13}}{8}} = \sqrt{\frac{22+6\sqrt{13}}{4}} = \sqrt{\frac{2+2-3\sqrt{13}+13}{2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(3+\sqrt{13})^2}{2^2}} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x+2 &= \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad +2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{13}}{2} &= \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Верно

Ответ: $x = 2$; $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

~~Задача~~

Задача 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + (2y) = 9 \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Система уравнений имеет бесконечно много решений только ~~если $0x+0y=0$, 9~~ ~~тогда~~ ~~будет только тогда~~, когда коэффициенты одного уравнения пропорциональны коэффициентам другого уравнения

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{2}{(a+b)b} = \frac{9}{1}$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = 9$$

$$4ab = 3a + 3b$$

$$4ab - 3a - 3b = 0$$

$$a(4b-3) = 3b$$

$$a = \frac{3b}{4b-3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b-1 \geq 0 \\ b-3 \geq 0 \\ b^2+4b-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b \leq 1 \\ b=3 \\ b^2+4b-3=0 \end{cases}$$

$$b^2+4b-3=0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28$$

$$b_1 = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2} = -2 - \sqrt{7}$$

$$b_2 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2 \cdot 1} = \sqrt{7} - 2$$

Получили $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=\sqrt{7}-2$, $b_4=-\sqrt{7}-2$

$$a_1 = \frac{3b_1}{4b_1-3} = \frac{3}{4-3} = 3$$

$$a_2 = \frac{3b_2}{4b_2-3} = \frac{9}{12-3} = \frac{9}{9} = 1$$

$$a_3 = \frac{3b_3}{4b_3-3} = \frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-8-3} = \frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11}$$

$$a_4 = \frac{3b_4}{4b_4-3} = \frac{-3\sqrt{7}-6}{-4\sqrt{7}-8-3} = \frac{3\sqrt{7}+6}{4\sqrt{7}+11}$$

Получили пары $(a; b)$: $(1; 3)$; $(3; 1)$; $(\frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11}; \sqrt{7}-2)$; $(\frac{3\sqrt{7}+6}{4\sqrt{7}+11}; -\sqrt{7}-2)$. Проверим их.

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{3(a+b)b} = a \quad a=1 \quad b=3$$

$$\frac{3(3+1)}{4-3} = 3 \quad \frac{12}{(3+1)-3} = 1 \quad a=1$$

$$1=1 \quad 2=1$$

Flagnum

$$a = 3 \quad b = 1$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} =$$

$$\frac{3(3+1)}{4 \cdot 1} = 3$$

$$\frac{12}{(a+b)b} = \frac{12}{(3+1) \cdot 1} = 3$$

$$* a = 3$$

$$3 = 3 = 3$$

Flagnum

$$a = \frac{3\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}-11}, \quad b = \sqrt{2}-2$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} =$$

$$3 \left(\frac{3\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}-11} + \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-11} \right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}-6 + \sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-11} =$$

$$= 3 \cdot \frac{4\sqrt{2}-8}{4\sqrt{2}-11} = 3 \cdot \frac{44-16\sqrt{2}}{200-76\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{48\sqrt{2}-132}{76\sqrt{2}-200} = \frac{12\sqrt{2}-33}{19\sqrt{2}-50}$$

$$= 3 \left(\frac{3\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}-11} + \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-11} \right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}-6 + \sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-11} =$$

$$= \frac{3(4\sqrt{2}-8)}{4\sqrt{2}-11} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3a}{4b} = \frac{3}{4} + \frac{9\sqrt{2}-18}{4(4\sqrt{2}-11)(\sqrt{2}-2)} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{9\sqrt{2}-18}{4(28-19\sqrt{2}+22)} = \frac{9\sqrt{2}-18}{200-76\sqrt{2}} + \frac{3}{4} = \frac{132-48\sqrt{2}}{200-76\sqrt{2}} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \frac{12}{(9+6)\sqrt{7}} = \frac{12}{\sqrt{7-6}\sqrt{4\sqrt{7}-11}(\sqrt{7}-2)} \\ &= \frac{12}{\sqrt{7-6}(4\sqrt{7}-11)(\sqrt{7}-2)} + \frac{48-4\sqrt{7}+4}{4\sqrt{7}-11} = \frac{12}{2(-1-12\sqrt{7}+12)+81-4\sqrt{7}} \\ &= \frac{12}{12(4\sqrt{7}-11)} = \frac{33-12\sqrt{7}+248\sqrt{7}-673}{33-12\sqrt{7}} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11} + \frac{(81-4\sqrt{7})(4\sqrt{7}-11)}{4\sqrt{7}-11} \right) (\sqrt{7}-2) \\ &= \frac{48\sqrt{7}-132}{26\sqrt{7}-200} = \frac{132-48\sqrt{7}}{200-26\sqrt{7}} = \frac{33-12\sqrt{7}}{50-19\sqrt{7}} \\ &= \frac{232-18\sqrt{7}}{200-76\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{Q} = \frac{33-12\sqrt{7}}{50-19\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{Q} \\ &= \frac{33-12\sqrt{7}}{50-19\sqrt{7}} \cdot \frac{4\sqrt{7}-11}{3\sqrt{7}-6} = \frac{264\sqrt{7}-629}{264\sqrt{7}-629} = 1, \text{ znám } \frac{33\sqrt{7}-12\sqrt{7}}{50-19\sqrt{7}} = Q \\ &= \frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11} = \frac{3\sqrt{7}-6}{4\sqrt{7}-11} \end{aligned}$$

Agasgum

Аналогично рассуждаем в ^и случае

Ansatz: $(1; 3; 0; 1; 1; \frac{3\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}-2i}; \sqrt{2}-2; (\frac{3\sqrt{2}+6}{4\sqrt{2}+2i}; -\sqrt{2}-2)$

Задача 5.

$$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Разложим 1400 на множители и дополним единицами до 8 ^{чисел} чисел!

$$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Значит числа состоят из цифр

$$1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7$$

Всего из этих цифр можно составить $8!$ чисел, однако некоторые будут повторяться из-за цифр. Из 1 можно составить $2!$ комбинации (две 1), из 2 — $3!$ (три 2), из 5 — $2!$ (две 5). Соответственно, каждого уникального числа из $8!$ чисел получится $2! \cdot 3! \cdot 2!$. Соответственно всего уникальных чисел

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 3} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 1680$$

Итак, есть 1680 восьмизначных чисел, у которых произведение 1400.

Ответ: 1680.

Задача 7.

$$\begin{cases} |x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leq 6 \\ (|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$41 \begin{cases} x - 3 - y \leq 0 \\ x - 3 + y \geq 0 \\ y + 3 - x + x - 3 + y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 + y \\ x \geq 3 - y \\ 2y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - y \leq x \leq 3 + y \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3 - y &\leq 3 + y \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3 - y \leq x \leq 3 + y \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 3 - x \leq y \leq x - 3 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - 3 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3 + y \leq x \leq 3 - y \\ -3 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3 - y \leq x \leq 3 + y \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$$

Решим систему уравнений графически.
Построим фигуры A, B, C, D (они соответствуют

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$1) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \\ x-3-y + x-3+y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \\ 2x-6 \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3-x \leq y \leq x-3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$3-x \leq x-3$$

$$x \geq 3$$

$$\begin{cases} 3-x \leq y \leq x-3 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \leq 0 \\ 3+y-x + 3-x-y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x-3 \\ y \leq 3-x \\ 6-2x \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 \leq y \leq 3-x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x-3 \leq 3-x$$

$$x \leq 3$$

$$\begin{cases} x-3 \leq y \leq 3-x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \leq 0 \\ x-3-y + 3-x-y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x-3 \\ y \leq 3-x \\ -2y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq y+3 \\ x \leq 3-y \\ y \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+3 \leq x \leq 3-y \\ y \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+3 \leq 3-y \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3 \leq x \leq 3-y \\ -3 \leq y \leq 0 \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

система уравнений
уравнения 1, 2, 3, 4 соответственно.

~~А~~ ~~Б~~ ~~В~~ ~~Г~~ ~~Д~~ ~~Е~~ ~~Ж~~ ~~З~~ ~~И~~ ~~Й~~ ~~К~~ ~~Л~~ ~~М~~ ~~Н~~ ~~О~~ ~~П~~ ~~Р~~ ~~С~~ ~~Т~~ ~~У~~ ~~Ф~~ ~~Х~~ ~~Ц~~ ~~Ч~~ ~~Ш~~ ~~Щ~~ ~~Ъ~~ ~~Ы~~ ~~Ь~~ ~~Э~~ ~~Ю~~ ~~Я~~

Требуется, что

график функции

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25$$

четыре круга

с радиусом 5 и центрами

в точках $(3; 4), (-3; 4),$

$(3; -4), (-3; -4)$

Фигура, состоящая
из четырёх ^{окружностей} ~~кривых~~

с радиусом 5 и центрами в точках

$(3; 4); (-3; 4); (3; -4); (-3; -4)$ (а именно

внешняя часть фигуры, являющейся объединением этих окружностей и точка $(0; 0)$)

Из графика

видно, что фигура
из 4-х окружностей

пересекается с

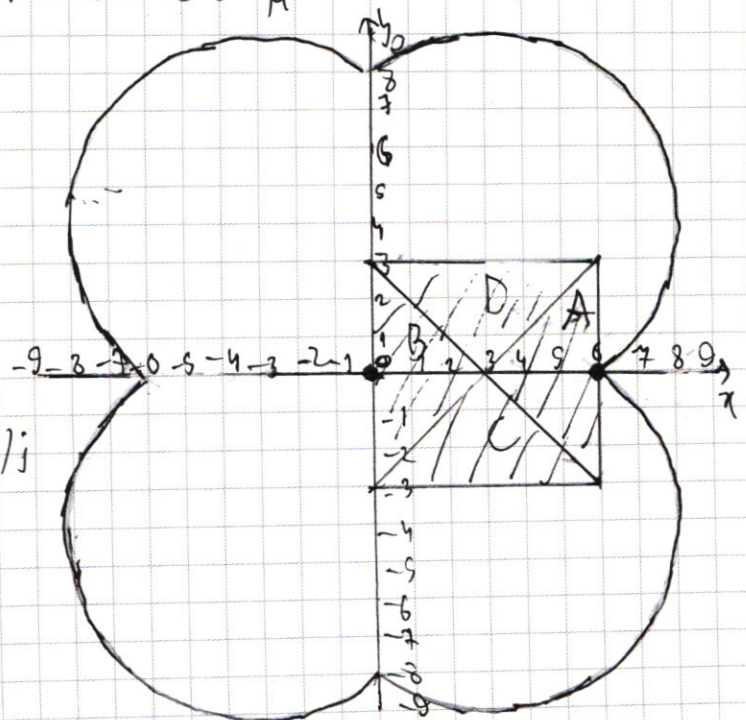
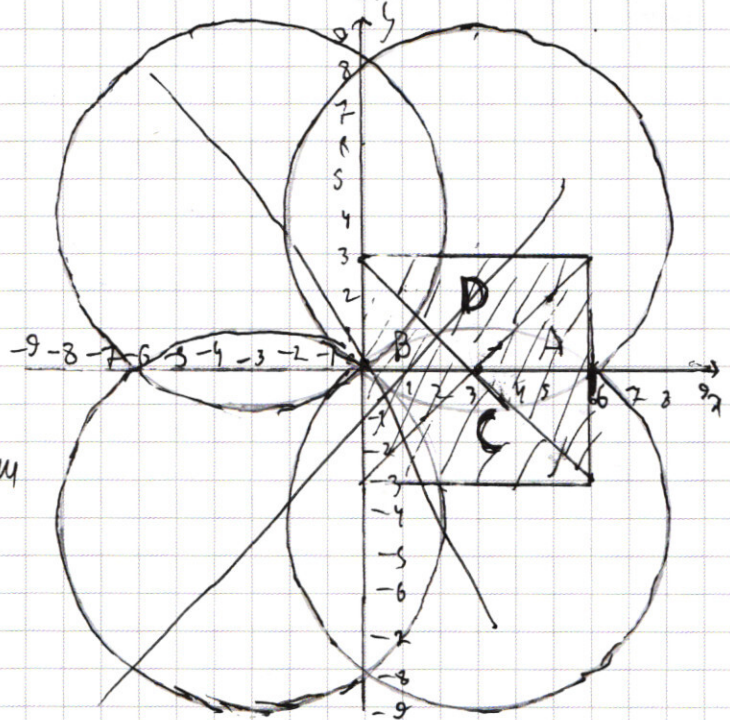
фигурами А, В, С, Д

только в точках $(6; 0);$

$(0; 0)$ Эти точки и есть

решение

Ответ: $(6; 0); (0; 0)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 3 - y \geq 0 \\ x - 3 + y \geq 0 \\ 2x - 6 \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x - 3 \\ 6 - 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 - y \geq 0 \\ x - 3 + y \leq 0 \\ x - 3 - y + 3 - x - y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x - 3 \\ y \leq 3 - x \\ -2y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x - 3 \\ y \leq 3 - x \\ y \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x - 3 \\ y \geq 3 - x \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$x - 3 \geq y$$

$$x \geq 3$$

$$x \leq 3$$

$$y \geq 3 - x$$

$$y \geq 0$$

$$\begin{cases} x - 3 - y \geq 0 \\ x - 3 + y \leq 0 \\ 2x - 6 \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x - 3 \\ y \geq 3 - x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$3 \leq x \leq 6$$

$$3 - x \leq y \leq x - 3$$

$$x \geq 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3) \sqrt{x^2+x+10} = x^2+9x+6$$

$$(x+3) \sqrt{x^2-x+10} = (x+3)(x+2) \quad x = -3$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 6$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2(x-1) - 6(x-1) + x = 0$$

$$(x^2+x-3)(x-2)$$

$$(1+\sqrt{13})^2 = 14+2\sqrt{13}$$

$$(14+2\sqrt{13}) \cdot (1+\sqrt{13}) =$$

$$= 14 + 14\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 26 = 40 + 16\sqrt{13}$$

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

$$= 1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13} = 40 + 16\sqrt{13}$$

$$28\sqrt{13}$$

$$2\sqrt{13} \quad 14$$

$$4\sqrt{13} \quad 7$$

$$\sqrt{13} - 1 \rightarrow 14\sqrt{13} - 14 - 26 + 2\sqrt{13}$$

$$\sqrt{13} - 1 \rightarrow 14 - 2\sqrt{13}$$

$$(a+b)(3x-4y) + 4(3x-2y) = a+1+1$$

$$x = \frac{1 - \frac{a+b}{4y}}{4y}$$

$$\frac{3(a+b) - 3by(a+b)^2}{4y} + 12y = a$$

$$3(a+b) - 3by(a+b)^2 + 48by = 4ab$$

$$\frac{b^4 - 16b^2 + 24b - 9}{b^3 - b^2} \div \frac{b-1}{b^3 + b^2 - 15b + 9}$$

$$\begin{array}{r} b^3 - 16b^2 \\ - b^3 - b^2 \\ \hline -15b^2 + 24b \\ - -15b^2 + 15b \\ \hline 9b - 9 \end{array}$$

$$\frac{b^3 + b^2 - 15b + 9}{b^3 - 3b^2} \div \frac{b-3}{b^2 + 4b - 3}$$

$$\begin{array}{r} b^2 - 15b \\ - 4b^2 - 12b \\ \hline -3b + 9 \\ - -3b + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

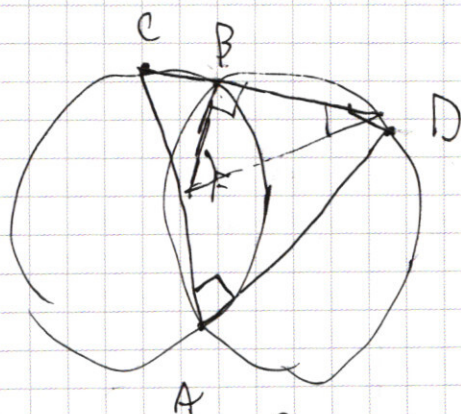
$$(b - 3)(b^2 + 4b - 3)$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = (2\sqrt{7})^2$$

$$b_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2} = -2 - \sqrt{7}$$

$$b_2 = -2 + \sqrt{7}$$



$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\frac{33 - 12\sqrt{7}}{59 - 18\sqrt{7}}$$

$$\frac{4\sqrt{7} - 11}{3\sqrt{7} - 6}$$

$$\frac{132\sqrt{7} + 132\sqrt{7} - 336 - 363}{(50 - 18\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 6)}$$

$$\frac{264\sqrt{7} - 699}{150\sqrt{7} + 114\sqrt{7} - 300 - 399}$$

$$\frac{690 - 298\sqrt{7}}{236\sqrt{7} - 640} \approx 200 \approx 20\sqrt{7}$$

$$440 \approx 149\sqrt{7}$$

$$\frac{440}{140} \approx \sqrt{7}$$

$$\frac{22}{7} \approx \sqrt{7}$$

$$484 \approx 4$$

$$y > x - 3 \quad x > 1$$

$$y + 3 - x + 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2x$$

$$+ 1 = 2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 2x + 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4(x-1)^2 =$$

$$= 2x^6 - 18x^5 + 9x^4$$