МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

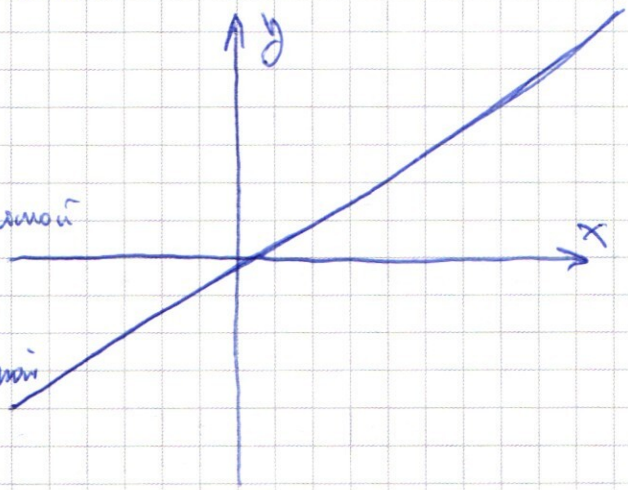
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ M9.2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1; \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \dfrac{a - 3(a+b)x}{12}; \text{ — уравн прямой} \\ y = \dfrac{1 - 4bx}{(a+b)b}; \text{ — уравн. прямой} \end{cases}$$

имеют беск. множеств точек только когда прямые наложены друг на друга. => если уравн прямой можно задать $y = kx + b$, то $b_1 = b_2$; $k_1 = k_2$.

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{12} - \left(\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{4}b\right)x, \\ y = \dfrac{1}{(a+b)b} - \dfrac{4}{a+b} \cdot x; \end{cases}$$

$b \neq 0$ и $a \neq 0$ одновременно $b \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{12} = \dfrac{1}{(a+b)b}, \\ -\left(\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{4}b\right) = -\dfrac{4}{a+b}; \end{cases}$$

решим систему относительно a и b, т.е найдем a и b.

$$\frac{1}{4}(a+b) = \frac{4}{a+b}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16, \; (1) \\ ab(a+b) = 12; \; (2) \end{cases}$$

$(a+b)^2 = 16.$

$a + b = \pm 4$

1) $a = -b + 4$

2) $a = -b - 4 = -(b+4)$

1) $(-b+4)\,b(\cancel{b}+4-\cancel{b})=12.$

$(-b+4)\,4b=12$

$(4-b)\,b=3.$

$\cancel{12-b^2-3=0.}$

$\cancel{b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3.}$

$4b-b^2-3=0$

$b^2-4b+3=0$

$b_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1.$

$b_1=3;\ b_2=1.$

$a_1=4-3=1.$

$a_2=4-1=3.$

2) $-(b+4)\,b(-4)=12.$

$(b+4)\,b=3.$

$b^2+4b-3=0$

$b_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+3}=-2\pm\sqrt{7}.$

$b_1=-2-\sqrt{7};\ b_2=-2+\sqrt{7}.$

$a_1=2+\sqrt{7}-4=-2+\sqrt{7}$

$a_2=2-\sqrt{7}-4=-2-\sqrt{7}.$

Ответ: $(1;3);\ (3;1);\ (-2+\sqrt{7};-2-\sqrt{7});\ (-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7})$

№ M9.3.

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+6x+9-x-3$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)^2-(x+3)$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+3-1)$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2)$

$(x+3)\left(\sqrt{x^3-x+10}-(x+2)\right)=0.$

1) $x=-3.$

2) $\sqrt{x^3-x+10}=x+2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N М9.3 (продолжение)

$x^3 - x + 10 = (x+2)^2$

$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4.$

$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2$

$8 - 4 - 10 + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + x - 3 \\ x^2 - 5x \qquad & \\ \underline{x^2 - 2x} \qquad & \\ -3x + 6 & \\ \underline{-3x + 6} & \\ 0. & \end{array}$$

$(x-2)(x^2+x-3) = 0.$

1) $x = 2$ 2) $x^2 + x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$

Ответ: $-3; 2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$

№ м9.4.

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$

разобьем на 2 случая $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$

$x - 1 \leq 0$. $x \leq 1$.

1) $\begin{cases} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0; \text{①} \\ x \geq 1; \text{②} \end{cases}$

① $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$.

при $x = 1$.

$2 - 3 + 4 - 2 + 1 = 2 > 0$

~~при $x = 2$~~

~~$2x^4 + 4x^2 + 1 \geq 1$ так как $x \geq 1$, то~~

~~$-3x^3 - 2x = -(3x^3 + 2x) = -x(3x^2 + 2) \leq -5$.~~

~~$2x^4 + 4x^2 + 1 \geq 7$.~~

~~$2x^4 + 4x^2 + 1 \geq$~~

$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 + (x - 1) = 0$.

$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x^2 - 3x + 2 + (x - 1) = 0$.

$2x^2(x^2 + 1) - 3x(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) + (x - 1) = 0$.

$\underbrace{(x^2 + 1)}_{\vee 0}\underbrace{(2x^2 - 3x + 2)}_{\vee 0} + \underbrace{(x - 1)}_{\vee\!/\, 0} = 0$.

~~$2x^2 - 3x + 2 = x^2 + (x^2 - 2x + 1) - x - 1 =$~~

~~$= \underbrace{(x - 1)^2}_{\vee\!/\, 0} + x^2 - x - 1 - x + x + 2 - 2 =$~~

~~$(x - 1)^2 + (x - 1)^2 + x - 2$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ М9.4 (продолжение).

$2x^2+2$ и $3x$ сравним при $x \geq 1$.

1) $2+2>3$ $4>3$

2) $8+2>6$ $10>6$. $\Rightarrow$ $x \in [1; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x \leq 1, & (1) \\ 2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1 \geq 0; & (2) \end{cases}$

(2) $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \geq 0$.

рассмотрим крайний случай, когда (2) $=0$.

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=0$.

$x=-1$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 & x+1 \\ \underline{2x^4+2x^3} & 2x^3+x^2-3x+1 \\ \quad x^3-2x^2 & \\ \quad \underline{x^3+x^2} & \\ \qquad -3x^2-2x & \\ \qquad \underline{-3x^2-3x} & \\ \qquad\qquad x+1 & \\ \qquad\qquad \underline{x+1} & \\ \qquad\qquad 0. & \end{array}$$

$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)=0$.

$2x^3+x^2+1>3x$. ~~$x \in [-1;1]$~~.

при $x \geq 0$. при $x<0$.

Ответ: ~~$[-1;+\infty)$~~. $\{-1\} \cup \{0\} \cup [1;+\infty)$.

~~№~~.

№М9.5

$1400 = 2\cdot 7\cdot 100 = 2\cdot 7\cdot 10\cdot 10 = 2\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5$.

.... кол-во 8-значных чисел равно $9\cdot 10^7$.

рассмотрим случаи когда произведение равно 1400.

$2\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5\cdot 1\cdot 1$.

2, 2, 2;

5, 5;

7;

1, 1. Рассмотрим сколько вариантов расположений чисел 2; 7; 5; 1.

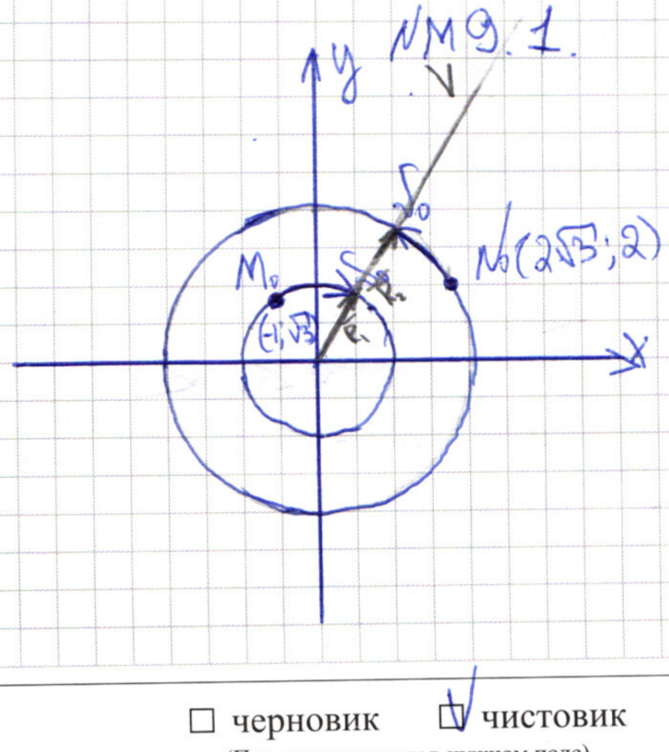
$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3!\cdot \cancel{5!}}^{6\cdot 7\cdot 8} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!\cdot 3!}^{4\cdot 5} \cdot \frac{3!}{1\cdot \cancel{2!}}^{3} \cdot \cancel{1} =$$

$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot \cancel{3}}{\cancel{2\cdot 3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 5 = 42\cdot 40 = 1680$$

$$\begin{array}{r} \times\, 42 \\ 40 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ответ: 1680.

№М9.1.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ М9.1 (продолжение)

минимальное расстояние между M(муравей) и N(жук) будет тогда когда $\overline{R_1}(M)$ и $\overline{R_2}(N)$ будут направлены в одну сторону и лежать на одной прямой.

Найдем R_1 и R_2; $R_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$R_2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4.$$

$$R_2 - R_1 = 4 - 2 = 2.$$

Прямая l – это прямая, которая проходит через R_1 и R_2, так, что R_1 и R_2 на 1 прямой.

$$y = kx + b$$

Длина окр-ти $R_1 = 2\pi R_1$, а длина окр-ти $R_2 = 2\pi R_2$

$\Rightarrow$ отношение длин окружностей $\frac{2\pi 2}{2\pi \cdot 4} = \frac{1}{2}$.

№19,7.

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \le 6; & (1) \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4) = 25; & (2) \end{cases}$$

~~(2)~~ ~~уравн~~ (2) уравнение окружностей.

разберемся с (1).

$$\begin{cases} x-3-y \ge 0; & y \le x-3 \\ x-3+y \ge 0; & y \ge 3-x. \\ x-3-\cancel{y}+x-3+\cancel{y} \le 6; & 2x-6 \le 6 \quad \underline{x \le 6.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3-y \ge 0, \\ x-3+y \le 0, \\ \cancel{x}-\cancel{3}-y-\cancel{x}+\cancel{3}-y \le 6; & \underline{y \ge -3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3-y \le 0; \\ x-3+y \ge 0; \\ -\cancel{x}+\cancel{3}+y+\cancel{x}-\cancel{3}+y \le 6; & \cancel{2}y \le 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3-y \le 0; \\ x-3+y \le 0 \\ -x+\cancel{3}+\cancel{y}-x+\cancel{3}-\cancel{y} \le \cancel{6} & x \ge 0. \end{cases}$$

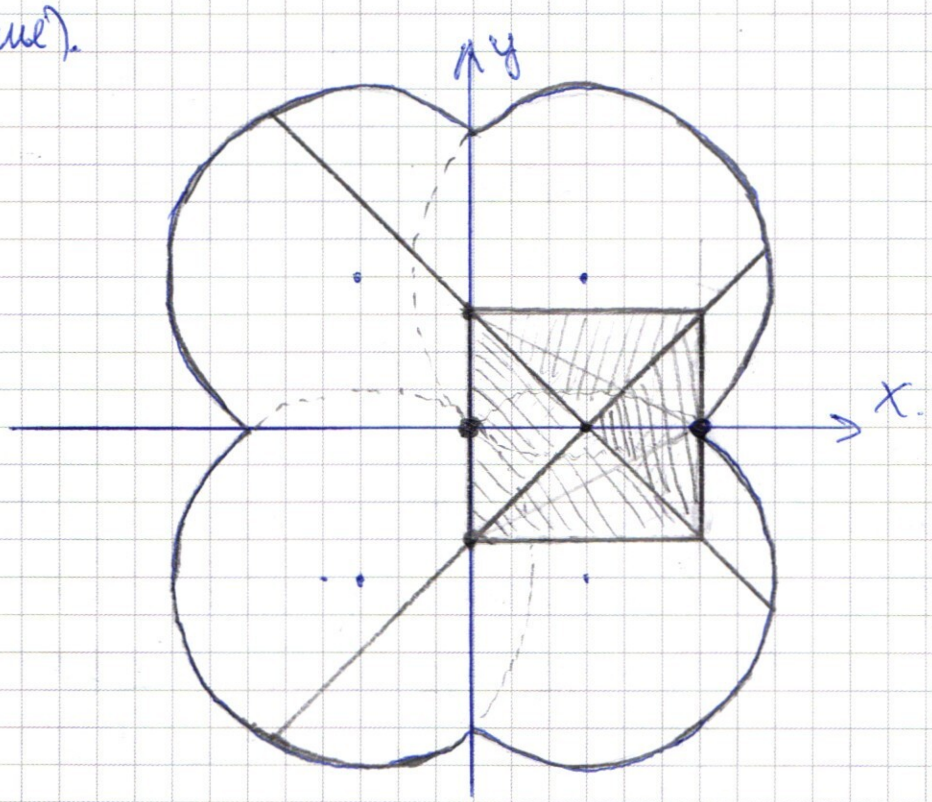
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ M9.7.

(продолжение).



Найдем точку пересечения окружности с осью x.

~~УГН~~ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ ⇒ $y = 0$; таких, что $x \geq 0$

$(x-3)^2 + 16 = 25$.

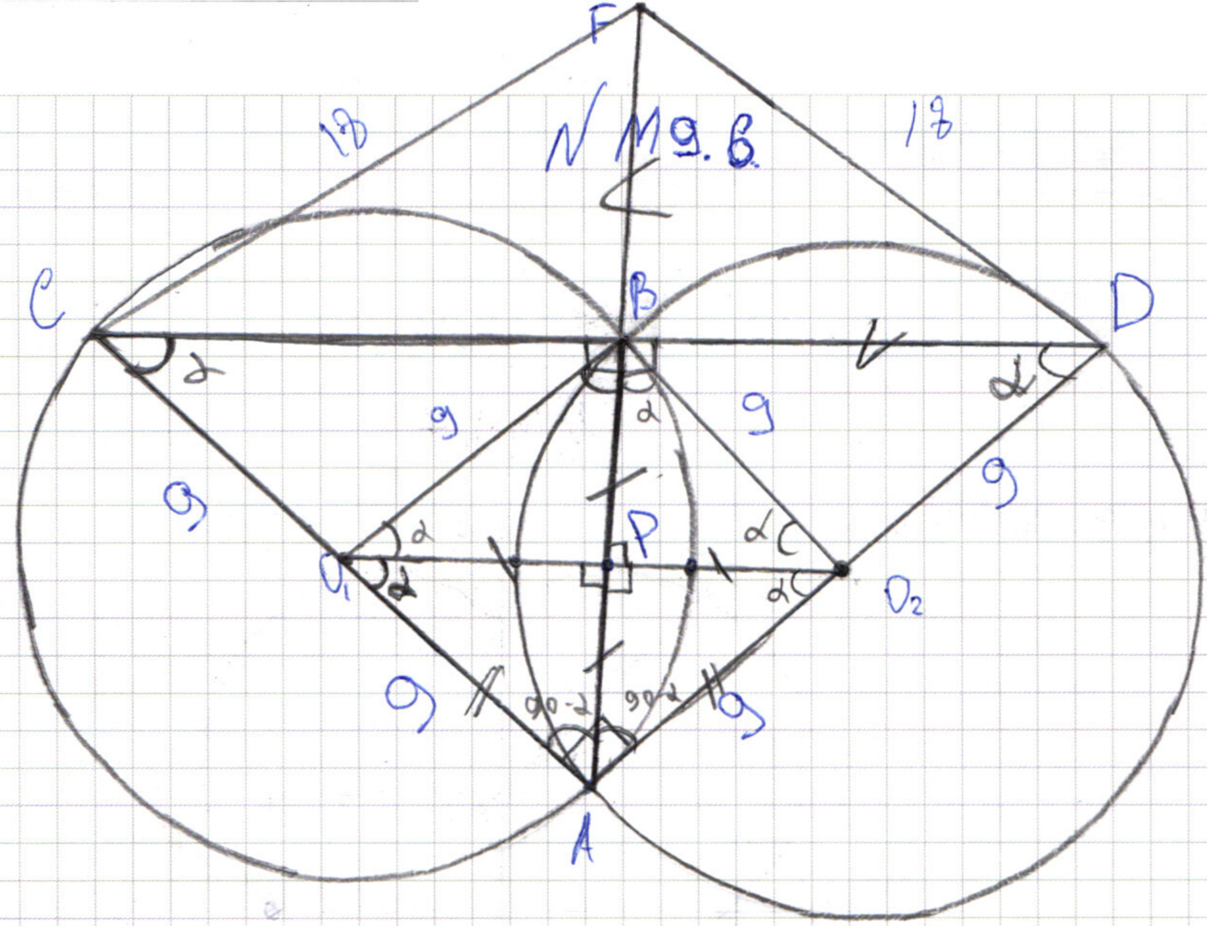
$(x-3)^2 = 9$

$x - 3 = \pm 3 \Rightarrow x = 6;$

$x = 0;$

Ответ: $(0;0)$; $(6;0)$.

№ 19.6



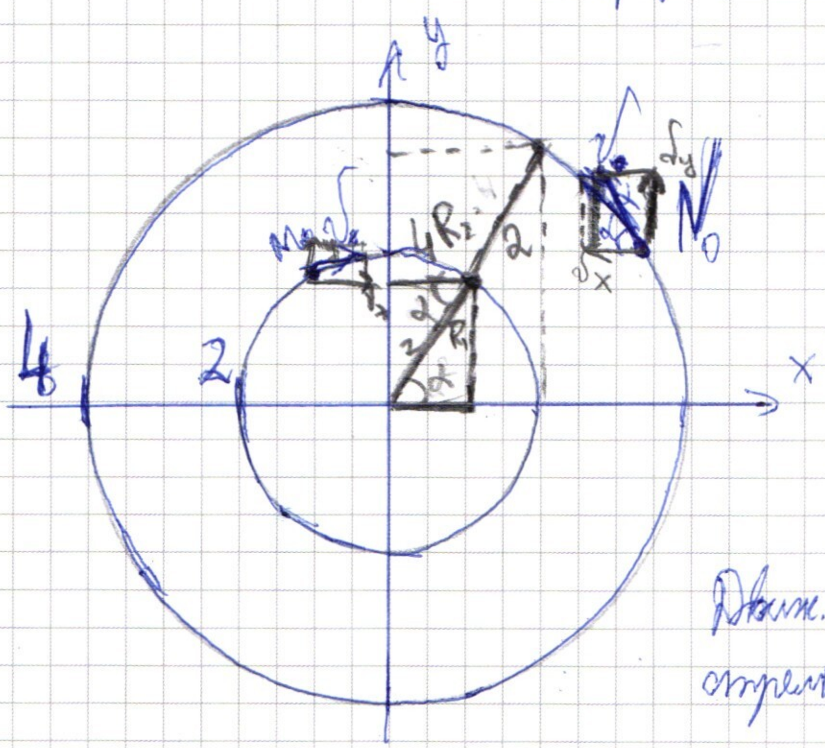
Решение: чтобы $\angle CAD = 90°$, то $O_1O_2 \parallel CD$;
т.к $O_2A = O_1A = 9$ (как r); ~~$O_1P = O_2P$~~ тогда
если $\angle AO_2O_1 = \alpha = \angle AO_1O_2 \Rightarrow \angle PAO_2 = 90 - \alpha$.
т.к ΔO_1O_2A – р/б, то $\angle O_1AP = \angle APO_2 = 90 - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow 90 - \cancel{\alpha} + \underset{}{\overset{-2\alpha}{90}} - \cancel{\alpha} = 180 - 2\alpha$. $2(90-\alpha) \Rightarrow \alpha = 45°$.

O_1BO_2A – квадрат. $ACFD$ – квадрат со стороной 18; ΔABD – п/у; т.к $FB = BD \Rightarrow \cos\alpha = \frac{FB}{AD} \Rightarrow$
$\Rightarrow FB = \cos\alpha \cdot AD = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \overset{9}{\cancel{18}} = 9\sqrt{2}$.

Ответ: $9\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N М9.1 (продолжение).



Движ. по часовой стрелке +, а против −.

$x(M) = \vartheta_x t + x_0 \quad x(N) = -\vartheta_x t + x_0.$

$y(M)\ \vartheta_y \cdot t + y_0 \quad y(N) = -\vartheta_y t + y_0.$

$\vartheta_x = \vartheta\cos\alpha.$

$\vartheta_y = \vartheta\sin\alpha.$

$\vartheta\cos\alpha t - 1 + \vartheta\cos\alpha \cdot t + 2\sqrt{3} = 2\cdot\cos\alpha.$

$2\vartheta\cos\alpha t - 1 - 2\sqrt{3} = 2\cos\alpha.$

$\vartheta\sin\alpha t + \sqrt{3} + \vartheta\sin\alpha t - 2 = 2\sin\alpha$

№ M9.1 (продолжение).

$$+\begin{cases} 2\sqrt{\cos\alpha \cdot t} - 1 - 2\sqrt{3} = 2\cos\alpha, \\ 2\sqrt{\sin\alpha \cdot t} + \sqrt{3} - 2 = 2\sin\alpha; \end{cases}$$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$2\sqrt{\cos\alpha \cdot t} - 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{\sin\alpha\, t} = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha.$

$2\sqrt{t}(\cos\alpha + \sin\alpha) - 3 - \sqrt{3} = 2(\cos\alpha + \sin\alpha).$

$2(\cos\alpha + \sin\alpha)(\sqrt{t} - 1) = 3 + \sqrt{3}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)