

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

11. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

12. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

13. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
14. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
15. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
16. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
17. [6 баллов] Решите систему

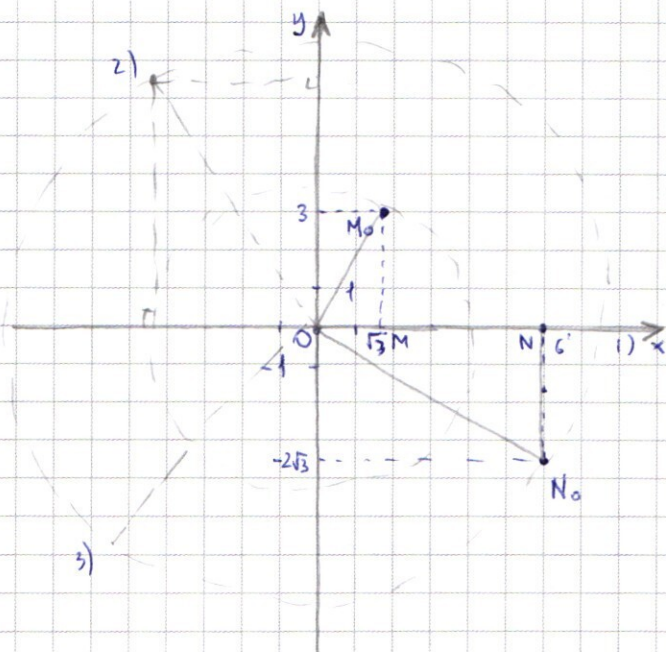
$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{6x^4 - 6x^3} \\
 -x^3 - 4x^2 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -3x^2 + 2x \\
 \underline{-3x^2 + 3x} \\
 -x + 1
 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



Пусть $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ — проекции
векторов $\overline{OM_0}$ и $\overline{ON_0}$ на ось x .

$\triangle OM_0M \sim \triangle ON_0N$ по 2 сторонам
и $\angle$ между ними

$$\frac{OM}{ON} = \frac{MM_0}{NN_0} =$$

$$\triangle OM_0M \sim \triangle N_0ON$$

по 2 сторонам и $\angle$ между ними

$$\left(\frac{OM_0}{N_0N} = \frac{M_0M}{ON} = \frac{1}{2} \text{ по условию} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{OM_0}{ON_0} = \frac{1}{2}$$

Самолет летает по окружности
с радиусом, в 2 раза меньше,
чем у окружности скелера.

Кратчайшее расстояние между птицами — когда птицы летят
на одной прямой с точкой O .

$$\sin \angle NON_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2+36}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle NON_0 = 30^\circ$$

$$\sin \angle MOM_0 = \frac{3}{\sqrt{9+3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle MOM_0 = 60^\circ$$

Скорости птиц равны $\Rightarrow$ самолет пролетает дугу, в 2 раза
большую по радиусной мере, чем скелер за это время.

(1 встреча): Скелер пролетает 30° , самолет — 60° . Самолет и скелер
на оси x . Координата скелера: $(4\sqrt{3}; 0)$

(2 встреча): Скелер пролетит еще 120° , самолет — 240°
Координата x : $\sin -30^\circ \cdot 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$, y : $\cos 60^\circ \cdot 4\sqrt{3} = 6$
 $(-2\sqrt{3}; 6)$

(3 встреча): Скелер пролетит еще 120° , самолет — 240°
Координата x : $-2\sqrt{3}$, y : -6 . $(-2\sqrt{3}; -6)$. Ответ:

Следующие встречи произойдут в точках предыдущих
встреч.

$(4\sqrt{3}; 0)$
 $(-2\sqrt{3}; 6)$
 $(-2\sqrt{3}; -6)$

N5.

$$7000 = 2^3 \cdot 2^5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Возможные наборы из 3 цифр:

N1) $\{ \underline{1}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{5}, \underline{5}, \underline{5}, \underline{7} \}$

N2) 1, 4, 2, 5, 5, 5, 7, 1

N3) 1, 8, 5, 5, 5, 7, 1, 1.

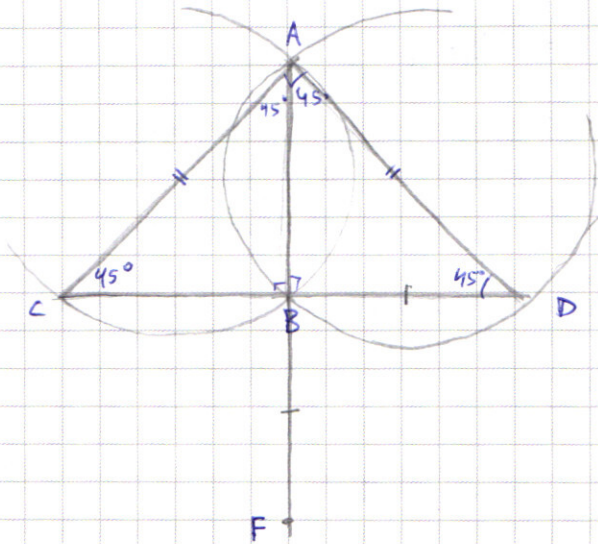
н1: Количество чисел - $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120 = k,$

N2. Коэффициент равен: $\frac{3!}{3! \cdot 2!} = 3360 = k_2$

ВЗ: Количество чисел - $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120 = k_3$

Общая сумма: $k_1 + k_2 + k_3 = 5600$

Ombem: 5600.

 $n = 6$ 

Дано: 2 окружности с $R=7$.

$$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$

$$C \in w_1, D \in w_2, B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF \perp CD, BF = BD$$

Khai nu: CF

$\angle ACB = \angle ADB$ (опираются на равные дуги $\hat{A} - \cup AB$).

$\Rightarrow \Delta CAD$ - равнобедренный,
 $\angle ACB = \angle ADB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$AC = AD \Rightarrow \cup ABC = \cup ABD$ (хорды равны $\Rightarrow$ дуги равны)

$$\text{Majora } \cup BC = \cup BD \Rightarrow \angle CAB = \angle DAB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle FBD$ — равнобедренны и равны по 2 сторонам и $\angle$ между ними

$$(BC = AB, AB = BD, BD = BF \Rightarrow BC = AB = BD = BF) \Rightarrow AC = AD = DF = CF$$

$\angle CBA = 90^\circ$ - ~~внутренний~~ ^{вписанный} $\Rightarrow$ опирается на диаметр.

Thema $AC = 2R = 14$.

Из равенства сторон $CF = AC$
 $\Rightarrow CF = 14$

Answer: 14.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \quad x=-5 \text{ - корни}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \quad \text{Возведем в квадрат обе части с проверкой}$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Проверка:

$$x=3: \sqrt{27-48+25} = \sqrt{4} = 2, 2 \cdot 3 - 4 = 2, 2 = 2. \text{ - верно.}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}: \sqrt{x^3-16x+25} = \sqrt{(\sqrt{13}-3)^2} \geq 0, 2x-4 = 1+\sqrt{13}-4 = \sqrt{13}-3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ - не корни.}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}: \sqrt{x^3-16x+25} = \sqrt{(3+\sqrt{13})^2} > 0, 2x-4 = 1-\sqrt{13}-4 = -\sqrt{13}-3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ - не корни.}$$

Ответ: $-5; 3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

N 7.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

Решим графически 2-е ур-е

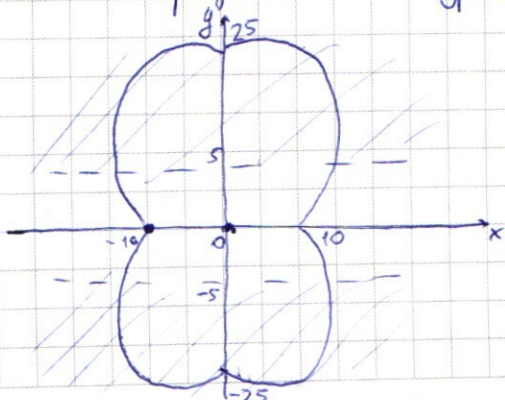


График 2-го уравнения - угасили
окружности радиуса 13, центры:
(5; 12), (-5; 12), (-5; -12), (5; -12)
и точка (0; 0).

$$\begin{cases} \text{Если } y \geq 5: |x+y+5| \leq 10 \Rightarrow x \leq 0 \\ |x-y+5| \leq 10 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow -10 \leq x \leq 0 \\ \text{Если } y \leq -5: |x-y+5| \leq 10 \Rightarrow x \leq 0 \\ |x+y+5| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Но одна точка не удовлетворяет
таким требованиям

№7 (продолжение).

Если $x > 10$: из $|x+y+5| \leq 10$ следует $y < -15$. Противоречие.
из $|x-y+5| \leq 10$ следует $y > 5$

Если $x < -10$: из $|x+y+5| \leq 10$ и $|x-y+5| \leq 10$ следует, что $y = 0$.
Таких точек не существует.

Решения системы удовлетворяют следующим условиям:

$x \in [-10; 10]$, $y \in (-5; 5)$. Этому удовлетворяют точки: $(-10; 0)$, $(0; 0)$, $(10; 0)$

Проверка:

1) $(-10; 0)$: $\begin{cases} |-10+5| + |-10+5| \leq 10 \\ (5)^2 + (-12)^2 = 169 \end{cases}$ - верно.

2) $(0; 0)$: $\begin{cases} |5| + |5| \leq 10 \\ (-5)^2 + (-12)^2 = 169 \end{cases}$ - верно.

3) $(10; 0)$: $\begin{cases} |10+5| + |10+5| \leq 10 \\ 5^2 + (-12)^2 = 169 \end{cases}$ - неверно.

Ответ: $(-10; 0)$; $(0; 0)$; $(10; 0)$

№2.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2((a-b)x + 3y) = a \\ b(3x + (a-b)y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b+3)(x+y) = \frac{2b+2}{2b} \\ b(3x + (a-b)y) = 1 \end{cases}$$

$$x+y = \frac{2b+2}{2b(a-b+3)} \quad y = \frac{2b+2}{2b(a-b+3)} - x \quad \begin{matrix} b \neq 0 \\ a-b \neq 3 \end{matrix}$$

Ответ: все пары, кроме $(k; 0)$, $(k; k+3)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-1)(6x^3+x^2-3x-1)$$

$$6x^4+(x+1)^2-5x^2|x+1|$$

$$|x+1|=a$$

$$6x^4+a^2-5x^2a \quad x^2=b$$

$$6b^2-5ab+a^2$$

$$D=25a^2-4a^2-21$$

$$D=25b^2-24b^2=b^2$$

$$a_1 = \frac{5b-b^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{5b+b^2}{2}$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x+6y=a \\ 3bx+(a-b)by=1 \end{cases}$$

$$3abx+a^2by-ab^2y=a$$

$$2ax-2bx+6y=a$$

$$\begin{cases} 2 \\ (a-b)(2+by)+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2((a-b)x+3y)=a \\ 3bx+ \end{cases}$$

$$3b(3x+(a-b)y)=1$$

$$2((a-b)x+3y)=a$$

$$b(3x+(a-b)y)=1$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1$$

$$x^2+3x-2$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$|x+1| = \frac{5x^2-x^4}{2} \quad 5x^2-x^4-5x^2+2x+1=0$$

$$a-b=-3$$

$$2(-3x+3y)=a$$

$$b(3x-3y)=1$$

$$-1; -2$$

$$-3x+3y=\frac{a}{2}$$

$$b(-\frac{a}{2})=1$$

$$-\frac{ab}{2}=1 \quad ab=-2$$

$$(a-b)(2x+by)+2(3y+bx)$$

$$(a-b+3)(x+y)=\frac{a}{2}+\frac{1}{b}$$

$$x+y=\frac{ab+2}{2b(a-b+3)}$$

$$x+y \quad y=\frac{ab+2}{2ab}$$

$$b \neq 0$$

$$a \neq 3-b$$

$$a \neq b-3$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2 | x+1 | \geq 0$$

$$(x+1)(|x+1| - 5x^2) + 6x^4 \geq 0$$

$$x \geq -1:$$

$$(x+1)(x+1 - 5x^2) + 6x^4 \geq 0$$

$$(x+1)^2 - 5x^2(x+1) + 6x^4 \geq 0$$

$$-5x^3 - 5x^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(1 + 2\sqrt{13} + 13)(1 + \sqrt{13}) = 1 + \sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 26 + 13 + 13\sqrt{13} =$$

$$= \frac{16\sqrt{13} + 40}{8} = 2\sqrt{13} + 5.$$

$$16\sqrt{13} + 40 - 8 - 8\sqrt{13} + 25 = 8\sqrt{13} + 57.$$

$$4 + \sqrt{13} - 4 =$$

$$2\sqrt{13} + 5 - 8 - 8\sqrt{13} + 25 = -6\sqrt{13} + 22 = 2(-3\sqrt{13} + 11)$$

$$= 9 - 6\sqrt{13} + 13 = (3 - \sqrt{13})^2 \geq 0$$

$$3 < \sqrt{13} < 4$$

$$4 + \sqrt{13} - 4 = \sqrt{13} - 3$$

$$(1 - \sqrt{13})(1 - 2\sqrt{13} + 13)(1 - \sqrt{13}) = 1 - \sqrt{13} - 2\sqrt{13} + 26 + 13 - 13\sqrt{13} =$$

$$= \frac{40 - 16\sqrt{13}}{8} = 5 - 2\sqrt{13} < 0$$

$$5 - 2\sqrt{13} - 8 + 8\sqrt{13} + 25 = 6\sqrt{13} + 22 =$$

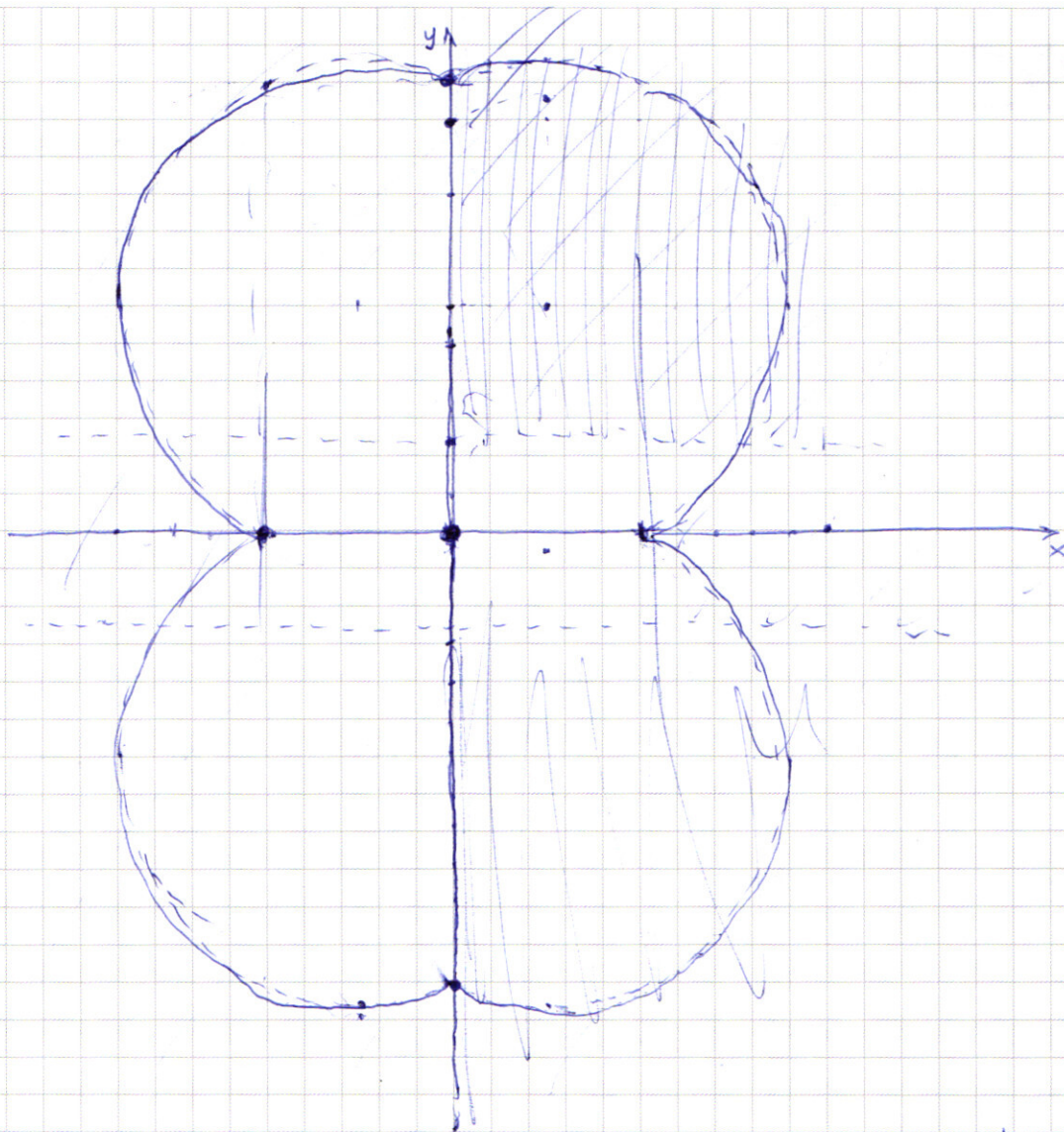
$$(x-5)(y-12) = 169 = 13^2$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1.$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$



$$(x-1)(y-2)=4$$

$x > 0$:
 Если $y > 0$, то:
 $x \leq -10$:
 Если $y > 0$, то:
 $|x+y+5| + |x-y+5|$

$$(|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 = 4$$

$$x^2 - 10|x| + 25 + y^2 - 12|y| + 44 = 169$$

$$x^2 + y^2 - 10|x| - 12|y| = 169 - 69 = 100$$

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 40$$

Если $y \geq 3$:

$$x \leq 0 \quad x \geq 0 \Rightarrow x = 0$$

При $x = 0$: $y = 12$
 $\Rightarrow$ Не подходит.

Если $y \leq 5$:

$$x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$\Rightarrow x = 0$ — тоже не подходит.

$$x < -10$$

Если $y > 0$:

$$|x+y+5| + |x-y+5| > 10$$

Если $y < 0$:

тогда $|x+y+5| + |x-y+5| > 0$

$$\Rightarrow x \geq -90$$

Если $x > 0$:

тогда $|x+y+5| + |x-y+5| > 0$

Если $x > 10$:

$$|x+y+5| + |x-y+5|$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

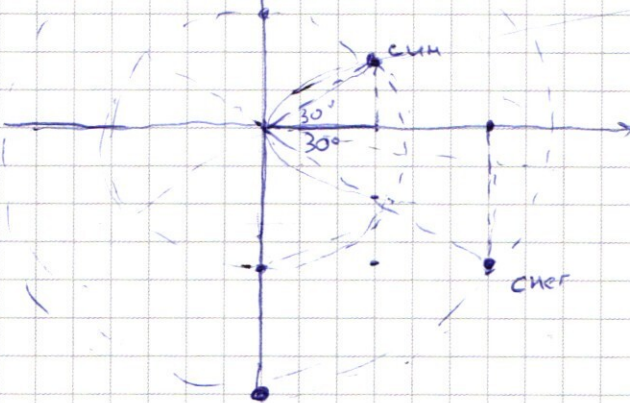
Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ - 6x^4 + 6x^3 \\ \hline -11x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ -11x^3 - 11x^2 \\ \hline 7x^2 + 2x + 1 \\ 7x^2 + 7x \\ \hline -5x + 1 \end{array}$$

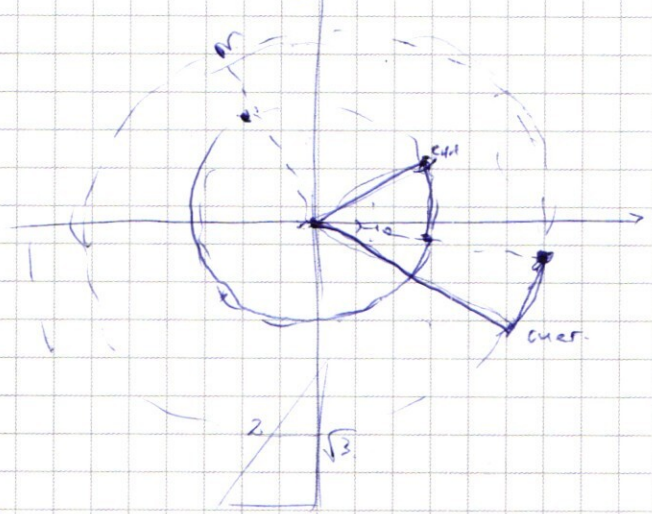


$$\sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 6x^3 - 11x^2 + 7x \end{array}$$

$$48 - 12 = 36 \quad \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = 2 \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 7000 & 2 \\ 3500 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \begin{cases} 2ax - 2bx + 6y = 2 \\ 3bx + aby - b'y = 1 \end{cases}$$

$$2 + 360$$

$$= \frac{2}{1}$$

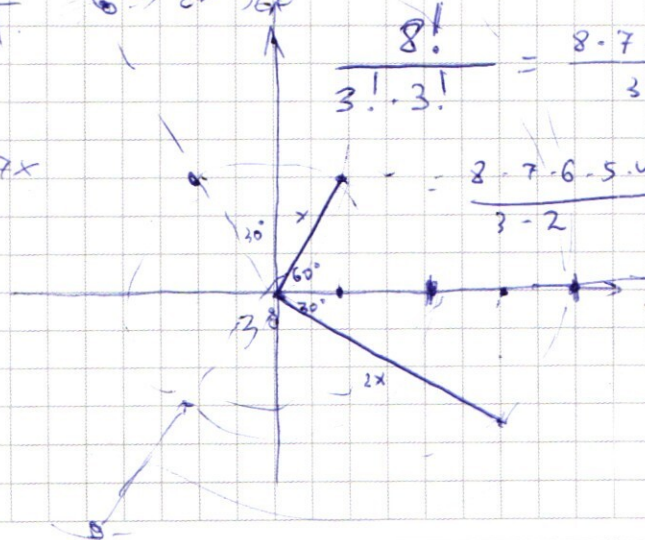
$$7000 = 2^3 \times 5^3 \times 7 \times 1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 20 = 140 \cdot 8 = 1120$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ 6x^4 + 6x^3 \\ \hline -11x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ -11x^3 - 11x^2 \\ \hline 7x^2 + 2x + 1 \\ 7x^2 + 7x \\ \hline -5x + 1 \end{array}$$



$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

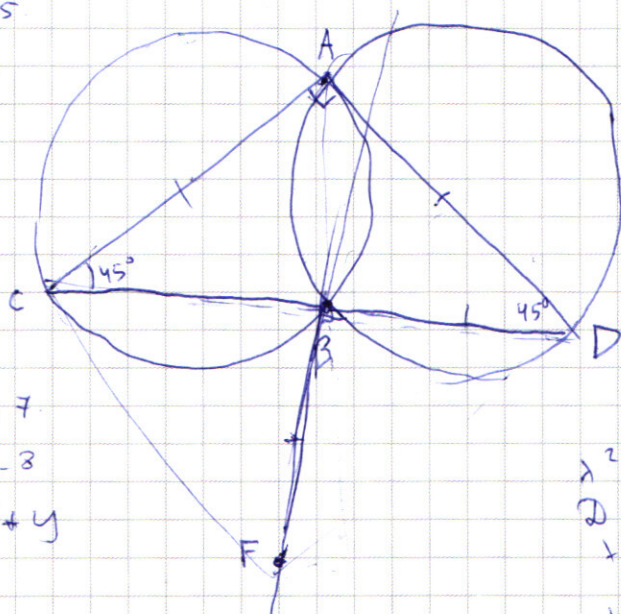
$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(x-3)(x^2-x+3)=0$$

$$-10-y+5$$

$$-10-y-5$$

$$-15-y$$



$$y = 7$$

$$x = -8$$

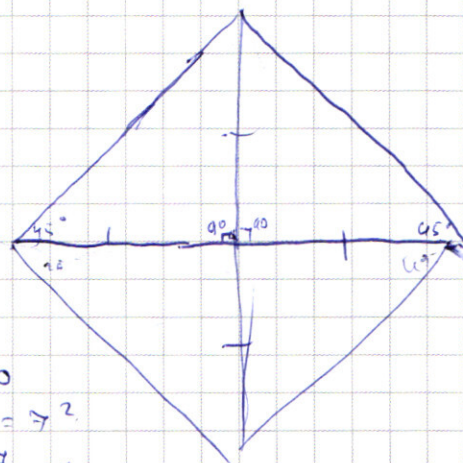
$$-15 + y$$

$$x^2 + 3x - 10$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 3y = a \\ b(3x + (a-b)y) = 1 \end{cases}$$

$$(a-b)x + 3y = \frac{a}{2}$$

$$3x + (a-b)y = \frac{1}{b}$$

$$(a-b)(x+y) + 3(x+y) = \frac{a}{2} + \frac{1}{b}$$

$$(a-b)$$

$$(a-b+3)(x+y) = \frac{a}{2} + \frac{1}{b}$$

$$(a-b+3)(x+y) = \frac{ab+2}{2b}$$

$$(2ab - 2b^2 + 6b)(x+y) = ab + 2$$

$x = -5$
корень

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2-16x+41=0$$

$$x^3-4x^2-16x+41=0$$

$$x^3-4x^2+9 = (x-3)(x^2-x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+9 \div x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3-16x+25 \div x+5 \\ \underline{x^3+5x} \\ -11x+25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+0x^2-16x+25 \div x-5 \\ \underline{x^3-5x^2} \\ 5x^2-16x+25 \\ \underline{5x^2-25x} \\ 41x+25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+0x^2-16x+25 \div x+5 \\ \underline{x^3+5x^2} \\ -5x^2-16x+25 \\ \underline{-5x^2-25x} \\ 9x+25 \end{array}$$

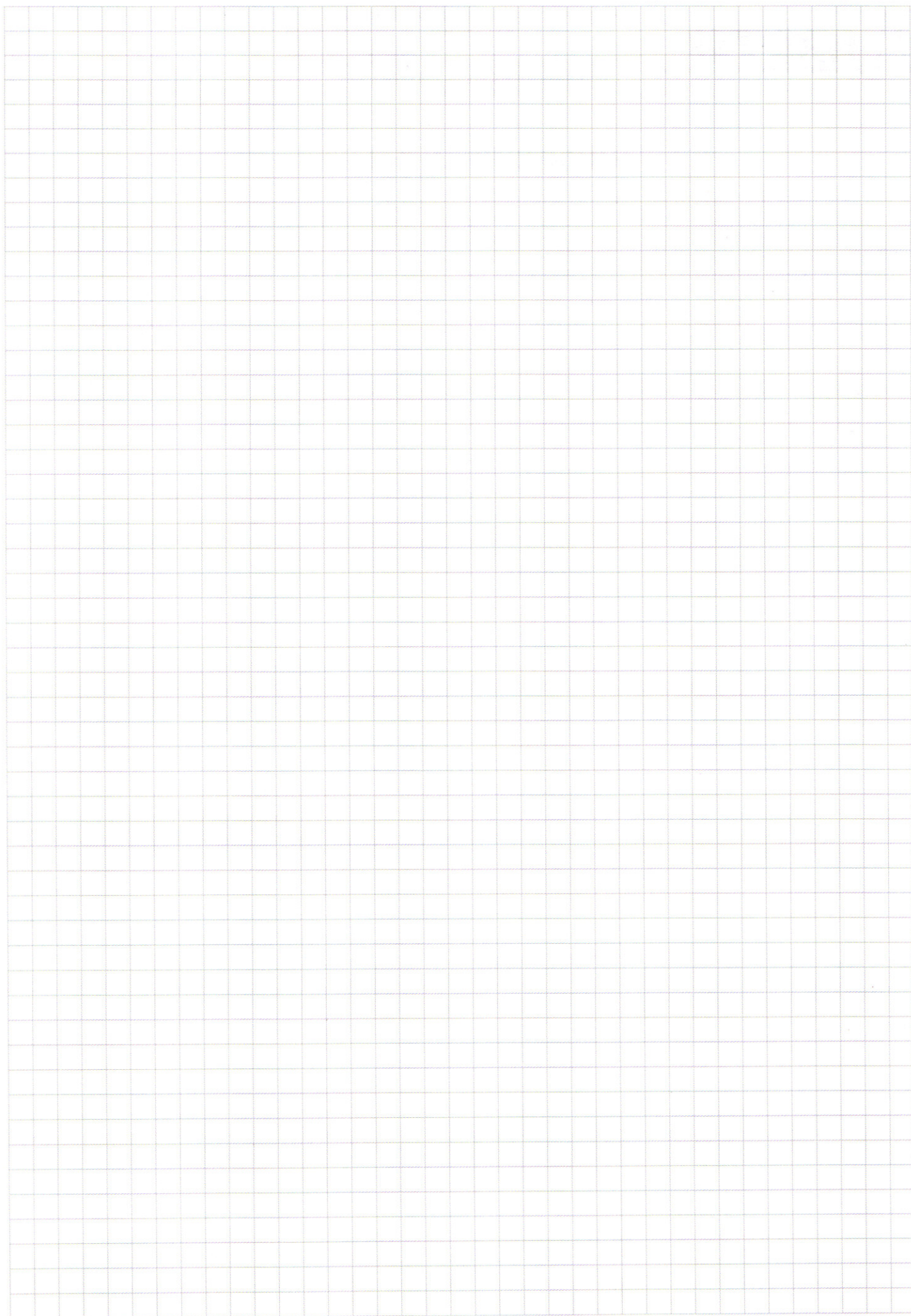
$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+0x+9 \div x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2+0x+9 \\ \underline{-x^2+3x} \\ -3x+9 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5x^2(x+1)$$

$$5x^3 + 5x^2 - 5x(x^2 + x)$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)