

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)) = 0$$

$$x+3=0 \text{ или } \sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x=-3 \quad \begin{cases} x^3-x+10 = x^2+4x+4 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x+2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^3-5x+6-x^2=0 & f(x) = x^3-5x+6-x^2=0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$x \geq -2$$

$$\text{вычисляем } f(2) = 8-10+6-4 = 0 \Rightarrow 2 - \text{корень уравнения}$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$x \geq -2$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$x \geq -2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x \geq -2$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D = 1+12 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \geq -2$$

$$-1+\sqrt{13} \geq -4$$

$$\sqrt{13} \geq -3 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ удовлетворяет условию}$$

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \geq -2$$

$$-1-\sqrt{13} \geq -4$$

$$-\sqrt{13} \geq -3$$

$$3 \geq \sqrt{13}$$

$$3 < \sqrt{13} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ не удовлетворяет условию}$$

Так же $-3 < -2 \Rightarrow -3$ не является корнем

$$\text{Ответ: } \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; 2$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x - a = -12y \\ \text{или } 4bx - 1 = -(a+b)by \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{(a+b)x}{4} + \frac{a}{12} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4x}{a+b} + \frac{1}{(a+b)b} = y \end{cases}; b \neq 0 \text{ так как если подставить } b=0 \text{ во второе уравнение получим } 0=1, \text{ что неверно}$$

Если мы хотим, чтобы бы система имела бесконечно много решений, то в нашей системе два линейных уравнения $\Rightarrow$ они должны быть одинаковы то есть коэффициенты перед x и свободные члены равны; пишем систему:

$$\begin{cases} -\frac{(a+b)}{4} = -\frac{4}{a+b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab \cdot 4 = 12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+b=-4 \\ ab \cdot 4 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4b + 3 = 0 & \quad \begin{cases} a = 4 - b \\ -b^2 + 4b - 3 = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = -(b+4) \\ b^2 + 4b - 3 = 0 \end{cases} & \quad b^2 + 4b - 3 = 0 \\ \begin{bmatrix} b=3 \\ b=-1 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} b=3 \\ a=1 \\ b=-1 \\ a=3 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} b=-1 \\ a=-3 \\ b=-3 \\ a=-1 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} b=-1 \\ b=-3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ответ: пары $(a; b)$, при которых система имеет бесконечно много решений:

$$(1; 3); (3; 1); (-3; -1); (-1; -3)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5^2, x \geq 0; y \geq 0 \\ (x-3)^2 + (y+3)^2 = 5^2, x \geq 0; y < 0 \\ (x+3)^2 + (y-3)^2 = 5^2, x < 0; y \geq 0 \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 5^2, x < 0; y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

модуль первого уравнения системы

первое "уравнение" системы сводится к прямым $y = x-3$ и $y = -x+3$

изобразим раскрытие модуля на координатной плоскости $y \uparrow$

Здесь раскрытие модуля мы

будем узнавать, подставляя одну из точек каждой

одной из четырех областей в уравнение. Знаки раскрытия

модуля $|x-3-y|$ и

модуля $|x-3+y|$ будем обозначать знаками $=$ или $+$; $-$; $+$; $+$

$$"-": -x+3+y - x+3-y = 6$$

$$x = 0$$

$$"+": -x+3+y + x-3+y = 6$$

$$y = 3$$

$$"+": x-3-y + x-3+y = 6$$

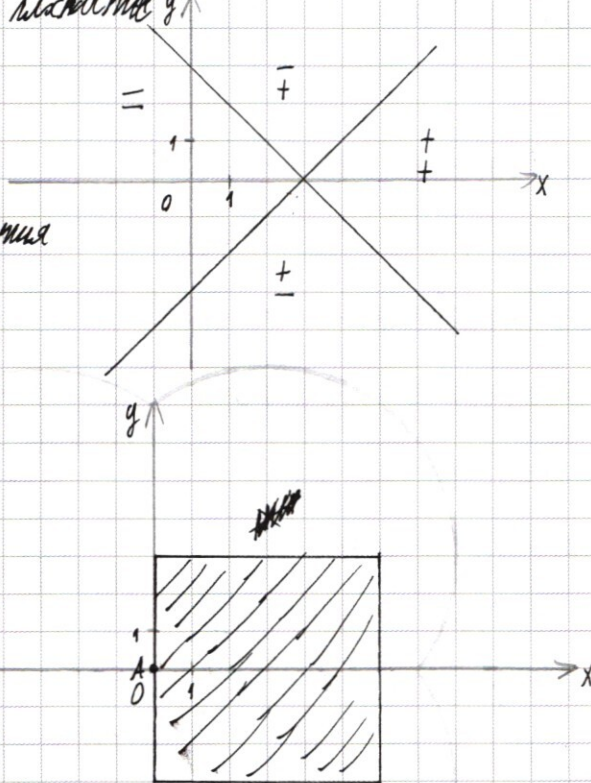
$$x = 6$$

$$"-": x-3-y - x+3-y = 6$$

$$y = -3$$

Изобразим множество всех точек уравнений
нашей системы на координатной плоскости;

при x и y равные 0 уравнение $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$ выражается в точке с координатами $(0; 0)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

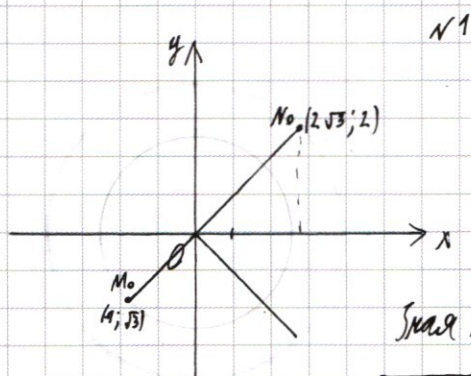
$$x > 1: x^2(2x^2 + 1 - 3x + 3) - (2x - 1) \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 4) - (2x - 1) \geq 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0 \Rightarrow x^2(2x^2 - 3x + 4)$ никогда не обращается в 0, учитывая, что при $x > 1$ $x^2(2x^2 - 3x + 4)$ возрастает быстрее, чем $2x - 1$, то их разность всегда будет неотрицательна следовательно при всех $x > 1$ неравенство верно.

Приведенная параметризация, которые мы нашли ранее, охватывает $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1] \cup (1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$



Во 2-й координатной плоскости не будем отмечать единичные отрезки, в этой задаче нам это не придется.

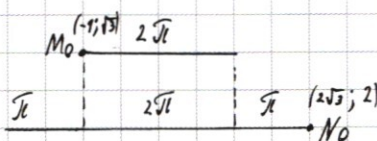
Зная координаты мы можем рассчитать радиусы окружностей;

окружность радиуса: $R_1 = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

окружность радиуса $R_2 = \sqrt{2^2 + 3 \cdot 4} = 4$

ещё в начальный момент через точки можно провести прямую, проходящую через начало координат так как тангенсы углов наклона радиусов совпадают

Если развернуть окружности пополюсности, то мы увидим:



Между ними было расстояние $1 + 2\sqrt{3}$ (если смотреть на схему), а будет $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ когда они пройдут $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$, то это будет самая близкая точка между ними

Омлет: (4; 0); (-4; 0)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. (x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 \quad x^2+5x+6=0$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} - (x+3)(x+2) = 0$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)) = 0$$

$$x+3=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x=-3$$

$$\begin{cases} x^3-x+10 = x^2+4x+4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - x + 10 = 0$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$f(1) = 1 - 1 - 5 + 6 = 1 \quad f(2) = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x^2+x-3)(x-2) = 0$$

$$x \geq -2$$

$$\begin{cases} x^2+x-3=0 \\ x=2 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$D = 1 + 12 = \sqrt{13}$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$5. 1900 = 19 \cdot 100 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{2!3!2!} = \frac{40320}{2 \cdot 6 \cdot 2} = 3360$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 \quad | x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$9. 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^2 + 1$$

$$2x^4 - 3x^2 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 + 1 - 2x - 3x^2 | x-1 | \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2. \begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x - a = -12y \\ 4bx - 1 = -(a+b)by \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3(a+b)}{-12} = \frac{y}{(a+b)b} \\ \frac{a}{12} = -\frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{y} = \frac{y}{a+b}$$

$$\begin{cases} \frac{3(a+b)}{4} = -\frac{y}{a+b} \\ \frac{a+b}{4} = \frac{y}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3(a+b)}{-12}x + \frac{a}{12} = y \\ -\frac{4b}{(a+b)b}x + \frac{1}{(a+b)b} = y \end{cases}$$

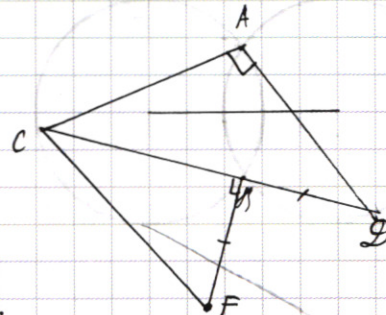
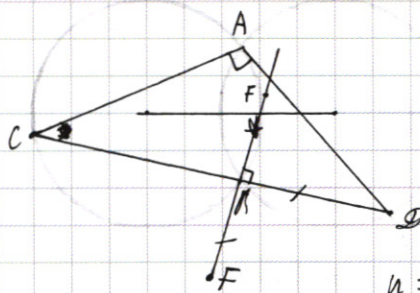
$$\begin{cases} a+b=4 \\ a=3 \\ a=4-b \\ -b^2+4b-3=0 \\ a=3; b=1 \\ a=1; b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4b+3=0 \\ b=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{4b} \Rightarrow ab=3 \end{cases}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{4b} \Rightarrow -ab=3$$

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ -ab=3 \\ a=-b-4 \\ b^2+4b-3=0 \\ b=-3; a=-1 \\ b=-1; a=-3 \end{cases}$$



$$y = x - 3$$

$$y = -x + 3$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ |x-3|^2 + |y-3|^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3|^2 + |y-3|^2 = 5^2; x \geq 0 \\ |x+3|^2 + |y-3|^2 = 5^2; x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3|^2 + |y-3|^2 = 5^2; x \geq 0, y \geq 0 \\ |x-3|^2 + |y+3|^2 = 5^2; x \geq 0, y < 0 \\ |x+3|^2 + |y-3|^2 = 5^2; x < 0, y \geq 0 \\ |x+3|^2 + |y+3|^2 = 5^2; x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$-x+3+y-x+3-y-6=0$$

$$-2x=0$$

$$x=0$$

$$-x+3+y+x-3+y-6=0$$

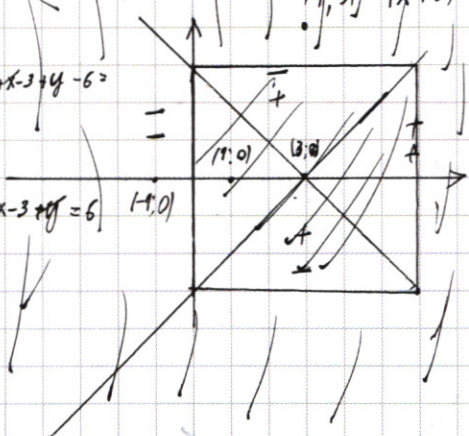
$$2y=6$$

$$y=3$$

$$x-3-y+x-3+y=6$$

$$2x=12$$

$$x=6$$



$$14-3-3+14-3+3 \leq 6$$

$$2+y \leq 6$$

$$y \leq 4$$

$$|x-3| + |y-3| \leq 6$$

$$|-1-3| + |-1-3| \leq 6$$

$$4 \cdot |2x^2 + x^2 - 3x^2| - |2x+1| \geq 0$$

$$x^2(2x^2+1-3|x-1|) - (2x+1) \geq 0$$

$$x^2(2x^2+1-3x+3) - (2x+1) \geq 0$$

$$2x^2-3x+4=0$$

$$D=9-2 \cdot 4 \cdot 4$$

$$x^2(2+1-3+3) - 2+1 \geq 0$$

$$x^2(2x^2+1-3+3x) - (2x+1) \geq 0$$

$$x^2(2x^2+3x-2) - (2x+1) \geq 0$$

$$2x^2+3x-2=0$$

$$D=9+16=25$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{2} = -2$$

$$2x^2 \left(|x-\frac{1}{2}| \right) (x+2) - (2x+1) \geq 0$$

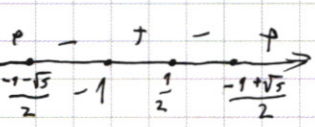
$$x^2(2x-1)(x+2) - (2x+1) \geq 0$$

$$(2x-1)(x^2(x+2)-1) \geq 0$$

$$(2x-1)(x^3+2x^2-1) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+1)(x^2+x-1) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+1)(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \geq 0$$



$$x^2+x-1=0$$

$$D=1+4=5$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x > 1$$

$$\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}$$

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2+0x-1 : x^2+x-1 \\ \underline{-(x^3+1x^2)} \\ -x^2+0x \\ \underline{-(x^2+x)} \\ -x-1 \\ \underline{-(-x-1)} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{5} = 2,23$$

$$\frac{1,23}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$(-2; 0)$$

$$(4; 2)$$

$$(2; 4)$$

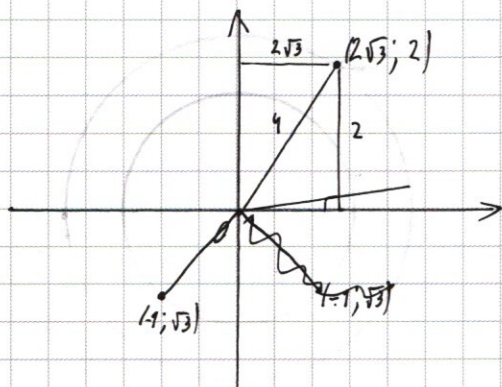
$$(5; 0)$$

$$2+2 \quad 16+6+1=$$

$$=22+1=23$$

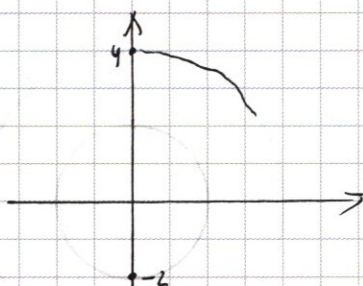
$$\begin{array}{r} 156 \\ 30 \\ \hline 1690 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{2^2 + 4 \cdot 3} = 4$$

$$\sqrt{1^2 + 3} = 2$$



$$\frac{1}{5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$5 = 4 \cdot 2$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2\pi R_1} + \frac{1}{2\pi R_2}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{20}{1\pi} - \frac{20}{6\pi}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{20}{6\pi} - \frac{20}{8\pi}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{20}{8\pi}$$

$$5\pi = 8\pi$$

$$5 = \frac{8\pi}{2\pi}$$

2001

2001

2001

$$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

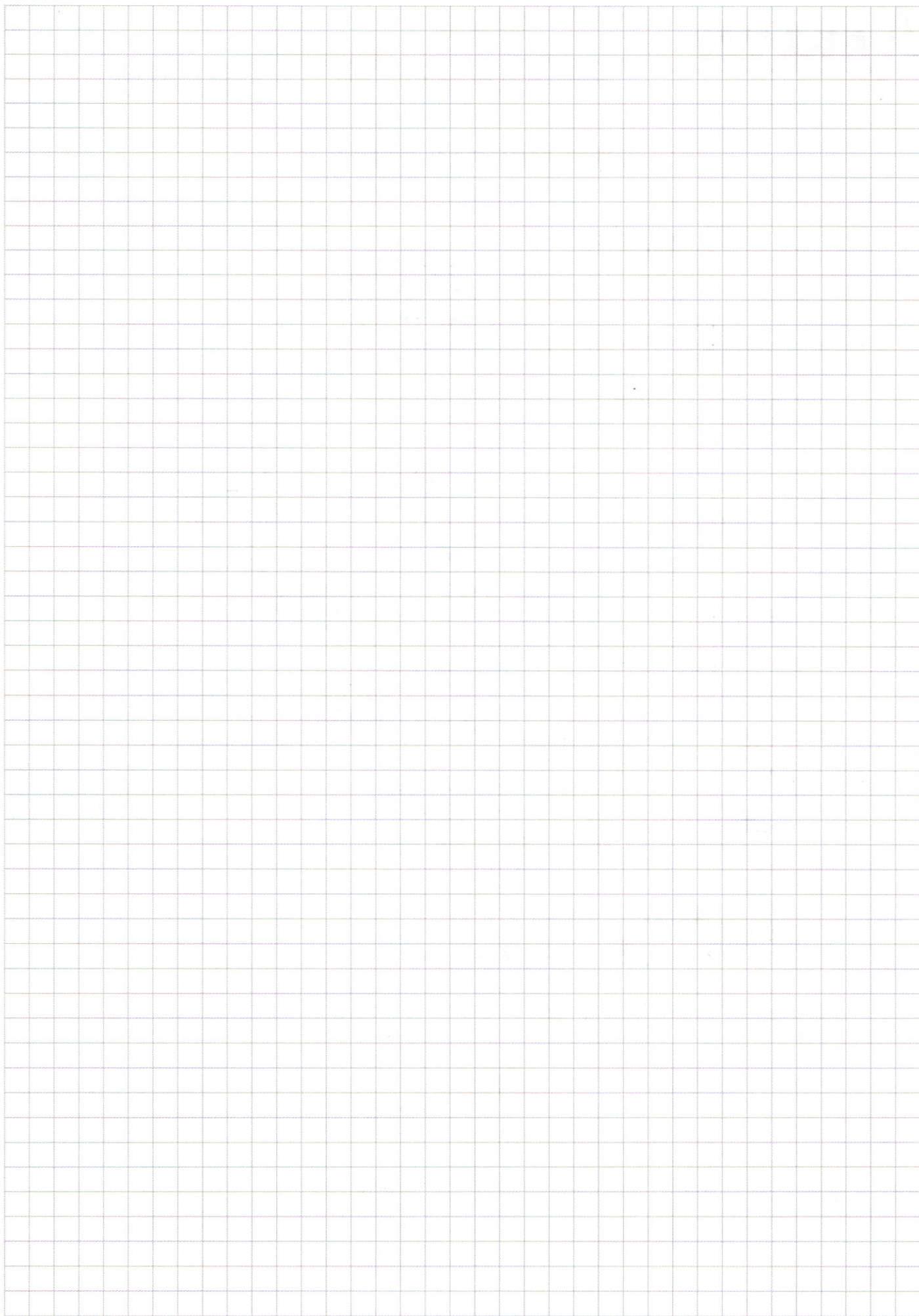
$$\frac{3\pi}{2\pi} - \text{тождество}$$

$$\frac{3\pi}{2\pi} \cdot 2$$

$$\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$$

-1





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)