

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: $r_{W_1} = r_{W_2} = 9$

$\angle CA D = 90^\circ$

$\angle A B_1 W_1 = \angle A B_2 W_2$ т.к.

$W_1 = W_2$

$\downarrow$

$\angle D C A = \angle C D A = 45^\circ$

$\angle B F D = \angle F D B = 45^\circ$, т.к. $\angle B = 90^\circ$

построим $B F'$ симметричную $B F$, $B F = B F'$

F' лежит на $A D$ из симметрии, $D C$ -высота $\triangle A D F$

рассмотрим $\triangle A C F'$ и $\triangle B C F'$ *

$\angle C A F' = \angle C B F'$, т.к. $\angle C A F' = 90^\circ$

т.к. $\angle C B F' = \angle C A F' = 90^\circ$

$\downarrow$

F' лежит на W_1 , $C F'$ -диаметр

$C F' = 18$

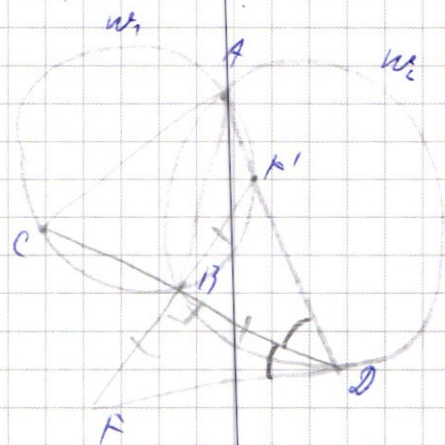
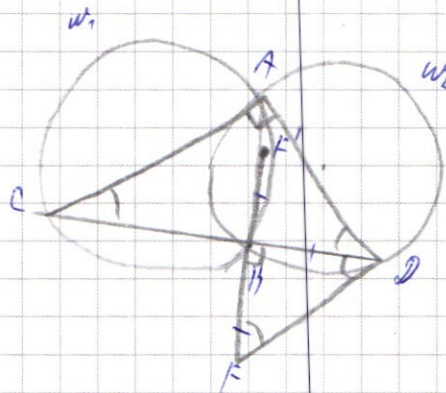
рассмотрим $\triangle F C F'$

$C B$ -медиана, высота

$\downarrow$

$F C F'$ -равнобедрен, $C F = C F' = 18$

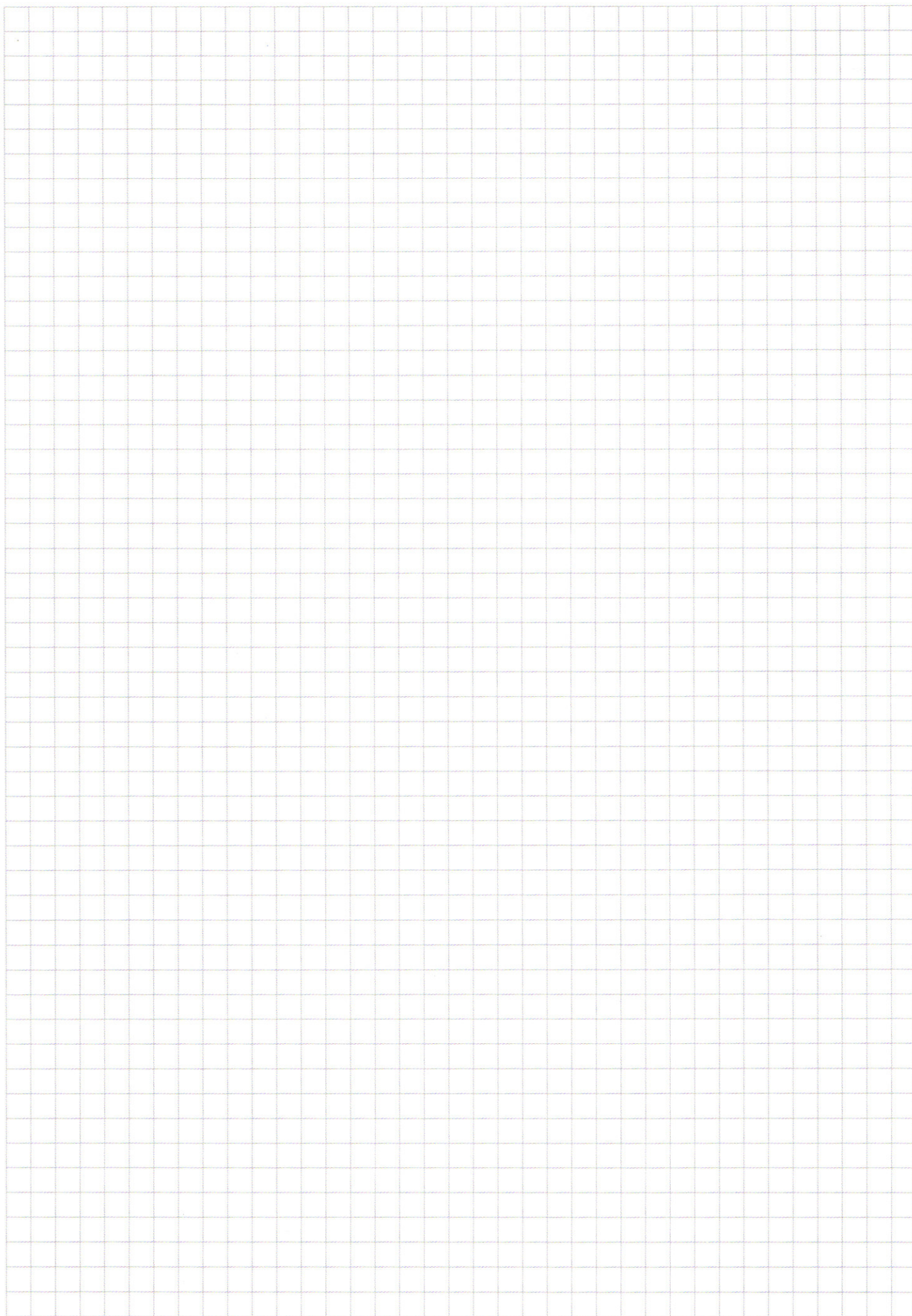
Ответ: $C F = 18$



* если от себя если F' попала в A ,

$\triangle C A F'$ -прямоугольный, $C A = 18$

также $C F = C A = 18$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

h.h. $\eta = 0 \Rightarrow \zeta = 0 \quad u=0, \zeta=0$

Problem: $x=6, y=0; x=0, y=0$

м. и м. замыслов по окр. с. и более дорог. , интереснейшая параметризация - чем
↓ более тон эконом в

Урагун и др.

$$D_{\text{max}} : z^2 + y^2 = r_{\text{max}}^2$$

Ans: $h^2 + y^2 = r_m^2$

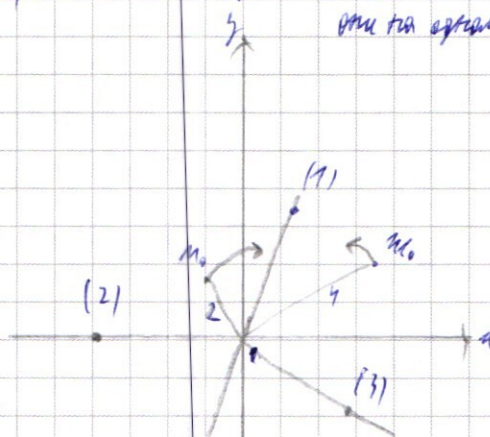
Kingdom r

$$r_m^2 = (-1)^2 + (\sqrt{5})^2 = 4$$

$$V_{\text{th}} = 2$$

$$V_m = (2\sqrt{5})^2 + 2^2 = 72 + 4 = 76$$

$$V_{24} = 4$$



Can it glutathione can it have in the group?

$$L_{\text{comp}} = 2 \cdot \pi \cdot z = 4\pi$$

$$\frac{\Delta}{4\pi} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\Delta}{2} \text{ (mag.)}$$

Chen H. G. H. L.

$$L_m = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$$

$$\frac{\lambda}{1/\pi} = \frac{\Delta p}{2\pi} \quad \therefore \Delta p = \frac{\lambda}{4} \text{ (nm)}$$

homogen für alle $\lambda \in \mathbb{R}$
 Eigenwerte λ von T sind $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{d}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{d}{4}$$

$$\frac{11}{2} - \frac{3x}{4} = 0$$

$$7\pi - 3\alpha = 0$$

$$d = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \Delta \phi = \frac{\pi}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

определить начальную цену

5. W $\angle m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle m = \frac{\pi}{6}$ (max.)

gib $\langle M = \frac{\pi}{2} \rangle$ $\langle M = \frac{\pi}{2} \rangle$, wo wir hier $\langle M = \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\angle M = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Умножая m и n известное значение угла,

m раз получим 62 раз 2π вокруг себя m

или 62 раз 2π вокруг себя n раз, т.е. m умножим $\frac{2\pi}{3}$,
или умножим $\frac{4\pi}{3}$

Следующая дуга (2) на 2π

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$

Следующая дуга (3) на 2π

$$\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Следующая дуга (4) на 2π

$$\frac{5\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

или 2π раз 2π $\Rightarrow$ дуга (1) $\Rightarrow$ дуга (1) $\Rightarrow$ дуга (1)

$$\text{или } 3 : \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

Определим координаты

$$\text{коор. } (1) = (4 \cdot \cos \frac{\pi}{3}; 4 \cdot \sin \frac{\pi}{3})$$

$$(2) = (4 \cdot \cos \pi; 4 \cdot \sin \pi)$$

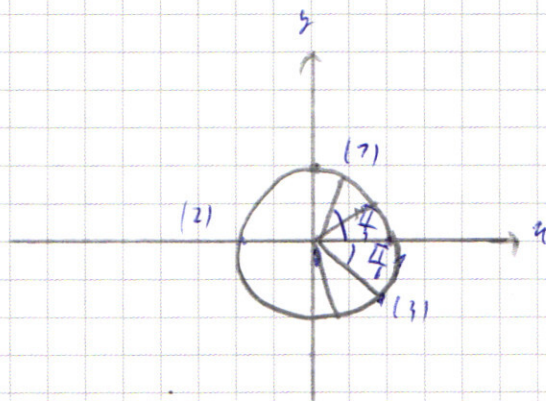
$$(3) = (4 \cdot \cos \frac{5\pi}{3}; 4 \cdot \sin \frac{5\pi}{3})$$

$$(1) = (4 \cdot \frac{1}{2}; 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2; 2\sqrt{3})$$

$$(2) = (4 \cdot (-1); 4 \cdot 0) = (-4; 0)$$

$$(3) = (4 \cdot \frac{1}{2}; 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})) = (2\sqrt{3}; -2)$$

$$\text{Ответ: } (2; 2\sqrt{3}) \quad (-4; 0) \quad (2\sqrt{3}; -2)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

числа $a_1, a_2, \dots, a_7$, $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 7400 = 74 \cdot 100 = 2 \cdot 7 \cdot 10^4 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1^2$.

т.к. $a_i \in \mathbb{N}$, то ка-то число = ка-то способ разложить $2, 2, 2, 5, 5, 7, 7, 7$

между 8 числами (разрешено)

1) для числа 7 — различного формата,

остаток 7 чисел

2) ка-то способ разложить $2, 2, 2$ между 7 числами (разрешено): $C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} =$
 $= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$

остаток 4 числа

3) ка-то разл. способ для $5, 5$ между 4 числ = $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

остаток 2 числа

4) для двух слагаемых остаток одного формата

Ответ: $8 \cdot 35 \cdot 6 \cdot 1 = 1680$

7) рассмотрим $|x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leq 6$

(1) $x - 3 - y = 0$

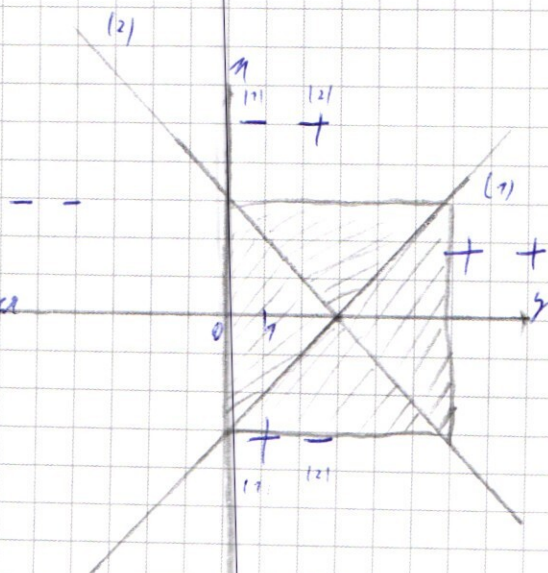
(2) $x - 3 + y = 0$ — линейные функции

координаты точек, где эти функции пересекаются

найдём

$|x - 3 - y| \leq 6$, $|x - 3 + y| \leq 6$, счит. $|x - 3 - y| \leq 6$, $y \geq x - 3$

$|x - 3 + y| \leq 6$, $y \geq 3 - x$, счит. $|x - 3 + y| \leq 6$, $y \leq 3 - x$



$$1) \quad ++ \quad x - 3 - y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$2) \quad +- \quad x - 3 - y - x + 3 - y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$3) \quad -- \quad -x + 3 + y - x + 3 - y \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$4) \quad -+ \quad -x + 3 + y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

Как видно на рисунке решение этого неравенства

$$x \in [0; 6]$$

$$y \in [-3; 3]$$

$$II \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Уравнение окружности задано относительно осей Ox и Oy

$$\text{при } x \geq 0, y \geq 0$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad \text{это окружность с центром } (3; 4), R=5$$

только ее часть относительно Ox

$x < 0$ для нас не интересно

линии системы будут симметричны относительно Ox

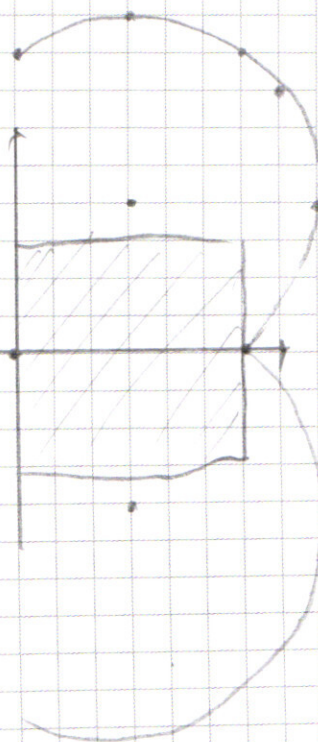
рассмотрим $y \geq 0$

$$y \in [0; 3]$$

$$(y-4)^2 \in [16; 7] \Rightarrow (x-3)^2 \in [0; 24]$$

$$x-3 \in [3; \sqrt{24}] \cup [-\sqrt{24}; -3] \Rightarrow x \in [-\sqrt{24}+3; 0], x \geq 0$$

$$x \in [0; \sqrt{24}+3], x \leq 6 \Rightarrow x = 0, 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 4bx + (a+b)y = 1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(a+b)x + 12y - a = 0 \\ 4bx + (a+b)y - 1 = 0 \end{cases}$$

уравнение вида $ax + by + c = 0$ - уравнение прямой, при $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$

$$b(1) \quad 12 \neq 0$$

$$b(2) \quad -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ оба уравнения - уравнения прямой

решение

система уравнений прямой - найти их пересечение

если решение $\exists$, то точка пересечения $\exists \Rightarrow$ прямые совпадают

если прямые совпадают, то

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{-a}{-1}$$

$$\begin{cases} \frac{3(a+b)}{4b} = a & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{12}{(a+b)b} = a & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} & (5) \end{cases}$$

$$b \neq 0 \quad \text{если } b=0, \text{ то } (2) = 0x + 0y = 1$$

$$0 = 1, \text{ неверно!}$$

$$a \neq -b \quad \text{если } a = -b, \text{ то } (1) = 0x + 12y = a$$

$$12y = a$$

$$(2) = 4bx + 0y = 1$$

$$4bx = 1, \text{ при } b \neq 0$$

получим бесконечно много решений

$$(3) \quad 3(a+b) = 4ab$$

$$v = a+b$$

$$(4) \quad 12(a+b) = a+b \cdot ab$$

$$v = ab$$

$$(5) \quad 3(a+b)^2 = 12 \cdot ab, \quad b \neq 0$$

$$(3) \quad 3v^2 = 4v$$

$$3(a+b)^2 = 12 \cdot ab$$

$$(4) \quad 12 = v^2 \cdot v \Rightarrow$$

$$(a+b)^2 = 4b$$

$$(5) \quad v^2 = 4b$$

$$v = \pm 2, \quad 4 \cdot 3 = 4v, \quad v = 3$$

$$-4 \cdot 3 = 4v, \quad v = -3$$

$$(12 = 4 \cdot 3, \quad 12 = (-4) \cdot (-3)) \quad \text{найдены}$$

исполнить $(x; y) = (4; 3) \quad (-4; -3)$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-a/a=3 \\ a^2-4a+3=0 \end{cases} \Rightarrow \text{чтобы было } a=1; 3$$

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-a/a=-3 \\ (4+a)a=3 \\ a^2+4a-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1=4+3=7 \\ a=-2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$b=3; 7$$

Ответ: $(a; b) \Rightarrow (1; 3) \quad (-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$
 $(3; 7) \quad (-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2) \quad , \quad x \neq -3 \text{ т.к. } \sqrt{(-3)^3-(-3)+10} = \sqrt{-27+13} = \sqrt{-14}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x=2 \quad \left| \quad x^2+x-3=0 \right.$$

$$D=1+12=13$$

подставляем т.к.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

используем неравенство т.к. $x < -2$

$$2-2+10=10 > 0$$

используем неравенство т.к. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$$-1-\sqrt{13} < -4$$

$$-\sqrt{13} < -3$$

$\sqrt{13} > 3 \Rightarrow$ верно

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right)^3 - \frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 10$$

$$10 > \frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$$

$$\begin{aligned} & 20 > -1+\sqrt{13} \\ & \Leftrightarrow 21 > \sqrt{13} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1$ подходит

Ответ: $x=2, \quad \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$



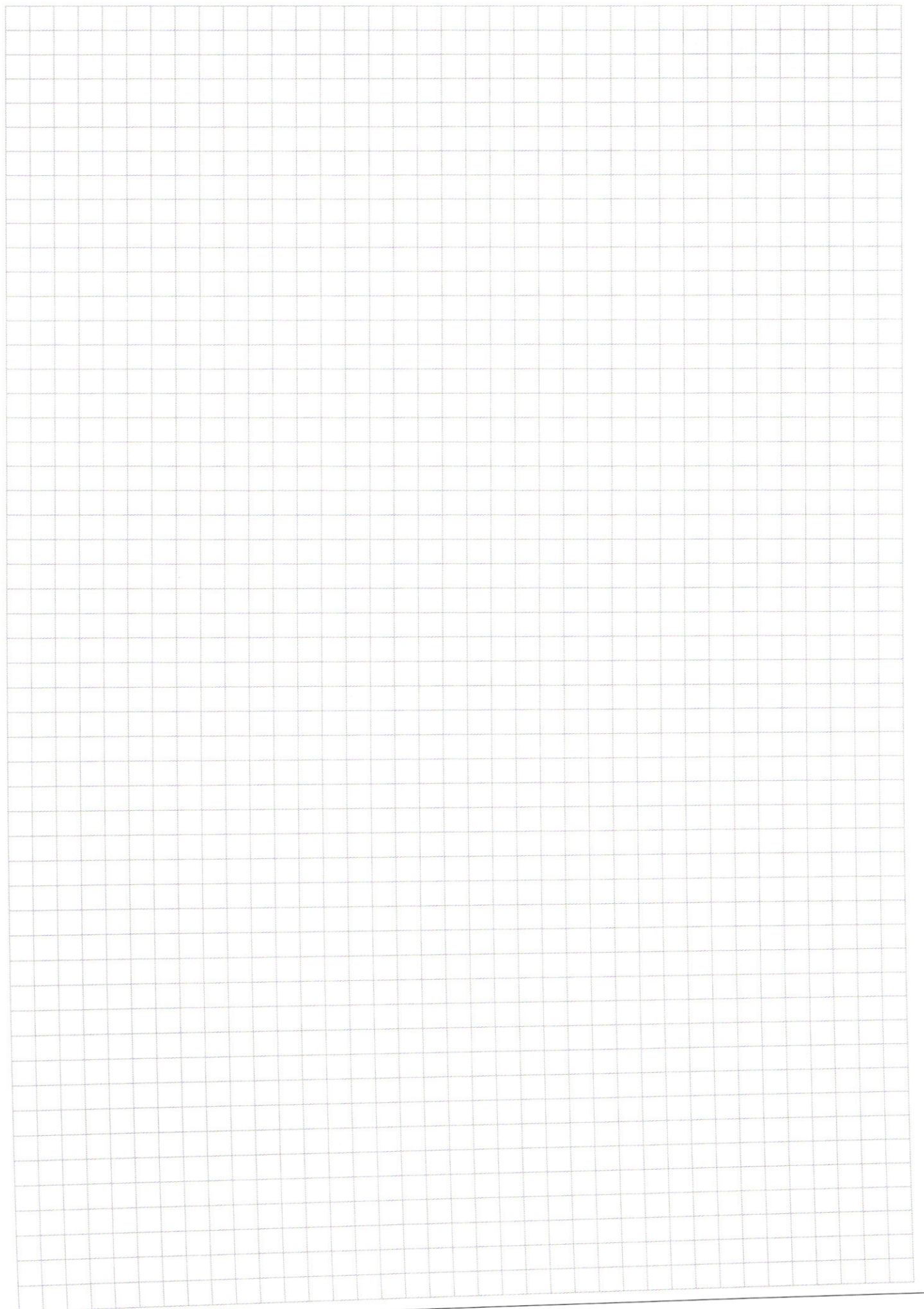
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$Q_m = x_m^2 + y_m^2 = 4 = 2^2$$

$$Q_m = x_m^2 + y_m^2 = 16 = 4^2$$

$$\frac{7}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = 0$$

$$2\pi - \frac{3}{4}\pi = 0$$

$$\begin{cases} (a+b)x + 72y = a \\ 48x + (a+b)y = 7 \end{cases} \quad a = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3a+3b}{4b} = \frac{72}{(a+b)b} = \frac{-a}{-7}$$

$$3a+3b = 4ab$$

$$72 = (a+b)ab$$

$$x = a+b \quad (x+3)\sqrt{x^2-x+10} = x^2+5x+6$$

$$V = ab$$

$$3V = 4V$$

$$72 = V \cdot V$$

$$\frac{72}{x} = V$$

$$\frac{3}{4}V = V$$

$$\frac{3}{4}V = \frac{72}{x}$$

$$V^2 = \frac{72 \cdot 4}{3} = 16$$

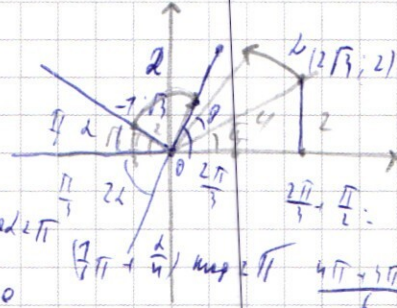
$$V = \pm 4$$

$$V = \pm 3$$

$$\frac{2}{3}\pi = \frac{x}{2}$$

$$\frac{7}{6}\pi + \frac{x}{4} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{x}{2}\right) \bmod 2\pi$$



$$\frac{L}{\pi} = \frac{P}{2\pi}$$

$$\frac{L}{\pi} = P_m$$

$$\frac{L}{2} = P_n$$

$$b = 3$$

$$\begin{cases} a+3b = 4b \\ 72 = (a+b)b \end{cases} \quad a = 1$$

$$b = 3a$$

$$72 = (a+b)b$$

$$a = 1$$

$$3(3+1)(x+72) - 3 = 0$$

$$4x + 45 - 7 = 0$$

$$(a+b)^2 = 4 \cdot 72$$

$$(a+b)^2 = 4 \cdot 72$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = \pm 4$$

$$x \geq -2$$

$$a \quad b$$

$$1 \quad 3$$

$$3 \quad 7$$

$$-2 + \sqrt{2} \quad -2 - \sqrt{2}$$

$$-2 - \sqrt{2} \quad -2 + \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{x}{2} = \frac{7}{6}\pi + \frac{x}{4} + 2\pi k$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{3x}{4} = 2\pi k$$

$$\frac{5}{6} + \frac{3x}{4} = 2\pi k$$

$$\frac{20\pi + 3x}{24} = 2\pi k$$

$$20\pi + 3x = 48\pi k$$

$$(x - 16)(4k - 20)$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 | x-1 | + 1 \neq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \neq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

$$x > 1 \quad 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

$$2x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 - 3x^2 - 3x + x + 1 \neq 0$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \neq 0$$

$$a_1 a_2 \dots a_7 = 7400 = 74 \cdot 100 = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7 \cdot 5^2$$

$$|x-3-5| + |x-3+5| \leq 6$$

$$|(x-3)| + |(5-4)| = 25$$

$$|x-(3-5)| + |x-(3+5)| \leq 6$$

77 222 557

8.

73. 77 222 55

$$C_2' = \frac{2'}{4'3'} = \frac{567}{7} = 35$$

1.35

7755

4

$$C_4' = \frac{4'}{2'2'} = 725 = 6$$

$$2x - 756$$

$$2x \leq 72$$

$$x - 3 - 5 \neq 0 \quad +4 \quad 456$$

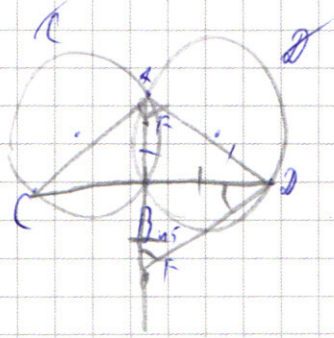
$$x - 3 + 5 \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 3+5 \\ x \neq 3-5 \end{cases}$$

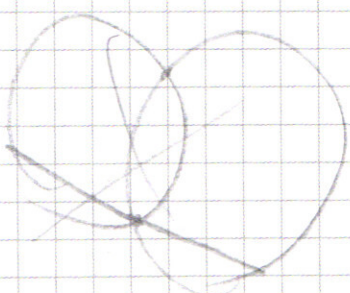
$$\begin{cases} x \neq 3+5 \\ x \neq 3-5 \end{cases}$$

$$|44 -$$

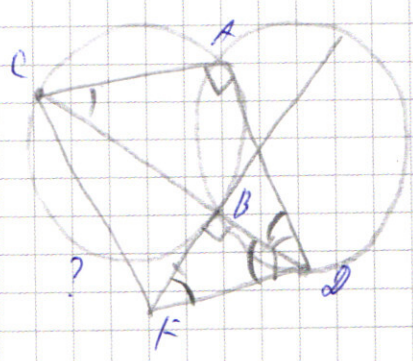
$$-2x + 656$$



$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 210 \\ 60 \\ \hline 7180 \end{array}$$



$$\angle A B = 45^\circ 90^\circ$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y=0$$

$$x-3+y=0$$

$$++ \quad 2x-6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$-+ \quad y+y-x+x-3+y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$-- \quad y+y-x+y+y-x \leq 6$$

$$-2x+1 \leq 6$$

$$-2x \leq 5$$

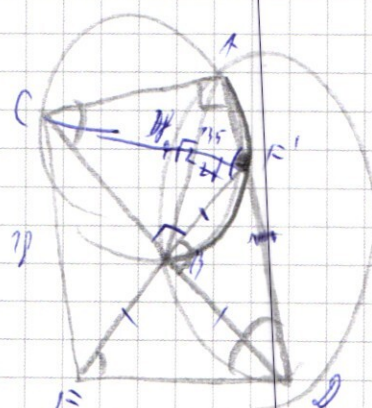
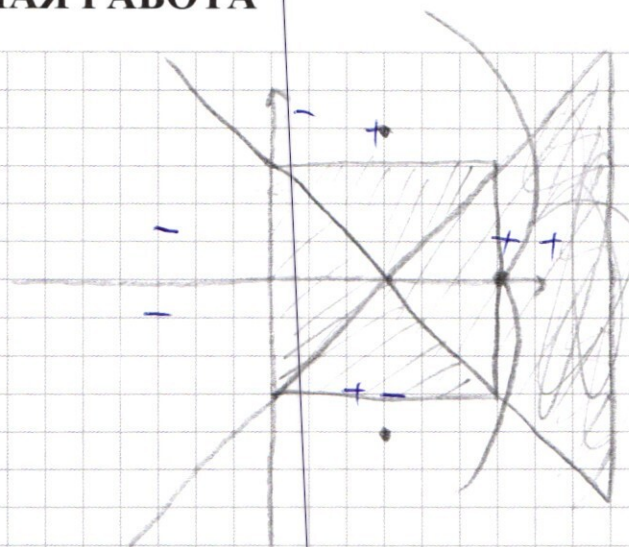
$$x \geq 0$$

$$+- \quad x-3-y-x+y-3 \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

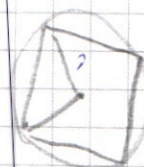
$$y \geq -3$$

$$\frac{(-7+\sqrt{73})}{8} - \frac{-7+\pi}{2} + 70$$



$$\angle AOB = 90^\circ$$

$$DF' \cdot DA = DB \cdot DE$$



$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$x(2x^2 + 1) -$$

$$2x^4 + x^2(1 - 3|x-1|) - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$x > 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$x < 1$$

$$f(x) 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$f'(x) = 8x^3 - 4x^2 + 8x - 2 = 0 \quad \text{нмн.}$$

$$x_0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3$$

$$2 - x_0$$

$$t = x - 1$$

$$t^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$t^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$t^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$2(2-x_0)^4 + (2-x_0)^2 - 2(2-x_0) - 3(2-x_0)^2|1-x_0| + 1 \geq 0$$

$$2^4 - 4 \cdot 2^3 x_0 + 6 \cdot 2^2 x_0^2 - 4x_0^3 + x_0^4 + 4 - 4x_0 + x_0^2 - 4 + 2x_0^4 -$$

$$3x_0^2 + 12x_0 - 12|1-x_0|$$