

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

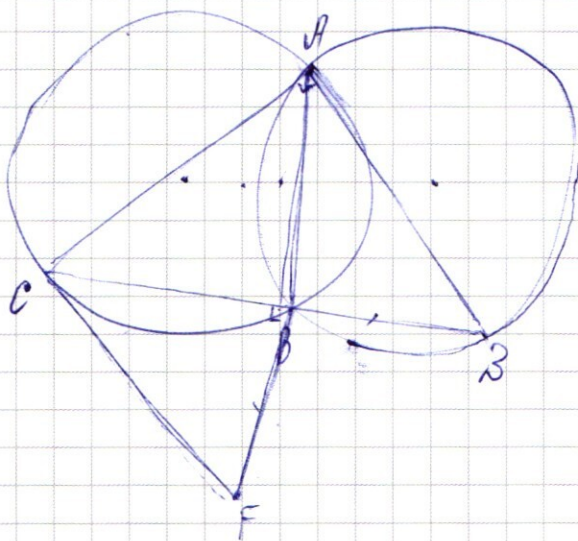
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



По теореме синусов для $\triangle ABR$

$$\frac{AB}{\sin \angle B} = 2R$$

По теореме синусов для $\triangle ABC$
 $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$, откуда

$$\sin \angle C = \sin \angle N$$

$$\angle C = 90^\circ - \angle B$$

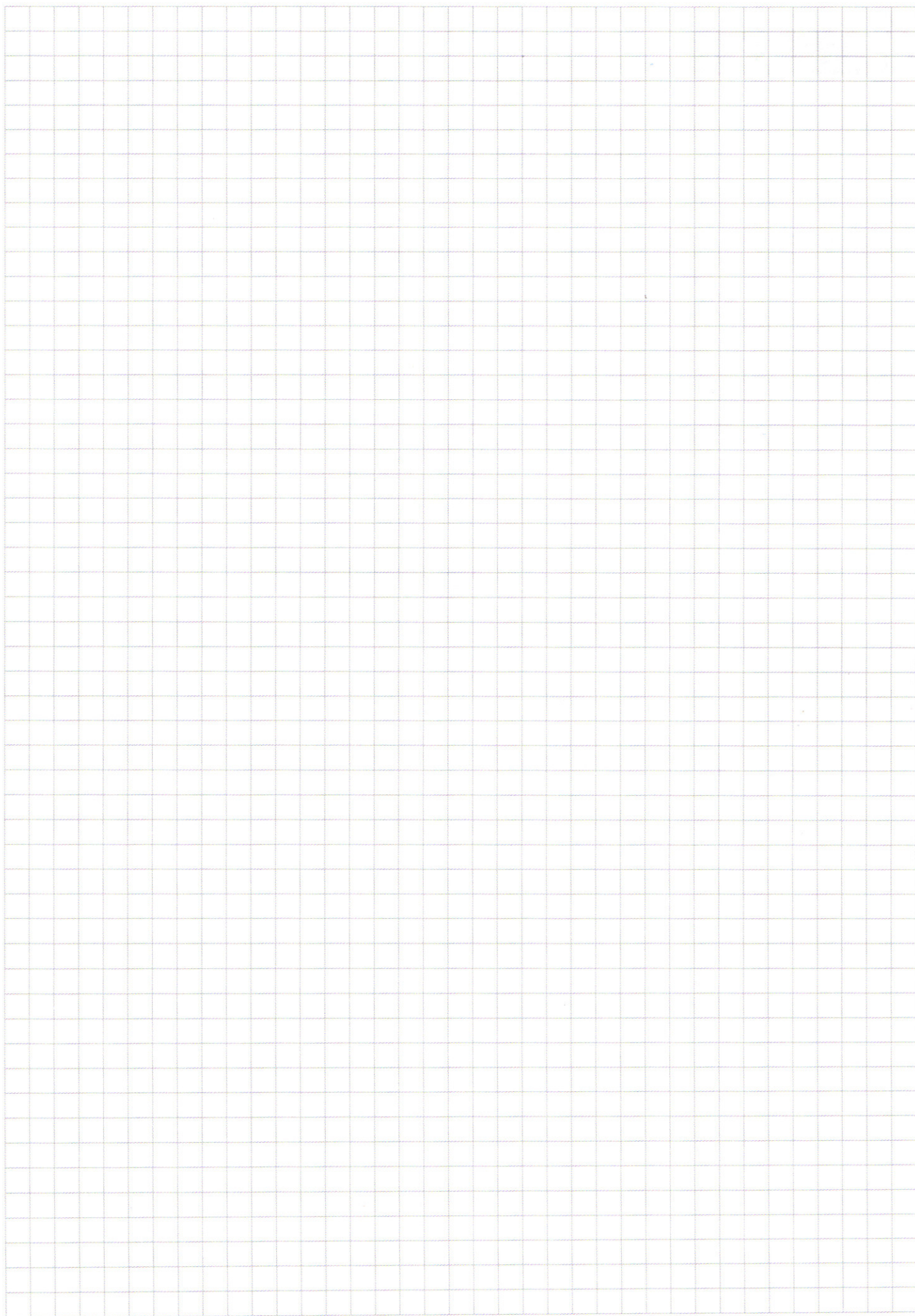
$$\cos \angle B = \sin \angle B$$

$$\angle N = 45^\circ$$

$$\sqrt{AB} =$$

$$AB = 9\sqrt{2} = 13$$

$$CB = AB - \sqrt{2} = 1.8$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 Пусть $x \geq +1$, тогда уравнение принимает вид

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x + 1 > 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 > 0$$

7 Развистили первое неравенство системы

$$\text{Пусть } x - 3 - y \geq 0 \text{ и } x - 3 + y \geq 0$$

$$y \leq x - 3 \text{ и } y \geq 3 - x$$

$$x - 3 - y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2x - 6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$\text{Пусть } x - 3 - y \geq 0 \text{ и } x - 3 + y < 0$$

$$y \leq x - 3 \text{ и } y < 3 - x$$

$$x - 3 - y - x + 3 - y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$\text{Пусть } y > x - 3 \text{ и } y \geq 3 - x$$

$$-x + 3 + y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$\text{Пусть } y > x - 3 \text{ и } y < 3 - x$$

$$-x + 3 + y - x + 3 - y \leq 6$$

$$-2x + 6 \leq 6$$

$$x \geq 0$$

Второе условие системы представляет собой четыре нулевых радиусности с радиусом 5, каждая из которых пересекает замкнутую область или линию или в одной точке (М или Л). Поэтому решением является $(0, 0)$ $(6, 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + (x-1)^2 - 3x^2(x-1) > 0$$

Пусть $a = |x-1|$, $z = x^2$

$$2z - 3az + a^2 \geq 0$$

Если $a = 0$, то $x = 1$ и неравенство выполняется

$$2\left(\frac{z^2}{a}\right) - 3\frac{z}{a} + 1 > 0$$

Рассмотрим

$$t = \frac{z}{a}$$

$$2t^2 - 3t + 1 > 0$$

$$(t-1)(2t-1) > 0$$

Найдем корни

$$1. t = 1$$

$$z = a$$

$$x^2 = |x-1|$$

При $x \geq 1$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - x + 1 \neq 0 \quad \forall x$$

$$x \in \emptyset$$

При $x < 1$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2. t = \frac{1}{2}$$

$$2z = a$$

$$2x^2 = |x-1|$$

При $x \geq 1$

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$2x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x$$

При $x < 1$

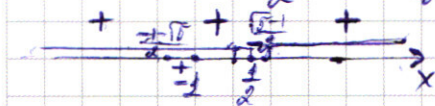
$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Итак $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ - 1, $\frac{1}{2}$ - нули



$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+3)x + 12y - a = 0 \\ 43x + (a+3)3y - 1 = 0 \end{cases}$$

Линейная система уравнений имеет бесконечно много решений, в том случае, когда выполняется условие $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, где k_1, k_2 — коэффициенты при x , b_1, b_2 — коэффициенты при y , c_1, c_2 — свободные члены.

Выходит, что:

$$\begin{cases} \frac{3(a+3)}{43} = \frac{12}{a+3} \\ \frac{12}{a+3} = a \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3 \cdot \frac{12}{a}}{43} = \frac{12}{\frac{12}{a}} \\ a+3 = \frac{12}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} = a \\ a+3 = \frac{12}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \frac{9}{a^2} \\ a + \frac{9}{a^2} = \frac{12}{a} \end{cases}$$

$$a^3 - 12a + 9 = 0$$

Заметим, что $a = 3$ — решение, $3 = 1$

$$\begin{array}{r|l} a^3 + 0a^2 - 12a + 9 & a-3 \\ a^3 - 3a^2 & a^2 + 3a - 3 \\ \hline 3a^2 - 12a & \\ 3a^2 - 9a & \\ \hline -3a + 9 & \\ -3a + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$a^2 + 3a - 3 = 0$$

$$D = 9 + 12 = 21$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \begin{cases} 3 = \frac{9}{a^2} \\ 3 = \frac{9}{\left(\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}\right)^2} \end{cases}$$

Ответ: $(3, 1), \left(\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{6}{5 \pm \sqrt{21}}\right)$

$$3(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$\begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x^3 - 2x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 5x + 6 - x^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Заметим, что $x=2$ - решение

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 3 \\ \hline x^2 - 5x & \\ x^2 - 2x & -3x + 6 \\ \hline -3x + 6 & -3x + 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Заметим, что $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, -3$ не удовлетворяют ОДЗ

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

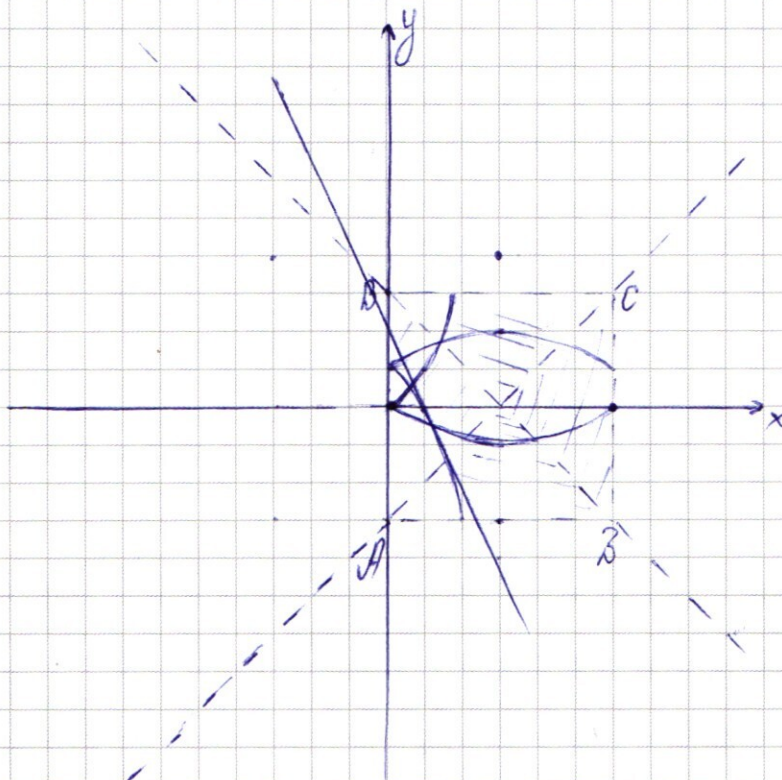
ОДЗ:

$$x^3 - x + 10 \geq 0$$

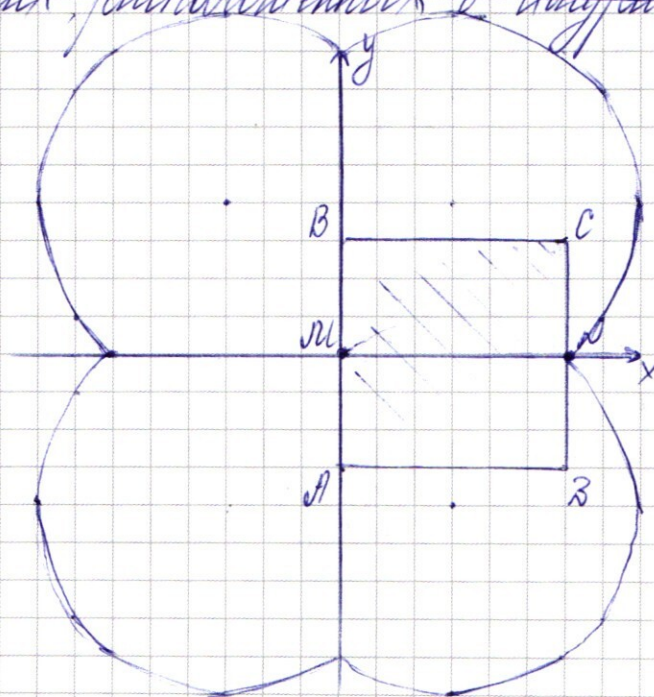
$$0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

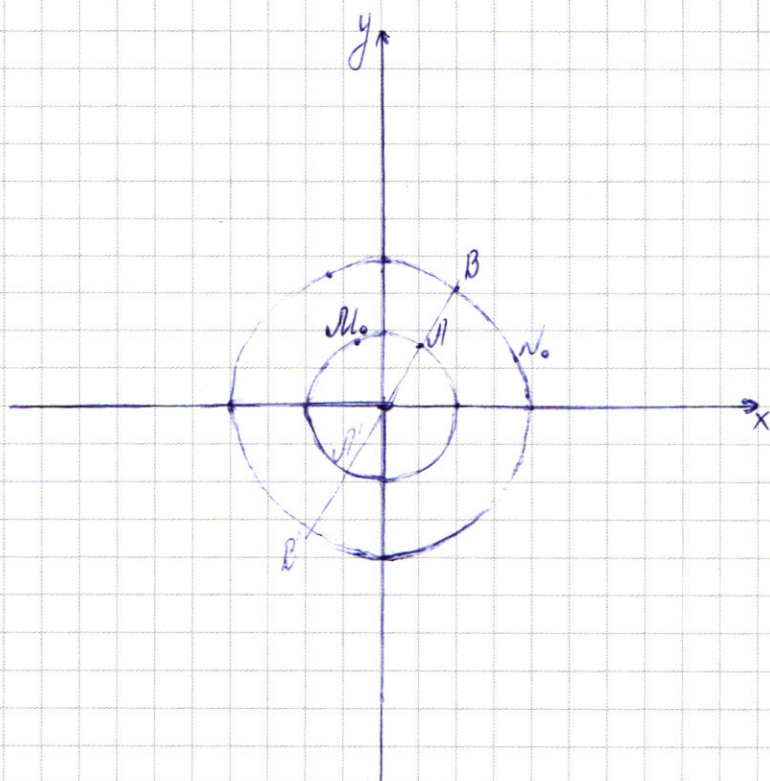


Полные образцы решений системы являются все точки,
лежащие на дугах, расположенных в квадрате



Ответ: $(0; 0)$ $(6; 0)$

1



Пусть r - радиус окружности, по которой бегают муравьи, R - радиус окружности, по которой бежит муха. $r^2 = x_m^2 + y_m^2 = 1$, $R^2 = x_n^2 + y_n^2 = 4$. Пусть $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - угловые и линейные скорости муравья и мухи соответственно.

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_2}{2}, \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_1}{2} \Rightarrow \vec{v}_1 = 2\vec{v}_2$$

Расстояние между муравьем и мухой будет минимальным тогда и только тогда, когда муха, муравей и нулевой сахар вымрут на одной прямой. Пусть эти точки $M(x, y)$, $B(2x, 2y)$. Тогда:

$$\alpha_{M_0} = \frac{2\pi}{3} - \arctg \frac{x}{y}, \quad \beta_{N_0} = \arctg \frac{x}{y} - \frac{\pi}{6}$$

$$t_1 = \frac{\alpha_{M_0}}{\omega_1} = t_2 = \frac{\beta_{N_0}}{\omega_2} = \frac{2\beta_{N_0}}{\omega_1}$$

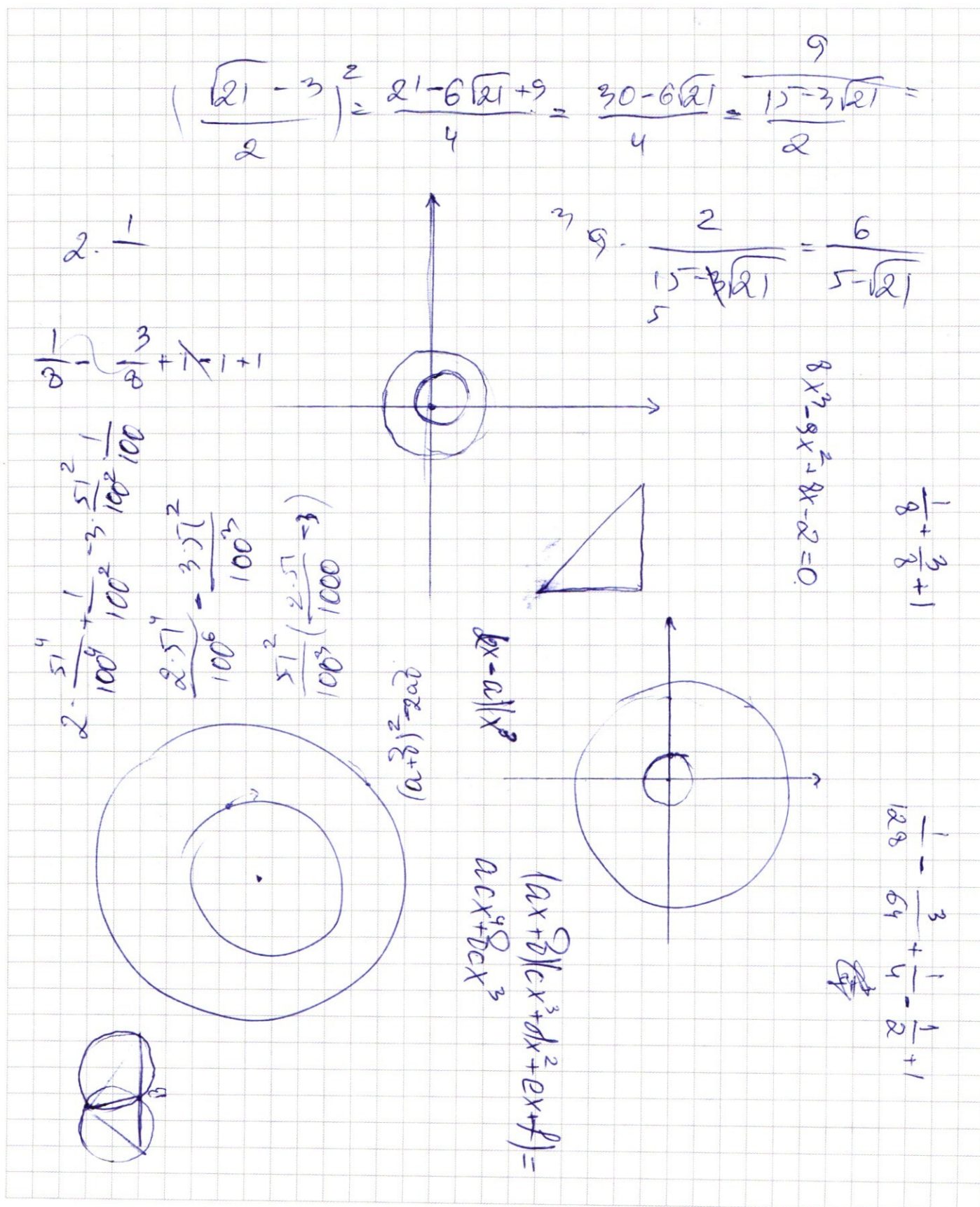
$$\alpha_{M_0} = 2\beta_{N_0}, \quad \frac{2\pi}{3} - \arctg \frac{x}{y} = 2 \arctg \frac{x}{y} - \frac{\pi}{3}, \quad \arctg \frac{x}{y} = \frac{\pi}{3}, \quad x = \sqrt{3}y$$

$$\text{Так } x^2 + y^2 = 4, \text{ то } y = \pm 1, \quad x = \pm \sqrt{3}, \text{ значит}$$

$$B(\sqrt{3}, 1), B(-\sqrt{3}, -1)$$

$$\text{Ответ: } (\pm 2\sqrt{3}, \pm 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 = 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 15 \overline{) 1500} \\ \underline{150} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{18\sqrt{11} - 5\sqrt{11}}{2} = 6\sqrt{11}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2 + 9 = 3.4.3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1$$

$$2x^9 - 3x^3 + 3x^2$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

157

72

9/11

3A3

20/1/17

11/8/15

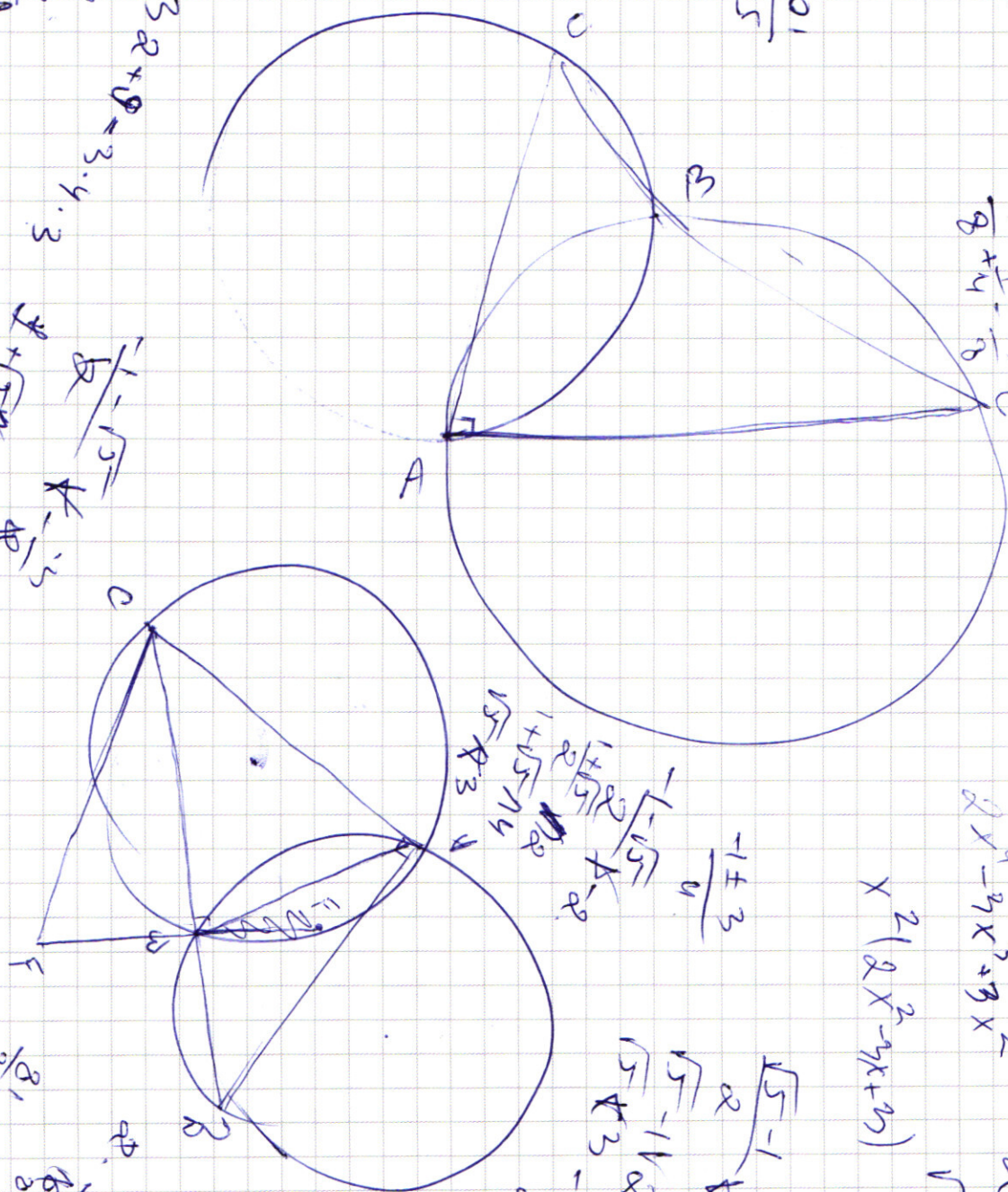
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

2

$\frac{2}{x-2}$

3

6/14



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(ax + b)(cx^3 + dx^2 + ex + f) = acx^4 + bcx^3 + adx^3 + bdx^2 + aex^2 + bex + afx + df$
 $acx^4 + (bc + ad)x^3 + (bd + ae)x^2 + (be + af)x + df$

$ac = 2$
 $bc + ad = -3$
 $bd + ae = 4$
 $be + af = -2$
 $df = 1$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 - 1 = 1$

$24x^2 - 18x + 8 = 0$
 $12x^2 - 9x + 4 = 0$

$64 - 36 + 16 = 2$

$-8 - 9 + 8 - 2 \leq 0$

$$x \geq 1$$

$$200 \cdot 7$$

$$100 \cdot 2 \cdot 7$$

$$5^2 \cdot 2^3 \cdot 7$$

$$t - x \cdot t - x \Rightarrow 0$$



$$55$$

$$2.22 \cdot 7$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2(x^4 + 2x^2 +$$

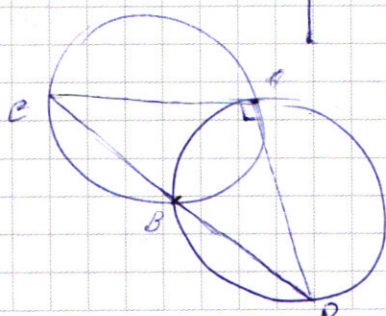
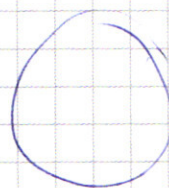
$$2(x^2 + 1) - x(3x^2 + 2) > 0$$

$$7 + 1 = x/7$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2}$$



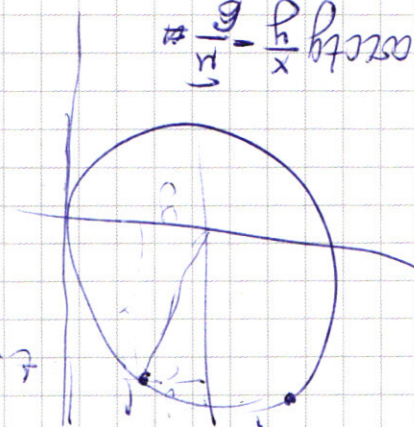
$$y_1 = y_2 = y_3$$

$$y_1 = y_2 = y_3$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$7 = 5$$

$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{AB}{\sin \angle D} = \frac{AB}{\cos \angle D} = 18$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$