

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

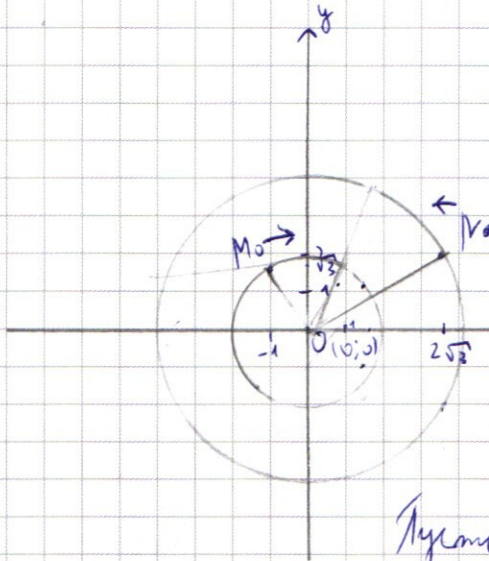
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11



R_M и R_N - радиусы в уравнения и
точки соответствующие

$$R_M = \sqrt{1+3} = 2$$

$$R_N = \sqrt{12+4} = 4$$

Очевидно, что кратчайшее расстояние
между ними равно 2.

Это происходит, когда оба пивоты
«летят» на одной прямой

Прямые M и N соответствующие точки

$M(x; y)$ $N(a; b)$

$$x^2 + y^2 = R_M^2 = 4$$

$$a^2 + b^2 = R_N^2 = 16$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$$

$$\begin{cases} y = kx \\ b = ka \end{cases}$$

$$1) x^2 + a^2 - 2xa + y^2 + b^2 - 2yb = 4$$

$$4 + 16 - 2(xa + yb) = 4$$

$$xa + yb = 8$$

$$\begin{cases} xa + yb = 8 & a^2 + b^2 = 16 \\ ay = bx & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Т.к. в уравнении системы радиусы между ними по Ox $(2\sqrt{3}+1)$, а по
 Oy $(2-\sqrt{3})$, то это будет всегда соблюдаться из-за функции
по b .

$$\begin{cases} xa + yb = 8 \\ ay = bx \\ \frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = -2 \\ x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 2 \\ x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Из системы найдем значения переменных

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2 \\ x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = -2 \\ x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Отв.: } (2\sqrt{3}, 2) \text{ и } (-2\sqrt{3}, -2)$$

$$\text{Отв.: } (\pm 2\sqrt{3}, \pm 2)$$

Т.к. по $(2\sqrt{3}, 2)$, то эти точки
нам не подходят

№2 Меньше Крамера

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3(a+b) & 12 \\ 4b & (a+b)b \end{vmatrix} = 3b(a+b)^2 - 48b$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a & 12 \\ 1 & (a+b)b \end{vmatrix} = ab(a+b) - 12$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3(a+b) & a \\ 4b & 1 \end{vmatrix} = 3(a+b) - 4ab$$

∞ решений $\Rightarrow \Delta = \Delta x = \Delta y = 0$

$$\begin{cases} 3b(a+b)^2 - 48b = 0 \\ ab(a+b) - 12 = 0 \\ 3(a+b) - 4ab = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \neq 4 \\ ab \neq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases}$$

Омб: $\begin{pmatrix} 3; 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1; 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+\sqrt{7}; -2+\sqrt{7} \end{pmatrix}$

$t^2 + ut - 3 = 0$

$\frac{u}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$
 $t = -2 \pm \sqrt{4}$

При подстановке в последнее уравнение даются верные результаты

№3

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3) (x+2 - \sqrt{x^3 - x + 10}) = 0$$

$$x+2 = \sqrt{x^3 - x + 10} \quad x = -3$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = x^3 - x + 10 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

1	-1	-5	6
1	1	-3	0

$x = -3$

$x = -1 \pm \sqrt{13}$

Омб: 2: $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

$x^2 + x - 3 = 0$
 $\Delta = 1 + 12 = 13$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 |x-1| + (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \cancel{2x^4} - 3x^2 |x-1| + \cancel{(x-1)^2} \geq 0$$

$$(x-1)^2 = |x-1|^2$$

$$\cancel{(x-1)^2} - |x-1| = +$$

$$2x^4 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 = t \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = |x-1| \\ 2x^2 = |x-1| \end{cases}$$

1)

$$x \geq 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta < 0$$

$$x \leq 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2) $2x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta < 0$

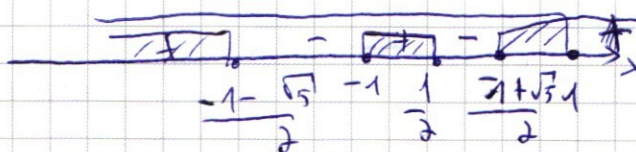
$$x \geq 1$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int x \leq 1$$

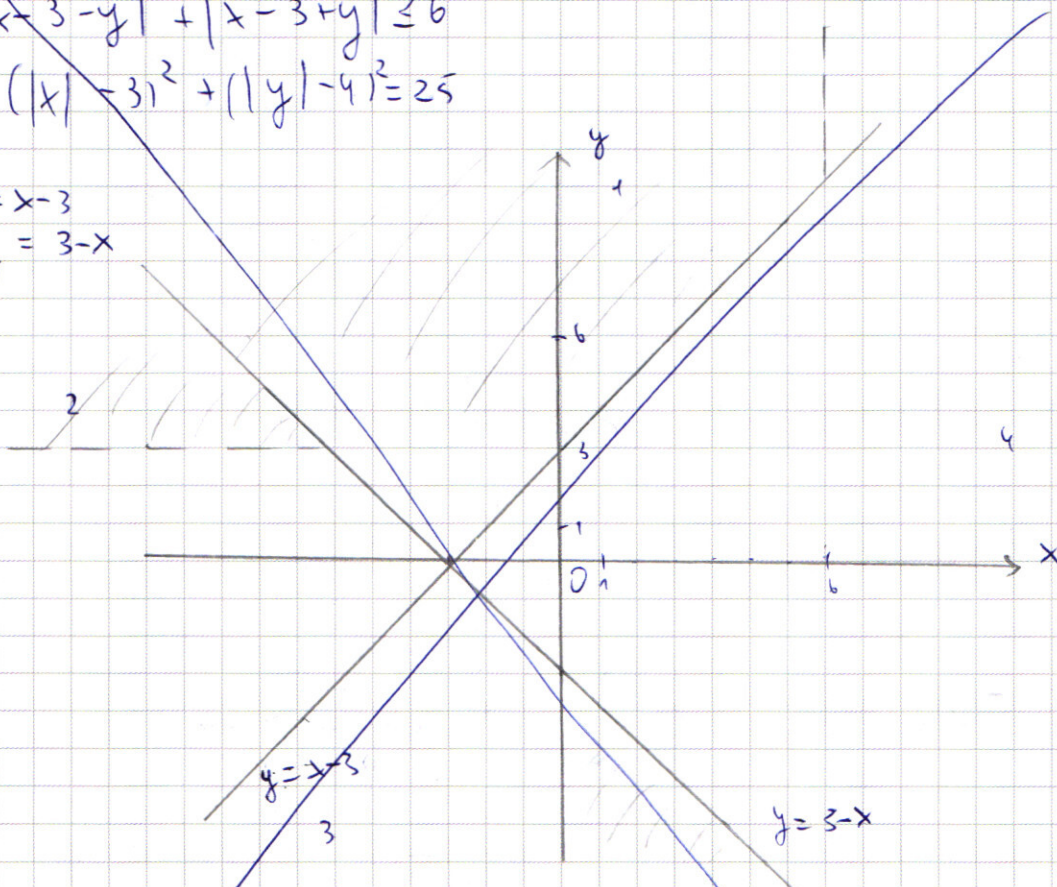
$$2(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x+1)(x - \frac{1}{2}) \geq 0$$



Отв: $x \in (-\infty; -1] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x-3 \\ y &= 3-x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1) \quad x-3-y + x-3+y &\leq 6 \\ 2x &\leq 12 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x-3-y - x+3-y &\leq 6 \\ -2y &\leq 6 \\ y &\geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad -x+3+y - x+3-y &\leq 6 \\ -2x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad -x+3+y + x-3+y &\leq 6 \\ 2y &\leq 6 \\ y &\leq 3 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.4

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

$$y = x-3$$

$$y = 3-x$$

$$1) x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$2) x-3-y - x+3-y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$3) -x+3+y + x+3-y \leq 6$$

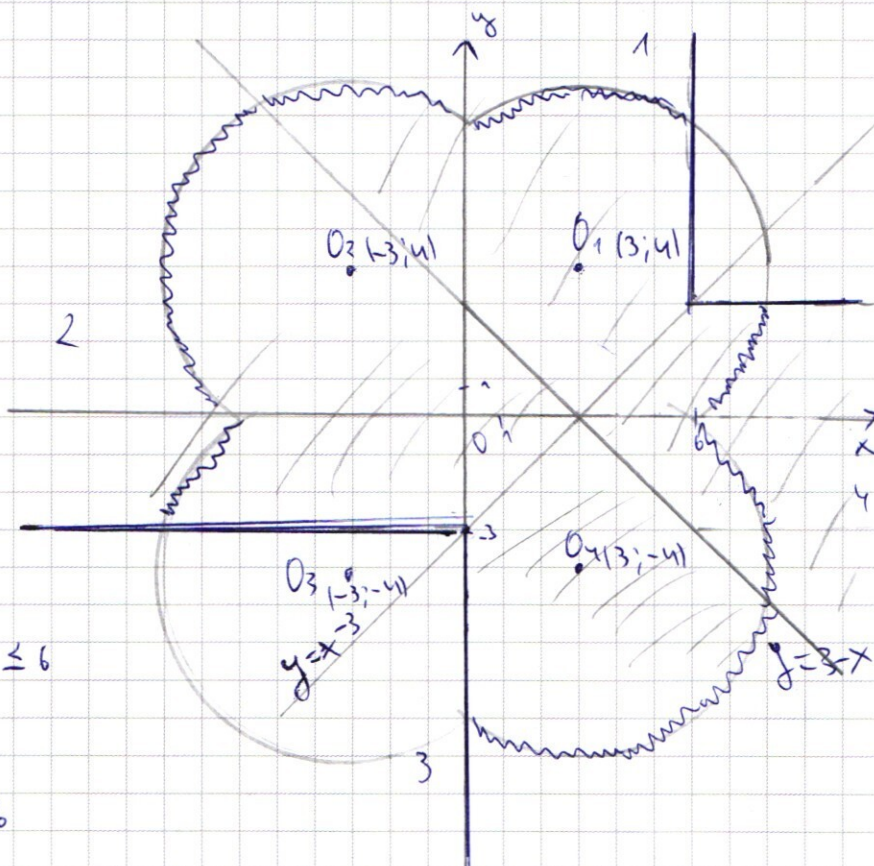
$$x \geq 0$$

$$4) -x+3+y + x-3+y \leq 6$$

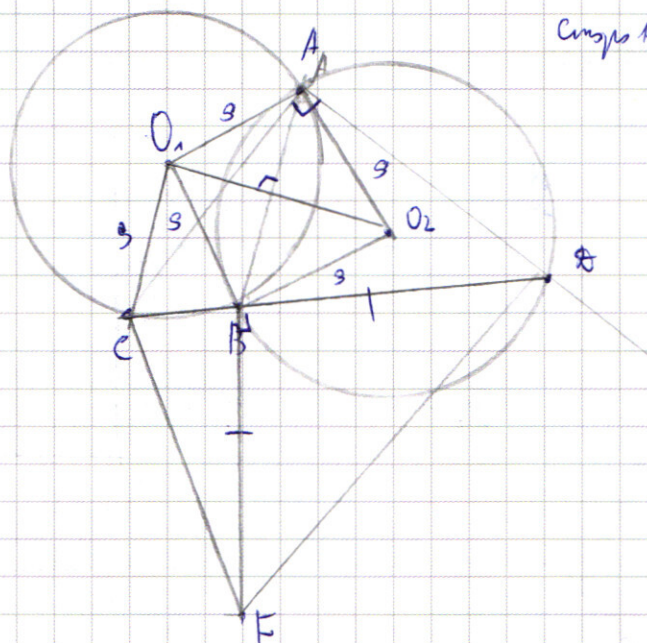
$$y \leq 3$$

ит. - решение

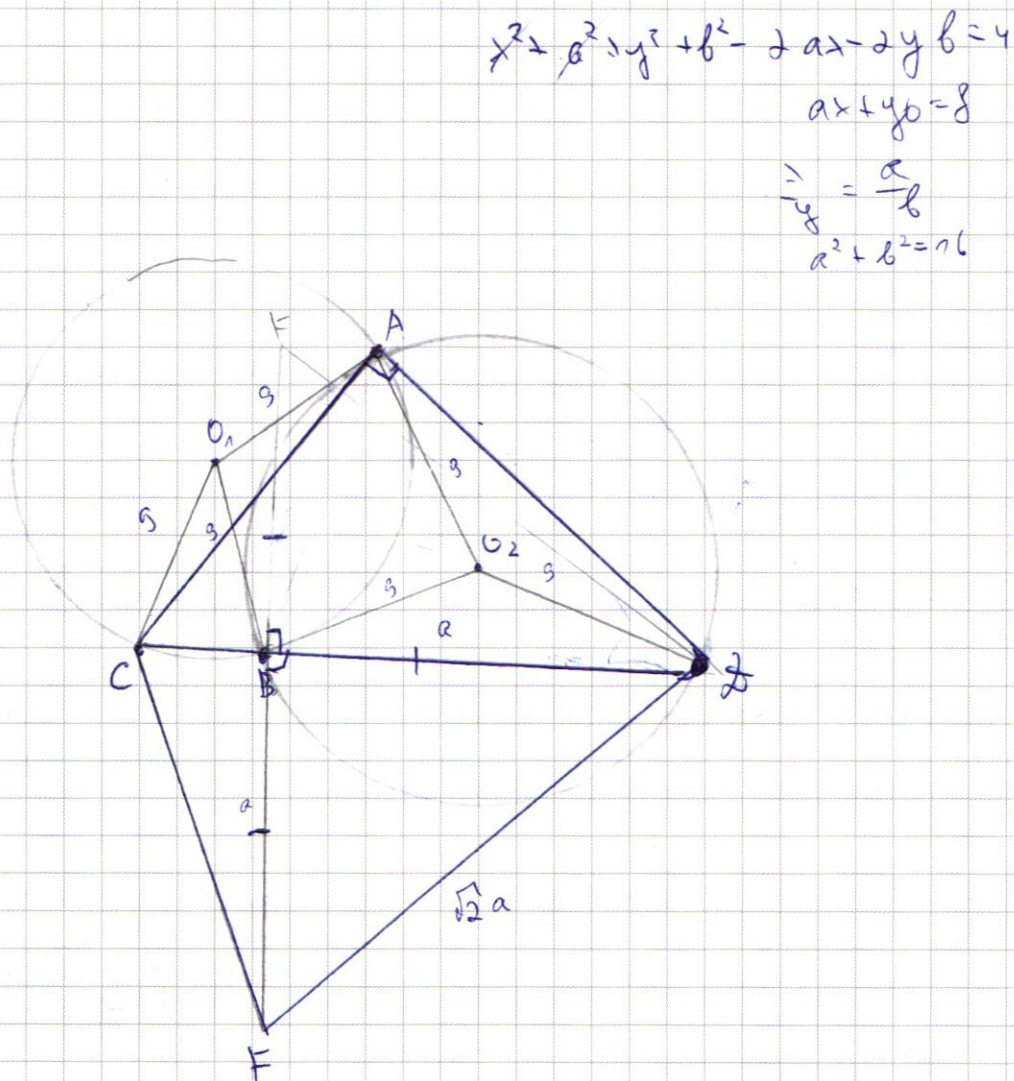
Решить графически.

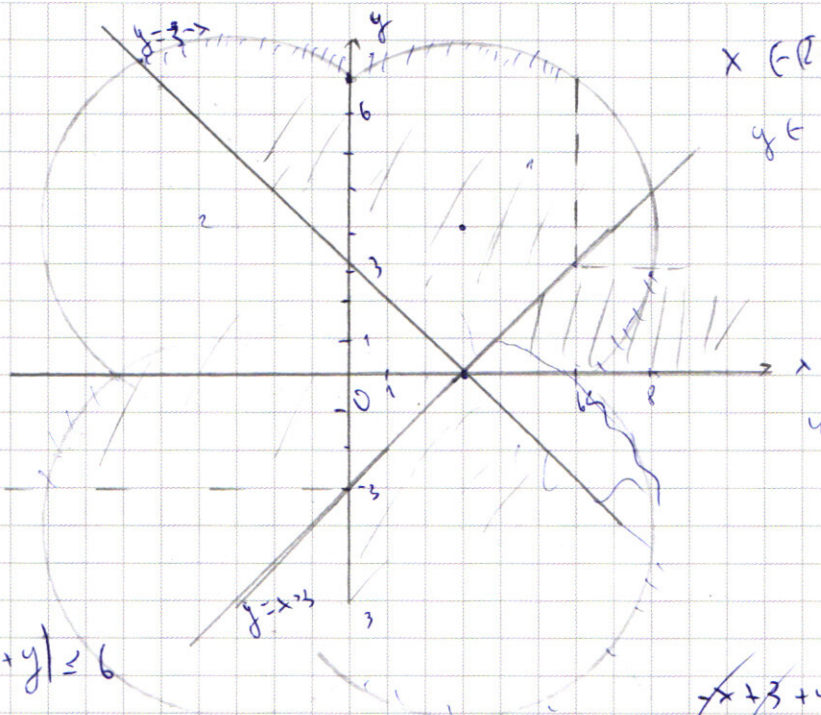


Стороны равны и $\angle O_1 O_2 A$ и $\angle O_1 O_2 B$ равны



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$x \in (-8; 8)$$

$$y \in (-4; 4)$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$y = x - 3$$

$$y = 3 - x$$

$$1) \quad x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$2x - 6 \leq 6$$

$$x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$x-3-y - x+3-y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-2x + 6 \leq 6$$

$$x \geq 0$$

$$x+3+y + x+3+y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$x \geq 1$$

$$2 \quad |x^2 - |x-1|| \quad |2x^2 - |x-1||$$

$$x^2 - x + 1$$

$$23$$

$$24$$

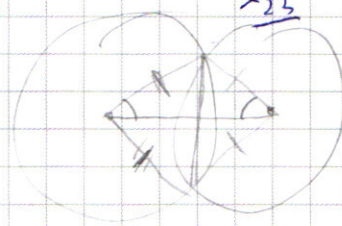
$$2,4$$

$$\frac{1}{4} \quad x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$



$$-1 + 2,4$$

$$2x^2 - 3x^2 + 1 + 1 \geq 0$$

$$x = 9 + 1^2 - 8 + 1 = 1^2$$

$$x^2 = \frac{3 + 1 \pm 1}{4}$$

$$x \geq 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D \leq 0$$

$$x \leq 1$$

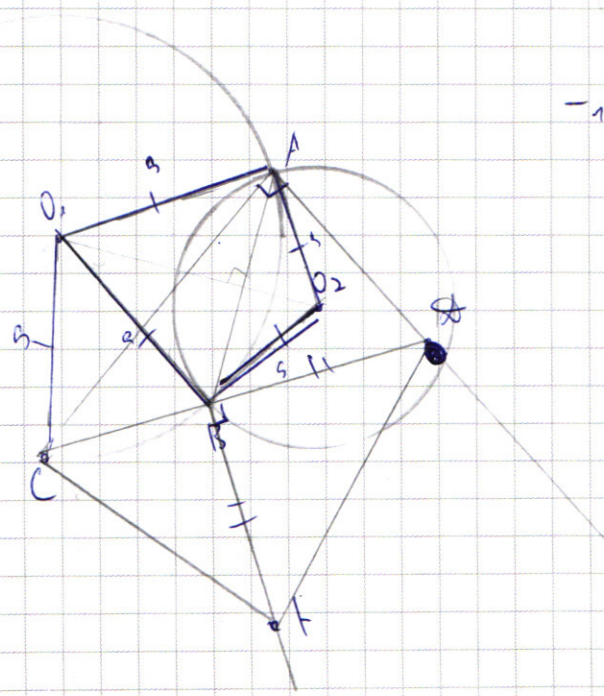
$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$2,4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$D = 1 + 4$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = \frac{b}{a}$
 $a = 2\sqrt{3} + 1 + x$
 $x(2\sqrt{3} + 1 + x) - 0,5$
 $x a + \frac{b^2}{a} = 8$
 $a \rightarrow 2\sqrt{3} + 1$
 $b - \frac{b^2}{a} = 2 - \sqrt{3}$

$y = 14$
 $b = ka$

$r(x; y)$
 $in(a; b)$
 $R_0 m.$
 $R_1 m.$
 $R_2 m.$
 $(3-1)^2 + (1-0)^2$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$
 $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$
 $\Delta \cdot x = \Delta x$
 $\Delta \cdot y = \Delta y$

$3(a+b)x + 12y = a$
 $4bx + (a+b)b = 1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3(a+b) & 12 \\ 4b & (a+b)b \end{vmatrix} = 0$
 $\Delta x = \begin{vmatrix} a & 12 \\ 1 & (a+b)b \end{vmatrix} = 0$
 $\Delta y = \begin{vmatrix} 3(a+b) & a \\ 4b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$2\sqrt{3}$
 $6 = -$
 $2\sqrt{3}$
 $a - b = 2\sqrt{3} + 1$
 $b - y = 2 - \sqrt{3}$
 $-24 + 3 + 10$

$(x+3)\sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$
 $(x+3)\sqrt{\dots} = (x+3)(x+2)$
 $(x+3)(x+2 - \sqrt{x^3 - x + 10}) = 0$
 $x+2 = \sqrt{x^3 - x + 10}$
 $x^2 + 4x + 4 = x^3 - x + 10$
 $x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$

$b = \frac{ay}{x}$
 $x^2 > 2a = 8$

$x^2 + y^2 = R^2$
 $x^2 + a^2 - 2xa + y^2 + b^2 - 2yb = R^2$
 $x^2 + y^2 = 2(xa + yb)$
 $x + y = 2$

$6 + 2 = y$
 $a + 2 = x$
 $2 = -2(xa + yb)$
 $xa = -yb$
 $x(x-2) = -y(y-2)$
 $x^2 + y^2 = -y^2 + 2y$
 $x^2 + y^2 = 2(x+y)$

$-24 +$

1	-1	-5	6
-2	1	-3	
-1	1	-2	-3
1	1	0	-
2	1	1	-3
			0

$8 - 4 - 10 + 6$
 $x^2 + x - 3 = 0$

10

 $x \geq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

5 · 5 · 8 · 2 · 1111

5 · 2 · 9

$$2x(x^3 - 1) + x^2 - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1) + x^2 - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$x^2(1-3|x-1|) + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1) + x^2 - 3x^2 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x(x^3 - 1) - 3x^2(x-1) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1) - 3x^2(x-1) + \frac{2}{x} + 1$$

$$(x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x - 3x^2) + x^2 + 1 \geq 0 \quad 2\sqrt{3} +$$

$$(x-1)(2x^3 - x^2 + 2x) + x^2 + 1 \geq 0 \quad 6+2$$

$$(x-1)x(2x^2 - x + 2) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 1 - 3x^2 | x-1 | + (x-1)^2 \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3|x-1|) + (x-1)^2 \geq 0$$

$$2x^2 - 3x + 3$$

 $x \leq 1$

$$2x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$D = 9 + 24 = 31$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{31}}{2}$$

$$2x^4 - 3x^2 | x-1 | + (x-1)^2 \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3|x-1|)$$

$$2x^2 | x - \frac{-3 + \sqrt{31}}{2} | (x - \frac{-3 - \sqrt{31}}{2})$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \quad a = -2\sqrt{3}$$

$$2x^2 - 3x + 3$$

$$x = \frac{2x^2 + 3x - 3 = 0}{-3}$$

$$(-3 \quad -0,4) \quad (-3 \quad +2,25)$$

$$9 + 24 = \sqrt{31}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{31}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm 5,7}{2}$$

$$(xa)^2 + (yb)^2 + (ay)^2 + (yb)^2 = a^3$$

$$(xa)^2 + (yb)^2 + 2(ay)^2 = 4^3$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$a = \sqrt{16 - b^2}$$

$$2x^2 = 3 | x-1 |$$

$$2x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\sqrt{16 - b^2} = y = bx$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^2 (x-1) + 130$$

$$X(2x^3 + x - 2) + 3x^2(x - 1) + 1$$

$$2x(x^3 - 1) + 3x^2(x - 1)$$

$$2. \quad X(X-1)(2x^2+2x+2+3x^2+3x+3) \\ X(X-1)(5x^2+5x+5) \quad x^2+1$$

$$(x-1)^2 + 2x^4 - 3x^2 \mid x-1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 + x - 1 \geq 0$$

$$|2x^4| - |3x^2| |x-1| \geq 0$$

$$(2x^4 - 3x^2 \mid x-1) \mid (2x^4 + 3x^2 \mid x+1) \text{ zu } A$$

$$2x^4 - 3x^2(x-1) \geq 0$$

$$x^2 \mid 2x^2 - 3 \mid x - 1 \mid \geq 0$$

$$(2x^2 - 3)(x - 1) \geq 0$$

$$2x^2 - 3|x-1| \geq 0$$

$$2x^2 - 3x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{83}}{4}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^2 (x-1) + 120$$

$$3x^3 - 2x^2 + 1$$

$$2x^4 + 3x^2(x-1) + (x-1)^2$$

$$2x^4 + (x-1)(x-1+3x^2) \cdot 2x$$

$$2x^4 + (x-1)(3x^2+x-1) \geq 0$$

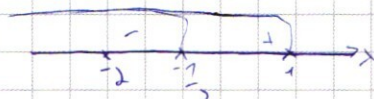
$$3 - 3x^2 + 1 \quad \Rightarrow 1 + 12 = 13$$

$$2x \mid (x-1)(x^2+x+1) \quad +x^2+3x^2(x-1) \quad -1 \rightarrow \sqrt{3}$$

$$2x(x-1)(2x^3+2x^2+2x+3x^2) + x^2+1 \geq 0$$

$$(x-1) \times (2x^2 + 5x + 2) = x^2 + 130$$

$$2(x-1)^+ (x+2)^+ (x+\frac{1}{2})^+ + x^2 + 1 \geq 0$$



$$R = 5$$

2-2-2- 5.5-7-1-1

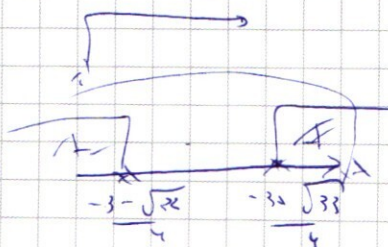
8-25

3
8.46

1. A

$$x^2 - y^2 = 20$$

$\lambda \geq 1$



$$3(a+b)^2 = 48$$

$$4ab = 42$$

$$-4$$

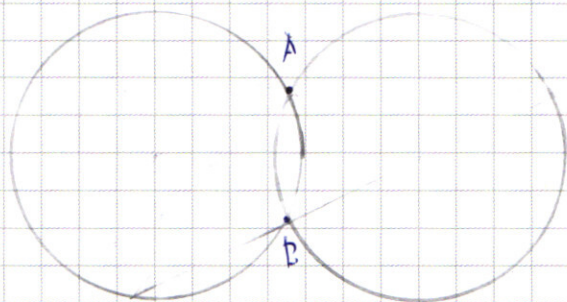
$$(a+b)^2 = 16$$

$$ab = 3$$

$$3$$

$$12$$

$$\frac{2\pi R_m}{4} = 2\pi$$



$$t^2 + at - 3 = 0$$

$$\frac{p}{a} = 4$$

$$(a+b)^2 = 16 - 2ab$$

$$-2 + \sqrt{5} \quad -5$$

$$-4$$

$$-12 - 4$$

$$-2 + \sqrt{5} \quad -2 - \sqrt{5}$$

$$-12$$

$$-12$$

$$a(x+y) + b(y-x) = 8$$

$$a(x+y) - b(x+y) = 8$$

$$(2 + \sqrt{5})(-2 - \sqrt{5})$$

$$4 \cdot 75$$

$$-1$$

