

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✦ 1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- ✦ 3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

- ✦ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

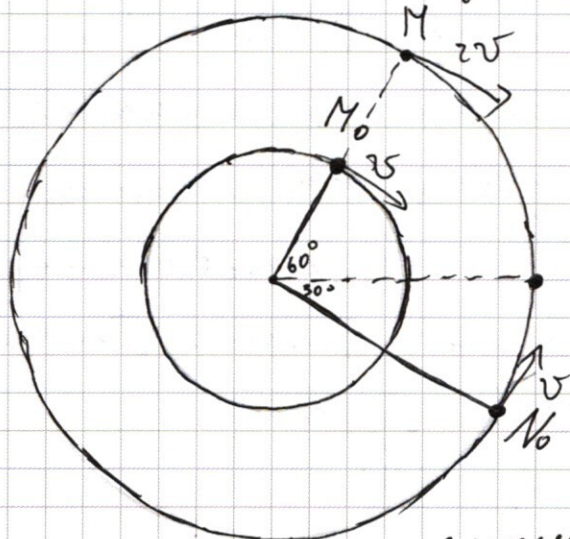
- ✦ 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- ✦ 7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Найдем радиус окружностей

по которым движется птица

$$\text{у синицы: } \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{у скворца: } \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

Тогда длина окр. у синицы -

$4\pi\sqrt{3}$, что в 2 раза меньше

чем у скворца - $8\pi\sqrt{3}$ Значит

синица будет пролетать 2 своих

круга, пока скворец пролетит 1 свой (т.к. их $\frac{1}{2}$ равно)

$2 \cdot 4\pi\sqrt{3} = 8\pi\sqrt{3}$. Тогда переформулируем задачу так:

синица и скворец летают по окр. скворца со скоростью

ли $2v$ и v соотв. причем синица по часовой а скворец

против. Тогда синица будет пролетать 2 круга пока скворец

1, что изложено тем же. Углом между птицами

(с MON_0) = 90° т.к. $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 60^\circ$

$$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 0,5 - \sin 30^\circ \quad 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ. \text{ Раз } v \text{ синицы в 2 раза}$$

больше v скворца, то до каждой встречи синица бу-

дет пролетать угол в 2 раза больше. Т.к. изложено

углом между птицами 90° , то синица пролетит 60° ,

т.е. они встретятся в точке $(4\sqrt{3}; 0)$ т.к.

$R = 4\sqrt{3}$, а угол от OX будет 0° . Теперь угол между

нии 360° , значит скорость пролетит 120° до II встречи, значит место их встречи будет в точке $(4\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ; 4\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ)$ т.е. $(-2\sqrt{3}; 6)$, после этой встречи вновь между ними угол будет 360° , а скорость пролетит ещё 120° т.е. угол будет 240° т.е. место встречи будет в точке $(4\sqrt{3} \cdot \cos 240^\circ; 4\sqrt{3} \cdot \sin 240^\circ)$ т.е. $(-2\sqrt{3}; -6)$. после этого он вновь пролетит 120° и вернется в первую точку встречи. А скорость пролетит $240^\circ + 120^\circ + 240^\circ = 720^\circ$ т.е. вернется в точку I встречи и всё начнет повториться. II точка $\Rightarrow$ III точка $\Rightarrow$ I точка $\Rightarrow$... т.е. других точек не будет.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$.

N3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \quad \text{м.к. : } (x+5) \text{ т.к. } -5 \text{ не явл. корнем}$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \quad \uparrow^2$$

$$x^3-16x+25 = (2x-4)^2$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3+9 = 4x^2$$

$$x^3-4x^2+9 = 0$$

$$x^3-3x^2-x^2+9 = 0$$

$$x^2(x-3) - (x-3)(x+3) = 0$$

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0$$

$$x = 3$$

$$x^2-x-3 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad x^2-x-3 = 0$$

$$D = 1+12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } 3; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

7	0	0	0	2
3	5	0	0	2
1	7	5	0	2
8	7	5	5	
1	7	5	5	
3	5	5		
7	7			
1				

В 8-значном числе обязательно должна присутствовать цифра 5, 5, 5, 7 т.к. нет других цифр : 5 и : 7 тогда кол-во способов их расставить на месте в числе - $C_8^1 \cdot C_7^3$

В числе произведение оставшихся чисел

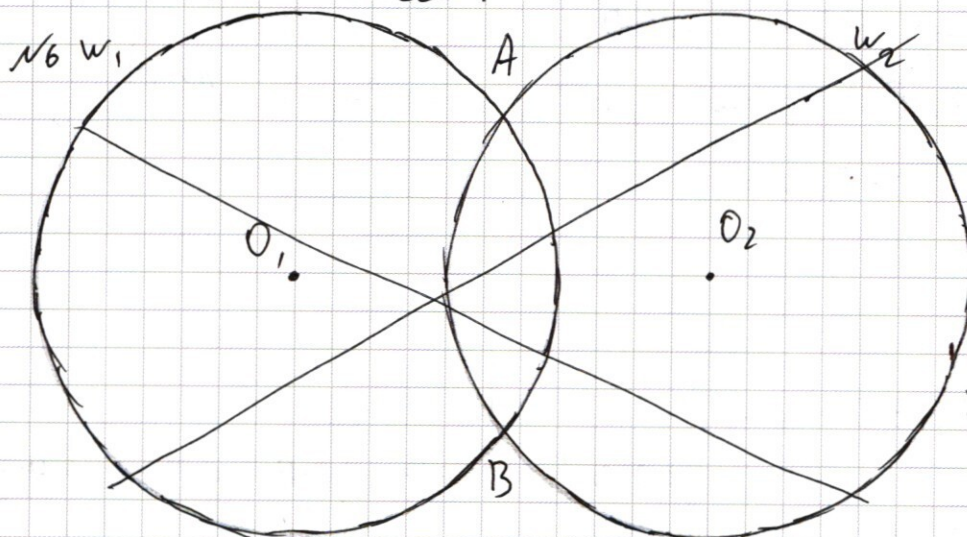
должно быть кратно 8, значит у нас могут быть следующие наборы $(2, 2, 2, 1)$, $(4, 2, 1, 1)$, $(8, 1, 1, 1)$

Тогда 8-значном с I набором $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3$

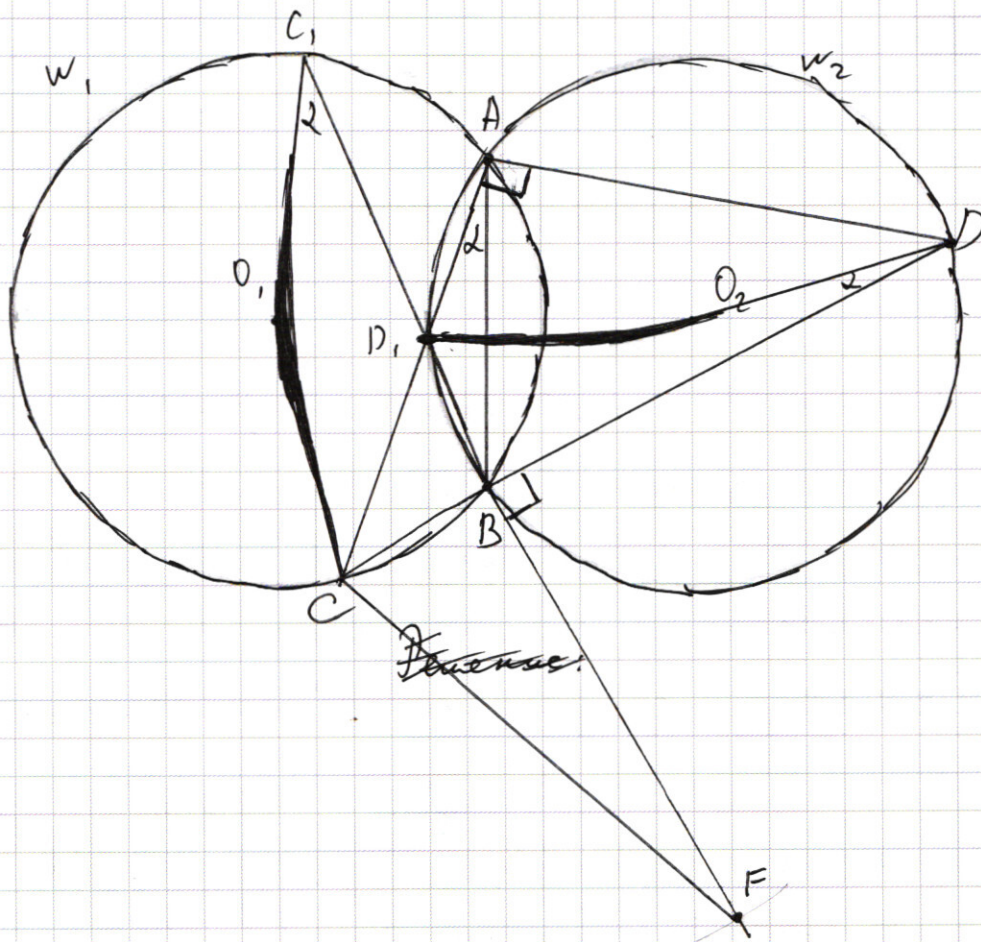
с II $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$, с III $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1$, тогда всего возможных чисел $C_8^1 \cdot C_7^3 (C_4^3 + C_4^1 \cdot C_3^1 + C_4^1)$, т.е

$$\frac{8!}{1!} \cdot \frac{7!}{3!} \left(\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{1!} \cdot \frac{3!}{1!} \cdot \frac{4!}{1!} \right) = 8 \cdot 7 \cdot 5 (4 + 12 + 4) = 5600$$

Ответ: 5600 чисел.



Дано: w_1, w_2
 $w_1 \cap w_2 = A, B$
 $CE \perp w_1, DE \perp w_2$
 $\angle BCD = \angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD, BF = BD$
 $R_1 = R_2 = r$
 Найти: EF



Решение:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & BF \cap W_2 = D, \\
 & BF \cap W_1 = C, \\
 & BF \perp CD \Rightarrow \angle C, BC = \angle D, BD = 90^\circ \quad \Bigg| \Rightarrow C, O_1, C, D, O_2, D \Rightarrow C, C = D, D = 2R =
 \end{aligned}$$

= 14

$$2) \quad CC_1, AB - \text{внуг} \Rightarrow \angle CC_1B = \angle CAB = \alpha$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & DA, D, B - \text{внуг} \Rightarrow \angle BDD_1 = \angle BAD, \\
 & \& D_1 \in AC \text{ (т.к. } DD_1 - \text{диам, } \angle DAC = 90^\circ \Rightarrow D_1 \in AC) \quad \Bigg| \Rightarrow \\
 & \angle CAB = \alpha \\
 & \angle CAB = \angle D, AB \quad \Bigg| \Rightarrow \angle D, AB = \alpha
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle D, DB = \alpha$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \triangle CBC_1 \text{ и } \triangle D, BD - \text{прям} \quad \Bigg| \Rightarrow \triangle CC_1B = \triangle D, DB \text{ по гип. и углу} \Rightarrow \\
 & C, C = D, D \\
 & \angle CC_1B = \angle D, DB = \alpha
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow C, B = DB$$

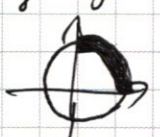
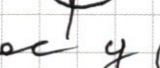
$$5) \begin{matrix} C, B = DB \\ DB = BF \end{matrix} \Rightarrow C, B = BF$$

$$6) \begin{matrix} CB \perp CF \\ C, B = BF \end{matrix} \Rightarrow \triangle FCC, - \text{равнобедренный} \Rightarrow CC_1 = CF \Rightarrow CF = 14$$

Ответ: $CF = 14$

№7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 & (1) \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 & (2) \end{cases}$$

решением (2) без модулей - и с центром $(5; 12)$
и радиусом 13, и с модулями мы все, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$
т.е.  симметричные относ. x , y относительно осей
относ. y (см.  что получилось карандашом)

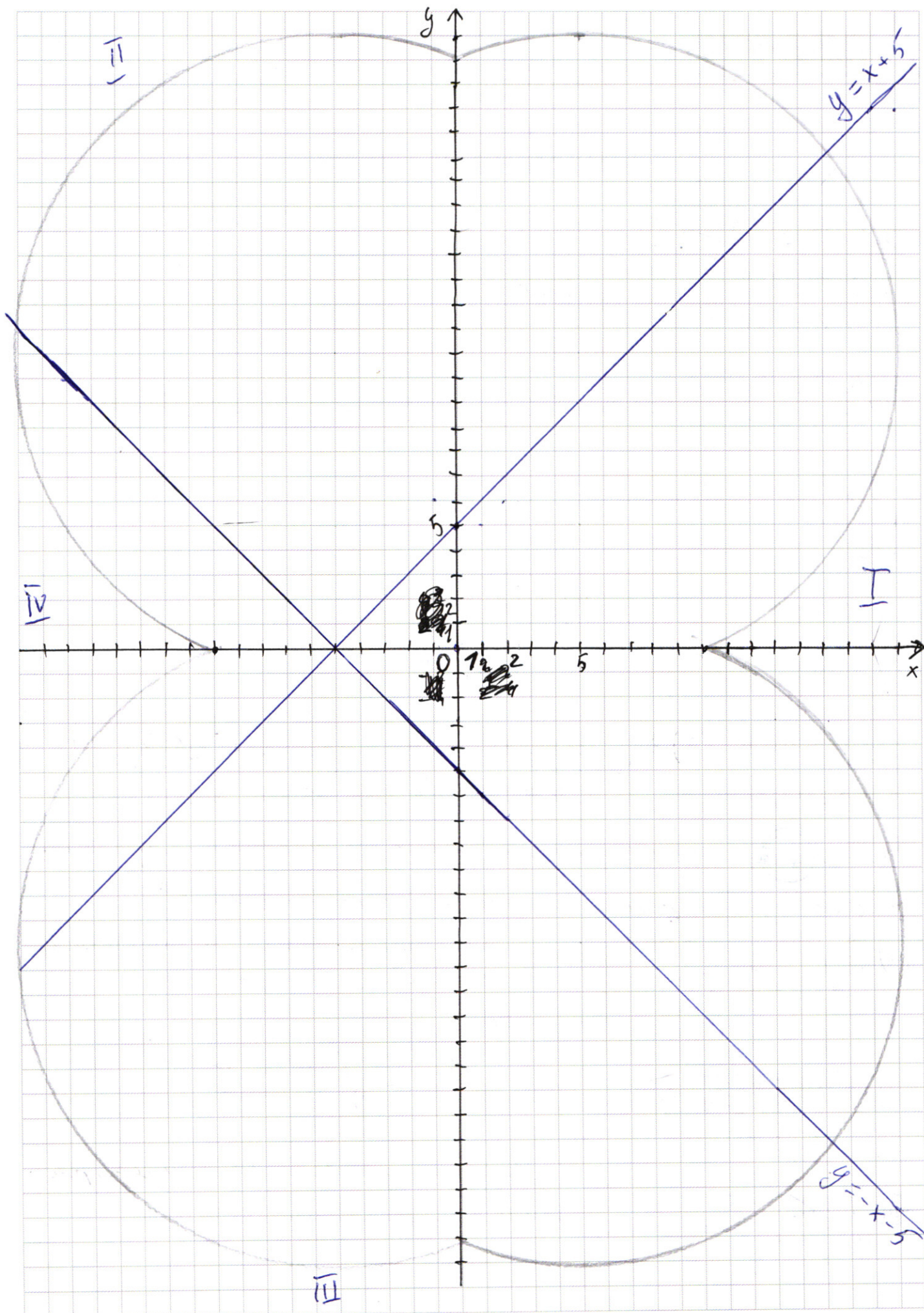
$$(1) \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases} \text{ т.е. } I \text{ на графике.} \\ 2x \leq 0 \quad \text{реш. нет.}$$

$$II \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x-y+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y > x+5 \end{cases} \text{ реш. нет} \\ y \leq 5$$

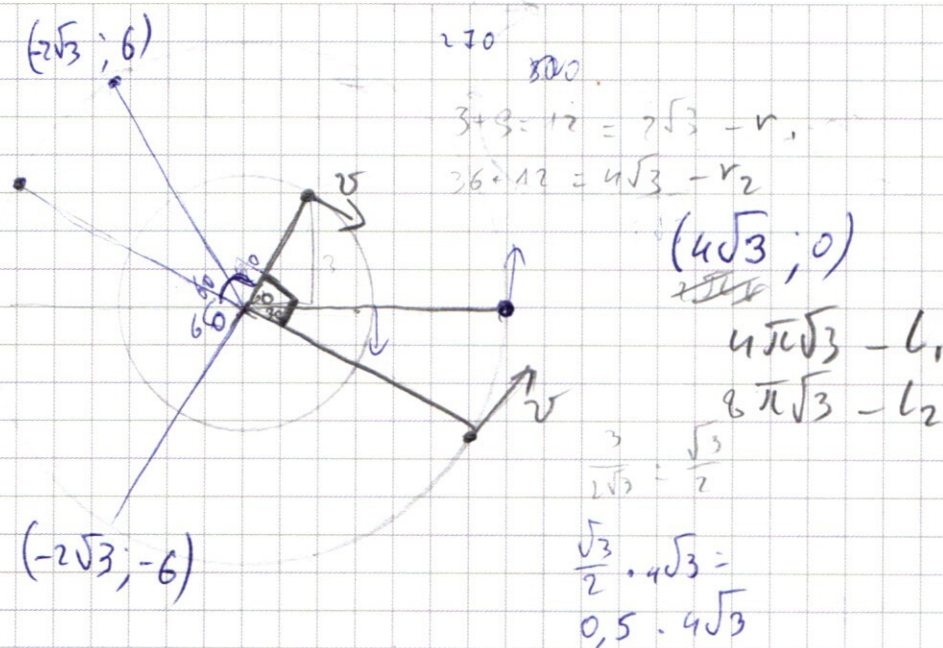
$$IV \begin{cases} y < -x-5 \\ y > x+5 \end{cases} \text{ реш. нет} \\ x \geq 0$$

$$III \begin{cases} y < -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases} \text{ реш. нет} \\ y \geq -5$$

Раз ни одна система не имеет реш.
то и все уравнение не имеет



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = 2 \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 \mid x+1 \mid +1 \geq 0$$

$$T \times \geq -1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(5x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2x) + (x^4 - 2x^2 + 4) \geq 0$$

$$5x^3(x-1) - 2x(x-1) + (x^2-1)^2 \geq 0$$

$$x(5x^2 - 2)(x - 1)$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + \underset{\substack{-125+80+25}}{7} x - 10 \quad -5$$

$$(x+5)(x-2)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2x - 2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

II $x < -1$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^3(6x+5) + 2x(3x+1) + 1 \geq 0$$

$$x^3 - 3x^2 - x^2 + 9 = 0$$

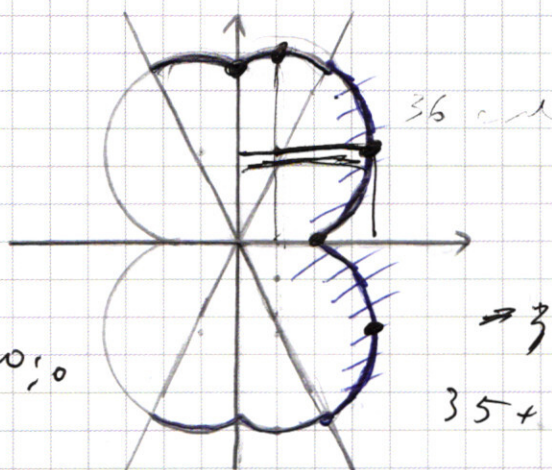
$$x^2(x-3) = (x-3)(x+3) \Rightarrow$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

~~$$x^2(x-4) + 3 = 0$$~~

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x=3$$



2, 25

-10, 0

$$35 + 15 \leq 40$$

3, 18, 12

35+

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 & y \geq -x-5 \\ x-y+5 \geq 0 & y \leq x+5 \\ \underline{ax \leq 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0 & y < -x-5 \\ x-y+5 \geq 0 & y \leq x+5 \\ -2y \geq 10 & y \leq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 & y \geq -x-5 \\ x-y+5 < 0 & y > x+5 \\ \underline{y \leq 5} & 10:0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0 & y < -x-5 \\ x-y+5 < 0 & y > x+5 \\ -2x \leq 20 & x \geq -10 \\ -x-y-5-x+y-5 \leq 10 \end{cases}$$

$$x+y+5-x+y-5$$

$$x+y+5-x+y-5 \leq 10$$

$$\begin{cases} 2(a-b)bx + 6by = 2b \\ 6bx + 2(a-b)by = 2 \\ y \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b)x + 3y = \frac{a}{2} \\ 3x + (a-b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$2(a-b)b(x-y) + 6b(x-y) = 2b-2$$

$$(x-y)(2ab-2b^2-6b) = 2b-2$$

$$(b-b)(x-y)$$

$$(a-b-3)(x-y) = \frac{a}{2} - \frac{1}{b} = \frac{ab-2}{2b}$$

$$-x-y-5+x-y+5 \leq 10$$

$$x-y = \frac{ab-2}{2b(a-b-3)}$$

$$\begin{aligned} \text{I } a-b-3 &= 0 & y &\geq -5 \\ a &= b+3 \end{aligned}$$

$$\text{II } x-y = \frac{ab-2}{2b(a-b-3)}$$

$$\frac{b^2+3b-2}{2b} = 0$$

$$-x-y-5-x+y-5 \leq 10$$

$$b^2+3b-2=0$$

$$-2x-10 \leq 10$$

$$2x+5 \geq 5$$

$$D = 9+8 = 17$$

$$x \geq 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \quad a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(2(a-b)x + 6y - 2$$

$$(3b)x + (a-b)by = 1$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6}$$

$$3bx + (a-b)b\left(\frac{a-2(a-b)x}{6}\right) = 1$$

$$18bx + (2b - b^2)(a - 2(b - b)x) = 6$$

$$18bx + a^2b - ab^2 - 2a^2bx$$

N 5

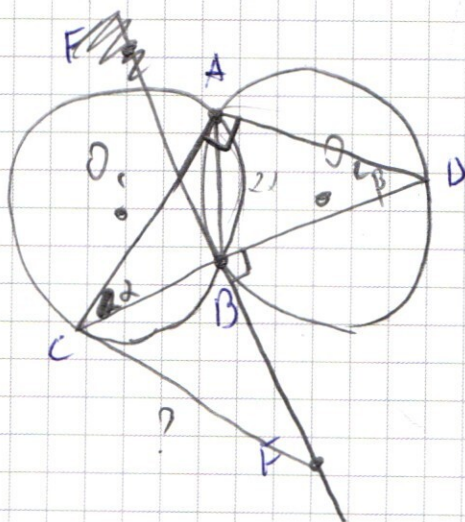
2000	2
3500	2
1750	2
875	5
175	5
35	5
7	7

$$\int \begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

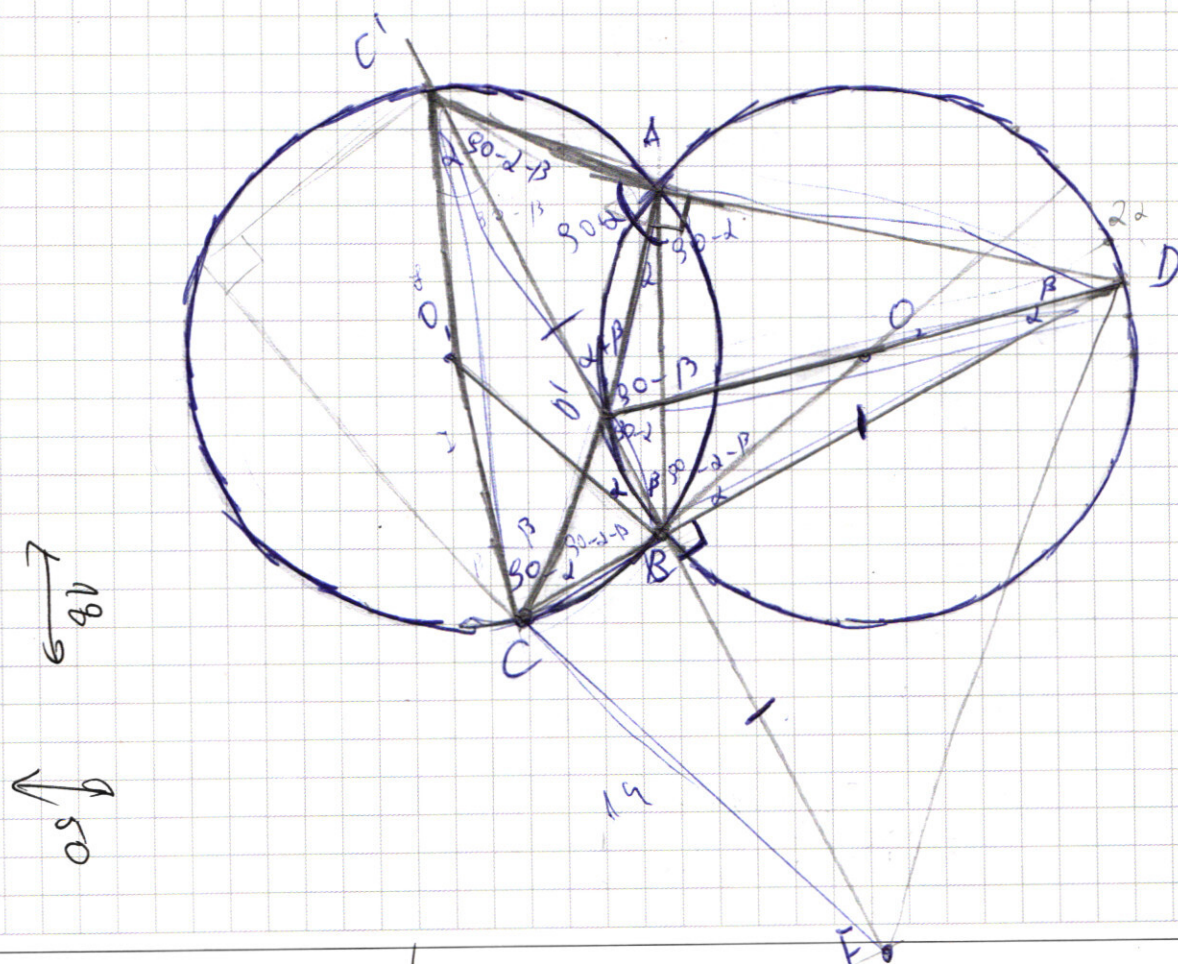
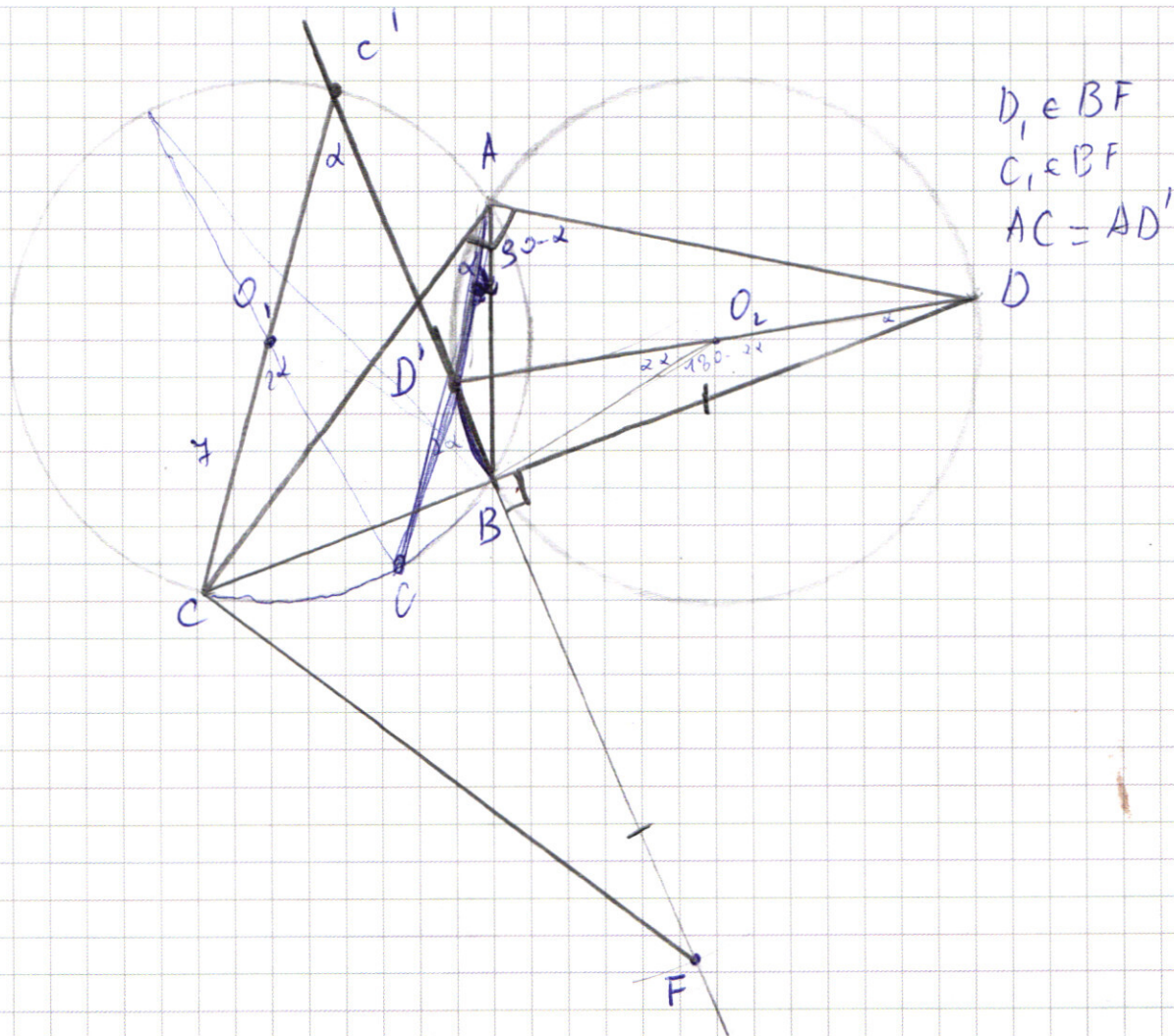
$$807,5 = 280$$

$$C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3 + C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1$$

$$280(4 + 12 + 4) = 5600$$



$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$
$$x^2-x-3=0$$
$$D=1+12=13$$
$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + x^2 + 2(x+1) - 5x^2(x+1) \geq 0$$

$$\frac{11}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)x + 3y = \frac{a}{2} \\ 3x + (a-b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$(x+y)(a-b+3) = \frac{ab+2}{2b}$$

$$\begin{cases} a-b+3=0 \\ b=a+3 \end{cases}$$

$$x+y = \frac{ab+2}{2b(a-b+3)}$$

$$\frac{a^2+3a+2}{2a+b} = 0$$

$$a^2+3a+2=0$$

$$a = -1, -2$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -2 \\ b = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$2x + 6y = 3$$

$$6x + 2y = 1$$

$$16x = 0$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} (a-b)x + 3y = \frac{a}{2} \\ 3x + (a-b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\frac{a(a-b)}{2} - (a-b)^2x - (a-b)$$

$$\begin{cases} (a-b)^2x + 3(a-b)y = \frac{a(a-b)}{2} \\ 3x + 3(a-b)y = \frac{3}{b} \end{cases}$$

$$a = b+3$$

$$b^2 + 6b^2 + 9b - b^3 - 3b^2 - 6 = 0$$

$$\frac{3b^2 + 3b - 6}{2b} = 0$$

$$\frac{b^2 + 3b - 2}{2b} = 0$$

$$x((a-b)^2 - 3) = \frac{a^2b - ab^2 + 6}{2b}$$

$$x(a-b-3)(a-b+3) = \frac{a^2b - ab^2 - 6}{2b}$$

$$\begin{cases} a-b-3=0 \\ \frac{a^2b - ab^2 - 6}{2b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+3=0 \\ \frac{a^2b - ab^2 - 6}{2b} = 0 \end{cases}$$

