МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

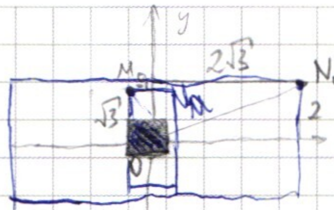
7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



$12(x+y)=1$

$12(x+y)=1$

$x+y=\frac{1}{12}$

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=4$ $M(0;2)$

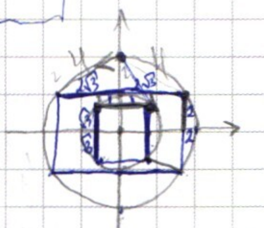
M N

$M_0(-1;\sqrt{3})$ $N_0(2\sqrt{3};2)$

$12(x+y)=3$

$4(x+y)=1$

$OM=\sqrt{1+3}=2$ $ON=\sqrt{4+12}=4$



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $\sim$ $x_1^2+y_1^2=4$

$v_x=v_M$

$Ox=2OM$

$x^2+y^2=4$ $x^2+y^2=16$ $x_2^2+y_2^2=16$

$(y_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=4$

$\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}=2$

2) $\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$

$a=1$ $a=3$
$b=3$, $b=1$

$a+b=\frac{a-12y}{3x}=\frac{1-4bx}{by}$

$\frac{3x(1-4bx)}{by}+12y=4$

$4bx+\frac{by(a-12y)}{3x}=1$

$3ax+3bx+12y-a=0$

$4bx+aby+b^2y-1=0$

$aby-12by^2=3x-12bx^2$

$aby-3x=12b(y^2-x^2)$

$3ax+12y-a=bx+aby+b^2y-1$

$(x_2-x_1)^2+(\sqrt{16-x_2^2}-\sqrt{4-x_1^2})^2=4$

$2{,}25 \times 2{,}25$: 1125, 450, 450, $5{,}0625$

3) $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

	1	-1	-5	6
2	1	1	-3	0

$x_2=2$

$\frac{-3{,}25}{2}=-1{,}625$

$x_1=-3$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$\frac{1{,}25}{2}=0{,}625$

$\sqrt{x^3-x+10}=x+2$

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$D=1+12=13$

$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

	2	-3	4	-2	1
1	2	-1	3	1	2
-1	2	-5	9	-11	12
1/2	2	-2	3	-1/2	
-1/2	2	-4	6	-5	

4) $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$\left[\begin{array}{ll} 2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0, & x\geq 1 \quad (1) \\ 2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0, & x<1 \quad (2) \end{array}\right.$

	2	3	-2	-2	1
1	2	5	3	1	2
-1	2	1	-3	1	0
1/2	2	4	0	-2	0
-1/2	2	2	-3	-1/2	

$x_1=-1$

$x_2=+1/2$

1) $2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2{,}3 \times 2{,}3$: 69, 46, $5{,}29$

$[1;+\infty)$

	2	1	-3	1
1/2	2	2	-2	0

2) $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

$x^2+x-1=0$

$D=1+4=5$

$(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x-2)\geq 0$

$2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x^2+x-1)\geq 0$

$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$+$ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $-$ -1 $+$ $\frac{1}{2}$ $-$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $+$ 1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

5) $\overline{abcdefgh} : a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h = 1400$

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	1
	1

2, 4, 8, 5, 7

Всегда есть две 5, одна 7 и не менее двух 1

если есть 4, то есть 2 и три 1

если есть 8, то есть четыре 1

три 2 => две 1

$\times \frac{16}{9}$ 144

2 2 2 5 5 7 1 1

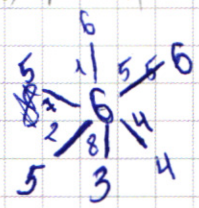
1) 2 5 7 1

a) 2 2 5 5 7 1 1
5 7 7 1
7 1 1
1

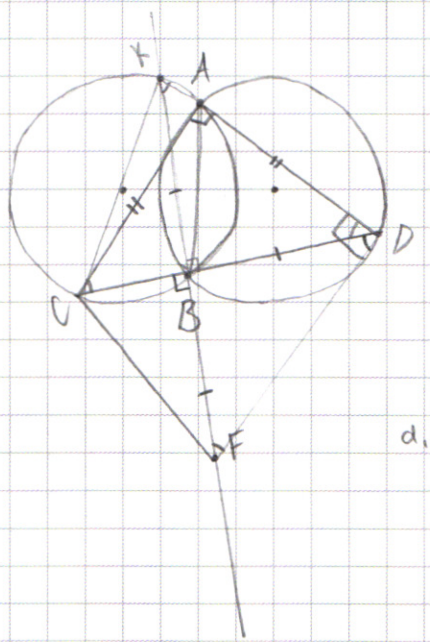
4 4?

1) 4 3 3 2 2 1
144

2) 4 4



6)



CF = ? R = 9

18

7) $\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \le 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$

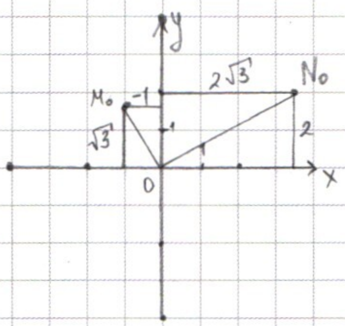
a. $x - 3 > y$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1



$M_0(-1;\sqrt{3})$, $N_0(2\sqrt{3};2)$, $O(0;0)$

$OM_0=\sqrt{1+3}=2$

$ON_0=\sqrt{4+12}=4$ } — по т. Пифагора

пусть $\omega_1(0;R_1)$ — окр. муравья, а $\omega_2(0;R_2)$ — окр. жука

тогда $R_2=2R_1$ $(R_1=OM_0, R_2=ON_0)$

кратчайшее расстояние между муравьём и жуком равно $R_2-R_1=4-2=2$

скорости муравья и жука равны, тогда муравей затрачивает на прохождение окружности в 2 раза меньше времени, чем жук

уравнение окр-ти: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$x_0=y_0=0$, тогда $x^2+y^2=R^2$

скорости постоянны, значит за равные отрезки времени насекомые проходят равные расстояния

путь муравья проходит через точки $(-2;0);(0;-2);(2;0);(0;2)$

путь жука проходит через точки $(4;0);(0;-4);(-4;0);(0;4)$

№ 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 4bx + (a+b)by = 1 & (2) \end{cases}$$

бесконечно много решений

найти: a, b

чтобы было бесконечно много решений, надо, чтобы уравнения системы были тождественно равны

рассмотрим (1): $3(a+b) = 12 \Rightarrow a+b = \cancel{12}\ 4$

1) $a = 1, b = 3$

(1): $12(x+y) = 1$
(2): $12(x+y) = 1$

$\begin{cases} 12(x+y) = 1 \\ 12(x+y) = 1 \end{cases}$ — система имеет бесконечно много решений

2) $a = 3, b = 1$

(1): $12(x+y) = 3 \Leftrightarrow 4(x+y) = 1$
(2): $4(x+y) = 1$

$\begin{cases} 4(x+y) = 1 \\ 4(x+y) = 1 \end{cases}$ — система имеет бесконечно много решений

3) $a = 2, b = 2$

(1): $12(x+y) = 2 \Leftrightarrow 6(x+y) = 1$
(2): $8(x+y) = 1$

$\begin{cases} 6(x+y) = 1 \\ 8(x+y) = 1 \end{cases}$ — система не имеет решений

4) $a = 0, b = 4$

(1): $12(x+y) = 0$
(2): $16(x+y) = 1$

$\begin{cases} 12(x+y) = 0 \\ 16(x+y) = 1 \end{cases}$ — система не имеет решений

5) $a = 4, b = 0$

(1): $12(x+y) = 4$
(2): $0 = 1$ — ложно

нет решений

Таким образом нам подходят 2 варианта: $a = 1, b = 3$ и $a = 3, b = 1$

Ответ: $(a = 1; b = 3)$; $(a = 3; b = 1)$.

№ 3

$(x+3)\sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$

$(x+3)\sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$

$x_1 = -3$

разделим обе части уравнения на $(x+3) \neq 0$: $\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возведём обе части уравнения в квадрат: $x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

Воспользуемся схемой Горнера:

	1	-1	-5	6
2	1	1	-3	0

$x_2=2$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$x^2+x-3=0$
$D=1+12=13$
$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Ответ: -3; 2; $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

№ 4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0 \\ x\geq 1\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1\geq 0 \\ x<1\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases}2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0 \\ x\geq 1\end{cases}$

воспользуемся схемой Горнера:

	2	-3	4	-2	1
1	2	-1	3	1	2
-1	2	-5	9	-11	12
1/2	2	-2	3	-1/2	
-1/2	2	-4	6	-5	

Нулей нет

график — парабола

старший коэффициент больше 0, значит, график полностью располагается над осью абсцисс

$x\in[1;+\infty)$

(2): $\begin{cases} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}$

Воспользуемся схемой Горнера:

	2	3	-2	-2	1
1	2	5	3	1	2
-1	2	1	-3	1	0
1/2	2	4	0	-2	0
-1/2	2	2	-3	-1/2	

$x_1 = -1$
$x_2 = +1/2$

$(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x-2) \geq 0$

$2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x^2+x-1) \geq 0$

$x^2+x-1=0$
$D = 1+4 = 5$
$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

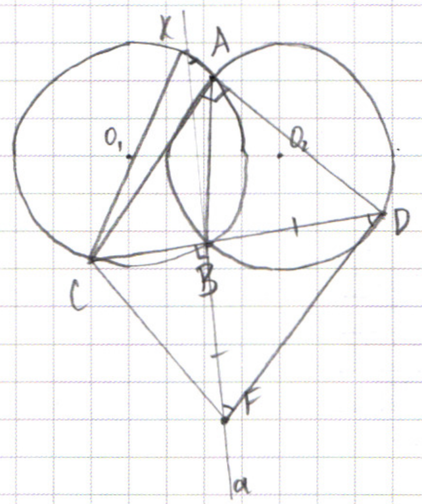
Воспользуемся методом интервалов:

$+ \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad - \quad -1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad - \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad + \quad 1$

$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1)$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

№ 6



Дано: $\omega_1(O_1; R)$; $\omega_2(O_2; R)$; $R=9$;
$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$; $C \in \omega_1$; $D \in \omega_2$; $B \in CD$;
$a \perp CD$; $B \in a$; $F \in a$; $BF = BD$.

Найти: CF.

Решение: 1) $FB \perp CD \Rightarrow \triangle FBD$ – п/у (опр.)

2) $\triangle FBD$ – п/у, $FB = BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$ (св-ва п/у р/б $\triangle$)

3) $\left.\begin{array}{l} AB \text{ – общая хорда } \omega_1 \text{ и } \omega_2 \\ \angle ACD \text{ и } \angle ADC \text{ опир. на } AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC$

4) рассм. $\triangle ACD$: $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = \angle D \Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ$ (сум. уг. $\triangle$), $\triangle ACD$ – п/б (по приз.) $\Rightarrow AC = AD$

5)] $a \cap \omega_1 = K$ ($K \in [FB)$
$\angle BKA$ опир. на $AB \Rightarrow \angle BKA = 45^\circ$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) рассм. $\triangle KDF$: $\angle K = \angle F = 45^\circ$ => $\triangle KDF$ — р/б (по приз.)

7) $\triangle KDF$ — р/б, $DB \perp KF$ => DB — выс. р/б $\triangle$ (опр.) => DB — мед. $\triangle KDF$ (св-во р/б $\triangle$)

8) DB — мед. $\triangle KDF$ => $KB = BF$ (опр. мед.)

9) $\angle CBK = 90^\circ$ => CK — диаметр ω_1 (св-во впис. уг.) => $CK = 2R = 18$

10) $\left.\begin{matrix} CB \perp KF \\ KB = BF \end{matrix}\right\}$ => CB — выс. и мед. $\triangle KCF$ (опр.) => $\triangle KCF$ — р/б (по приз.)

11) $\triangle KCF$ — р/б => $CF = CK = 18$

Ответ: 18.

№ 5

$\overline{abcdefgh} : a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h = 1400$

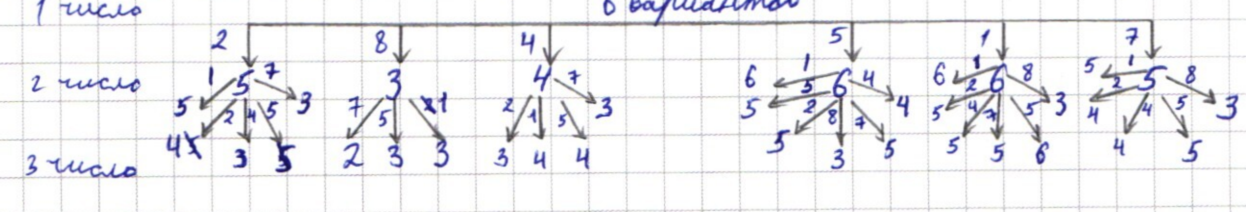
$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

то есть, в записи числа всегда есть две 5, одна 7 и не менее двух 1

если есть 4, то есть одна 2 и три 1

если есть 8, то есть четыре 1

если есть три 2, то есть две 1



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА