

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $M_0(-6; 0)$ $(x; y)$ - координаты кот.^а

$N_0(2; 2\sqrt{3})$

$$R_k = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = 6 \text{ (радиус окружности с котенком)}$$

$$R_{ш} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \text{ (... с щенком)}$$

$v_k; v_{ш}$ (скорости котенка и щенка)

$$2v_k = v_{ш}$$

$\omega_k; \omega_{ш}$ (угловые скорости кот., щен.)

$$\omega_k = \frac{v_k}{R_k} = \frac{v_k}{6}; \quad \omega_{ш} = \frac{2v_k}{4} = \frac{v_k}{2}$$

$$3\omega_k = \omega_{ш}$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta\omega = \omega_{ш} + \omega_k = 4\omega_k$$

(скорости сближения)

угловая

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \cdot \omega_k = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \text{ (угл на который сближаются)}$$

(где 2π - расстояние которое необходимо пройти котенку

и щенку вместе), после каждой встречи это расстояние $2\pi = 360^\circ$

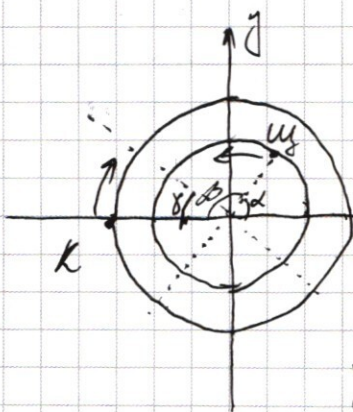
$$\delta = \delta_1 + k\Delta\delta; k \in \mathbb{N} \text{ (}\delta \text{ - все возможные углы встречи)}$$

$$\delta \in \{30^\circ; 120^\circ; 210^\circ; 300^\circ\}; \quad x = R_k \cdot \cos \delta; \quad y = R_k \cdot \sin \delta$$

$$\text{Ответ: } (-3\sqrt{3}; 3); (3; 3\sqrt{3}); (3\sqrt{3}; -3); (-3; -3\sqrt{3})$$

карты $(x; y)$

место встречи имеет
виду координата котенка
и щенка расстояние между
котенком и щенком минимальное.



$$\beta = 180^\circ - \alpha = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

$$\delta_1 = \frac{\beta}{\Delta\omega} \cdot \omega_k = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

(угл при первой встрече)

$$3. (\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 18x - 5} \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2 \geq 2 > 0$$

Разделим исходное неравенство на $\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2$

$$|x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$$

$$|x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \geq 0 \quad (\text{по свойствам модуля})$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -5 & 18 \\ 2 & 1 & -2 & -9 & 0 \end{array} \quad (\text{схема Горнера})$$

$$(x-2)(x^2 - 2x - 9) = 0$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{10} \\ x = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

Проверим найденные корни на ОДЗ

$$\text{ОДЗ: } x^3 - 18x - 5 \geq 0$$

$$1) x = 2$$

$$8 - 36 - 5 < 0; \quad \ominus$$

$$2) x = 1 + \sqrt{10}$$

$$(1 + 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 + 10 \cdot \sqrt{10}) - (18 + 18\sqrt{10}) - 5 =$$

$$= -5\sqrt{10} + 8$$

$$2 < \sqrt{10} < 3 \Rightarrow -7 < -5\sqrt{10} + 8 < -2 \Rightarrow -5\sqrt{10} + 8 < 0 \quad \ominus$$

$$3) x = 1 - \sqrt{10}$$

$$(1 - 3\sqrt{10} + 3 \cdot 10 - 10\sqrt{10}) - (18 - 18\sqrt{10}) - 5 = 5\sqrt{10} + 8 > 0 \quad \oplus$$

$$\text{Ответ: } 1 - \sqrt{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. рассмотрим бросок двух костей (все возможные варианты)

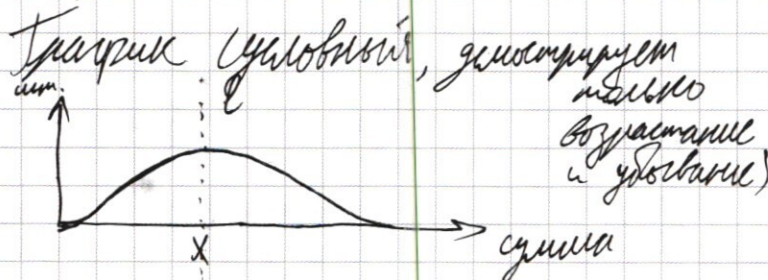
$1+1; 1+2; 1+3; \dots$

$2+1; 2+2; 2+3; \dots$

$3+1; 3+2; 3+3; \dots$

$4+1; 4+2; 4+3; \dots$

Сумма	Кол-во исх.
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1



Этот график симметричен, максимум при 7

x - наибольшее значение ^{последоват.}

x - ср. арифм. мин. и макс.

В данном случае

$$x = \frac{2+12}{2} = 7$$

(в случае с чет. кол-во бросков $x \notin$ последоват. максимум последоват. будет являться чет. последоват. ближайший к x)

Для каждого следующего броска 1 кости к текущему максимуму суммы к каждой элементу добавляем число от 1 до 6, очевидно вышерасположенные свойства последовательности таким образом войдут до 60 бросков

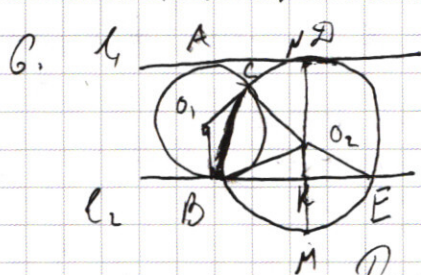
минимальное значение $1 \cdot 60$, максимальное $6 \cdot 60$

$$x = \frac{1 \cdot 60 + 6 \cdot 60}{2} = 210, \quad (\text{кол-во эл. } \leq 120 \text{ равно кол-во эл. } > x - 120)$$

последоват. симметрич. макс. x , но если эл. равно 300

Количество не меньше 300 балов или элементов меньше 120
Следовательно вероятность того, что сумма не меньше 300
бала.

Ответ: не меньше 300.



Дано: $l_1 \parallel l_2$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{6}{5}$$

Решение:

$$O_1B = CO_1 = W_1; \quad CO_2 = BO_2 = W_2$$

$$\triangle O_1CO_2 \cong \triangle O_1BO_2 \quad (\text{по 3 сторонам})$$

$$S_{BO_1CO_2} = 2S_{BO_1O_2}$$

$$K: O_2K \perp BE; \quad O_2K = h \quad (\text{обозначим})$$

$$2W_1 = W_2 + h \quad (\text{расстояние между } l_1 \text{ и } l_2)$$

NM (продолжение отрезка O_2K до пересечения с l_1)

$$NK \cdot MK = BK \cdot EK \quad (\text{свойство пересек. хорд})$$

$$\triangle BO_2E \text{ (равнобедрен)} \Rightarrow O_2K - \text{медiana (BK = EK)}$$

$$BK^2 = (W_2 + h)(W_2 - h) = W_2^2 - h^2$$

$$BE = 2\sqrt{W_2^2 - h^2} \Rightarrow S_{BO_2E} = h\sqrt{W_2^2 - h^2}$$

BO_1O_2K - прямоугольный треугольник ($O_1B \parallel O_2M \perp l_2$)

$$S_{BO_1O_2K} = \frac{h+W_1}{2} \sqrt{W_2^2 - h^2} \Rightarrow S_{BO_1O_2K} = S_{BO_1O_2} + S_{BO_2K} - S_{BO_2E} =$$

$$= \frac{1}{2}W_1\sqrt{W_2^2 - h^2}; \quad \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{W_1}{h} = \frac{6}{5}; \quad h = \frac{5}{6}W_1$$

$$2W_1 - \frac{5}{6}W_1 = W_2; \quad \frac{W_2}{W_1} = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $\int a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0$

$$[(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$$

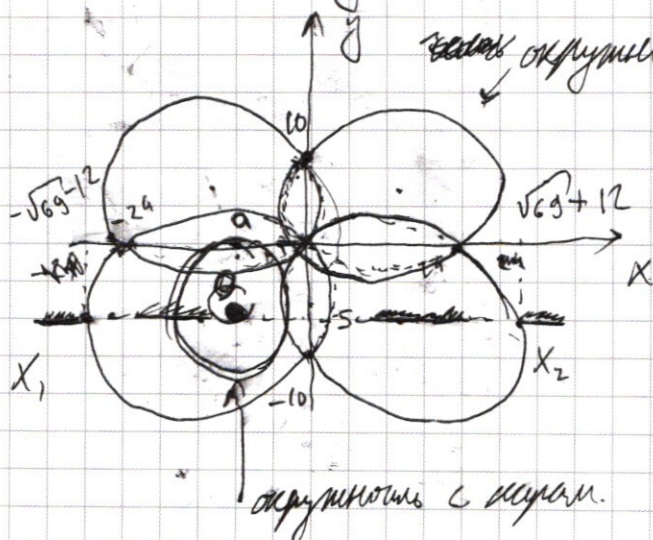
$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = 25$$

$$O(a; -5); R=5$$

или $x \geq 0; y \geq 0$ (замечание: симметрия относительно осей Ox и Oy)

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$$

$$O(12; 5); R=13$$



О лежит на прямой $y = -5$

$$(x-12)^2 + (-5-5)^2 = 169$$

$$(x-12)^2 + 100 = 169$$

$$(x-12)^2 = 69, \quad |x-12| = \pm\sqrt{69}$$

$$|x| = 12 \pm \sqrt{69}; \quad \begin{cases} x = 12 + \sqrt{69} \\ x = 12 - \sqrt{69} \\ x = -12 + \sqrt{69} \\ x = -12 - \sqrt{69} \end{cases}$$

$$|a - (-\sqrt{69} - 12)| < 5 \quad (\text{расстояние между точкой } O \text{ и } X_1)$$

$$|a - (\sqrt{69} + 12)| < 5 \quad (\text{расстояние между точкой } O \text{ и } X_2)$$

$$1) \quad -5 < a + \sqrt{69} + 12 < 5$$

$$-\sqrt{69} - 17 < a < -\sqrt{69} - 7$$

$$(-\sqrt{69} - 17; -\sqrt{69} - 7)$$

$$2) \quad -5 < a - \sqrt{69} + 12 < 5$$

$$\sqrt{69} + 7 < a < \sqrt{69} + 17$$

$$(\sqrt{69} + 7; \sqrt{69} + 17)$$

$$\text{Ответ: } (-\sqrt{69} - 17; -\sqrt{69} - 7) \cup (\sqrt{69} + 7; \sqrt{69} + 17)$$

$$\begin{cases} a \leq -24 \\ a \geq -\sqrt{69}-17 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \geq 24 \\ a < \sqrt{69}+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq -\sqrt{69}-7 \\ a < 12-\sqrt{69} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq \sqrt{69}-7 \\ a > \sqrt{69}-12 \end{cases}$$

(см. Карманы)

$$\text{Ответ: } [-\sqrt{69}-17; -24] \cup [-\sqrt{69}-7; 12-\sqrt{69}] \cup (\sqrt{69}-12; \sqrt{69}-7] \cup [24; \sqrt{69}+17]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x - 6y + z = 26$$

$$ax + 5y - cz = a$$

$$ax + \frac{10x + 5z}{6} - 10 = cz = a$$

$$x + \frac{a + 10}{6} = cz = \frac{10x + 5z}{6}$$

$$y = \frac{2x + z - 26}{6} = \frac{2x + z}{6} - 2$$

$$S: S \neq 300$$

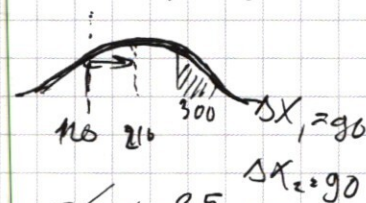
$$S < 120$$

$$80 \cdot 6 = 360$$

$$60 \cdot 1 = 60$$

$$S = 210$$

1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	
4	5	6	7	8	9	
5	6	7	8	9	10	
6	7	8	9	10	11	
7	8	9	10	11	12	



$$\left(\frac{10}{6} + a\right)x + \left(\frac{5}{6} - c\right)z = a + 10$$

$$x = \frac{6(a + 10 - (\frac{5}{6} - c)z)}{a + 10} = \frac{6a + 60 - 5z + 6cz}{a + 10} = 1 + \frac{5cz - 25z}{3a + 5}$$

$$1 + \frac{50z - 25z}{18a + 30} = 1 + \frac{10z + (-\frac{5}{6} + c)z - 10}{3a + 10}$$

$$\text{Анализ: } 3300$$

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 5x + 18}{2} \quad \frac{1 \quad -4 \quad -5 \quad 18}{2 \quad 1 \quad -2 \quad -9 \quad 0}$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 9) = 0$$

$$8 - 36 - 5 < 0$$

$$x \neq 2$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 9}}{1} = 1 \pm \sqrt{10}$$

$$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$2 < \sqrt{10} < 3$$

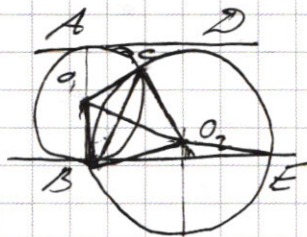
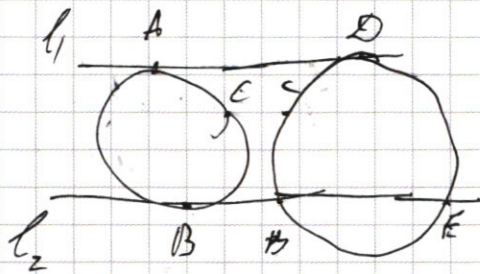
$$1 + 3\sqrt{10} + 30 + 10\sqrt{10} - 18 - 8\sqrt{10} - 5 = -5\sqrt{10} + 8 < 0$$

$$1 - 3\sqrt{10} + 30 - 10\sqrt{10} - 18 + 18\sqrt{10} - 5 = 10 < 5\sqrt{10} < 15$$

$$\text{Анализ: } 1 - \sqrt{10}$$

$$= 5\sqrt{10} + 8 > 0$$

$$-15 < -5\sqrt{10} < -10$$



$$O_1, O_2 \in x$$

$$W_1 + W_2 = x$$

$$S_{O_1 C B D}$$

$$S_{B O_2 K} = \frac{h + W_1}{2} \sqrt{W_2^2 - h^2}$$

$$S_{B C O_2} = \left(\frac{h + W_1}{2} \sqrt{W_2^2 - h^2} - \frac{h \sqrt{W_2^2 - h^2}}{2} \right) \cdot W_1 \sqrt{W_2^2 - h^2}$$

$$\frac{S_{B C O_2}}{S_{O_2 B E}} = \frac{W_1}{h} = \frac{6}{5} \quad h = \frac{5}{6} W_1$$

$$\begin{aligned} 2W_1 &= h + W_2 \\ 2W_1 \left(2 - \frac{5}{6} \right) &= W_2 \end{aligned}$$

$$\frac{W_2}{W_1} = 2 - \frac{5}{6} = \frac{12-5}{6} = \frac{7}{6}$$

Ответ: $\frac{7}{6}$

$$\frac{4+4+4}{12} + \frac{5+5}{10} + \frac{4+7}{11} = 33$$

$$33 - 4 - 5 = 24$$

$$\frac{24}{33} = \frac{8}{11}$$

$$(h + W_2)(W_2 - h) = BK \cdot EK$$

$$W_2^2 - h^2 = BK \cdot EK = \frac{BE^2}{4}$$

$$BE = 2\sqrt{W_2^2 - h^2}$$

$$BK^2 = W_2^2 - h^2$$

$$\text{Since } EBO_2 \sim \frac{h}{\sqrt{W_2^2 - h^2}}$$

$$S_{O_2 B E} = h \sqrt{W_2^2 - h^2}$$

$$\begin{array}{r} 800 \\ - 33 \\ \hline 30 \\ - 22 \\ \hline 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 122,7 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ - 18 \\ \hline 14 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 10y + 25$$

$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$

$$O(a; -5) \quad R=5$$

$$x=0, y=0 \quad x=12, y=5$$

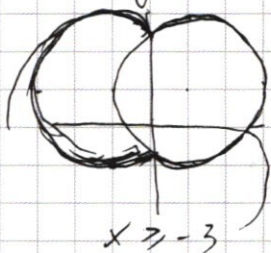
$$(12-12)^2 + (5-5)^2 = 0$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$O(12; 5); R=13$$

$$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$



$$x \geq -3$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^3 - 15x^2 + 9 = 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x=1 \quad 4-5-14+6+9=0$$

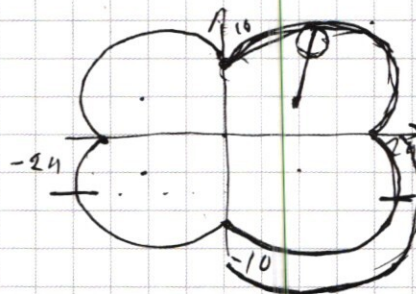
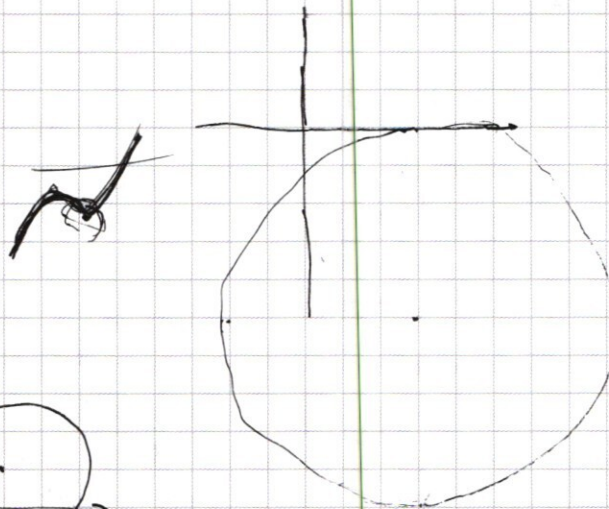
$$4x^3 - x^2 - 15x - 9 = 0$$

$$x(4x^2 - 15) - (x^2 + 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \quad 13 \leq \sqrt{181} < 14$$

$$x^2(4x-1) = 3(5x-9)$$

$$12x^2 - 2x - 15 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1+180}}{12} = \frac{14}{12} \pm \frac{\sqrt{181}}{12} \approx \frac{15}{12} \pm \frac{5}{12}$$



37

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & -5 & -14 & 6 & 9 & \\ \hline 1 & 4 & -1 & -15 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 15 \\ \hline 24 \\ \times 35 \\ 9 \\ \hline 315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -1 & -15 & -9 & \\ \hline 3 & 4 & 11 & 18 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 4 & -1 & -15 & -9 & \\ \hline 3 & 4 & -13 & 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -1 & -15 & -9 & \\ \hline 9 & 35 & 300 & -9 & \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 4 & -1 & -15 & -9 & \\ \hline -9 & 4 & +37 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 4 \\ \hline 108 - 9 + 45 - 9 < 0 \end{array}$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2(x+3) + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 + x^2(4x^2 - 5(x+3)) = 0$$

$$(x+3)^2 + x^2(4x^2 - 5x - 15) = 0$$

$$4x^2 - 5x - 15 = 0$$

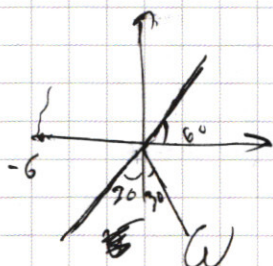
$$4x^2 - 5x - 15 = \left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 15 =$$

$$(x+3)^2 + x^2 \left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{215}{16}$$

$$\left(x \left(2x - \frac{5}{4}\right) + x+3\right)^2 =$$

$$R_x = 6$$

$$R_y = 4$$



$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\frac{2\pi}{180} \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi$$

$$\omega_{\text{ср}} = 2 \omega_k =$$

$$t = \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{6 \omega_k}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{6 \omega_k}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{6} = 60^\circ$$

$$\omega_y = \frac{2\pi}{6} \cdot 3 = 180^\circ$$

$$\text{Ans. } (3\sqrt{3}; 3); (-3\sqrt{3}; -3)$$

$$4x^2 - 5x - 15 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 240}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{265}}{8}$$

$$\frac{4x^2 - 5x - 15}{+3} = \frac{4x^2 - 5x - 15}{-3}$$

$$\frac{16}{80} = \frac{15}{80}$$

$$(x+3) \left(2x - \frac{5}{4}\right) =$$

$$= 2x^2 + 6x - \frac{5}{4}x - \frac{15}{4} =$$

$$4 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$v_k = v_{\text{ср}}$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$$

$$T_y = \frac{8\pi}{\omega_y}$$

$$\omega_k = \frac{v_k}{r}$$

$$3\omega_k = \omega_y$$

$$\frac{v}{r} = \omega$$

$$\omega_y = \frac{v_y}{r} = \frac{v_k}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$36 - x^2 = 3$$

$$\omega_k = \frac{4\pi}{6} = \frac{4}{6} \cdot 180 = 120^\circ$$

$$\omega_y = \frac{4\pi}{6} \cdot 3 = 180^\circ$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{6} = 60^\circ$$

$$\omega_y = \frac{2\pi}{6} \cdot 3 = 180^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2\pi}{3} : 4 \omega_k = \frac{\pi}{8 \omega_k}$$

$$\frac{\pi}{8 \omega_k} \cdot \omega_k = \frac{\pi}{8} = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{2\pi}{4} =$$

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$(3\sqrt{3}, 3); (3, 3\sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, -3); (-3, -3\sqrt{3})$$

