МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

1.) Запишем ОДЗ:

$x^3 - x + 10 \geq 0$

2.) Разложим на множ. x^2+5x+6

$x^2+5x+6=0$

$D=1$

$x_1=-2$

$x_2=-3$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

3.) Докажем лемму, что для любого $a \geq 1$ верно нер-во $a^3 > a$

сократим на a, т.к. $a>0$

$a^2>1$ ~~верно для любого~~

$a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$

$a \in (1;+\infty)$ — ч.т.д.

4.) $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+2)(x+3)$

I При $x=-3$

Подставим в ОДЗ

$-14<0 \Rightarrow$ не подходит

II при $x \neq -3$

$\sqrt{x^3-x+10}=x+2$

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

При $x=2$

$0=0$, причём 2 подходит по ОДЗ.

$x_1=2$

Деление:

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{-\,x^3-2x^2} & \overline{x^2+x-3} \\ \quad x^2-5x & \\ \quad \underline{-\,x^2-2x} & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad \underline{-\,-3x+6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

5.) Разделим многочлен на $x-2$ (процесс деления см. справа)

$x^2+x-3=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{13}$

$x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

6.) Проверим x_2 и x_3 по ОДЗ.

Рассмотрим функцию ОДЗ

x^3-x+10.

При нолож. x $x^3 \nearrow$ $-x \searrow$

Сравним x^3 и $-x$

$x^3 \vee x$

Для x_2 по лемме ($x_2>1$ т.к. $\sqrt{13}>3$)

$x^3>x \Rightarrow$ подходит по ОДЗ

Для x_3

$x^3<x \Rightarrow$ не подходит

Ответ: 2; $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

№ 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \quad (1) \\ 4bx+(a+b)by=1 \quad (2) \end{cases}$$

1.) Ур-ие имеет бескон. кол-во решений, если имеет вид $0\cdot x=0$

2.) Запишем (1)+(2)

$3(a+b)x+4bx+12y+(a+b)by=a+1$

$x(3a+7b)+y(12+ab+b^2)=a+1$

Рассмотрим два случая, когда верность не зависит от x и когда от y

$$\begin{cases} 3a+7b=0 \\ a+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2+ab+12=0 \\ a+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b^2-b+12=0 \end{cases}$$

$b^2-b+12=0$ не имеет решений, т.к.

$D=-47$, а $-47<0$

3.) Запишем (1)-(2), а затем аналогично пункту 2 системы

$3(a+b)x-4bx+12y-(a+b)by=a-1$

$x(3a-b)+y(12-ab-b^2)=a-1$

$$\begin{cases} a=1 \\ 3a=b \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b^2+ab-12=0 \end{cases} \qquad b^2+b-12=0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ (b-3)(b+4)=0 \end{cases} \qquad \sqrt{D}=7 \quad b_1=-3 \quad b_2=4$$

Ответ: $(-1; \frac{3}{7})$, $(1;3)$, $(1;-4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1.) Разложим 1400 на простые множители

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 1400$

Разложение → 6 однознач. чисел.

2.) Заметим, что только умножение „двоек" ($2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$) „сохраняет" множитель однозначным.

3.) Составим „наборы" цифр из которых может быть составленно число

1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7 — I набор
1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 7 — II набор
1, 1, 1, 1, 8, 5, 5, 7 — III набор

4.) По формулам числа сочетаний найдём кол-во способов составить 8-знач. число

I — $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{12} = 1680$

II — $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 3366$

III — $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$

$1680 + 3360 + 840 = 5880$

Ответ: 5880

№ 1

1.) Найдём радиусы окружностей

$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2 - r_м$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = 4 - r_ж$

2.) Заметим, что острый угол между осью x и $OM_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$, острый угол между осью x и $ON_0 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$, причём M_0 и N_0 лежат в разных полуплоскостях относительно Oy

3.) Из пун. 2 $\Rightarrow \angle M_0ON_0 = 90^\circ$

4.) Угловая скорость обр. проп. радиусу окр., значит раз $r_ж = 2r_м$, $\omega_м = 2\omega_ж$.

Из отношения скоростей понятно отношение расстояний (углов) пройденных ими — муравей пройдёт в 2 раза больше, т.е. 60°, а жук – 30°

5.) Найдём координаты жука в этой точке

По x — $4 \cdot \cos 60 = 2$

По y — $4 \cdot \sin 60 = 2\sqrt{3}$

$2; 2\sqrt{3}$

6.) Следущая встреча – через $\frac{\omega_м}{\omega_м+\omega_ж}\cdot 360^\circ = 240^\circ$ по часовой стрелке

Координаты жука – $(-4; 0)$

7.) Следущая – ещё через 240° по часовой

Координаты жука — $(-2; -2\sqrt{3})$

8.) Всего встреч 3, т.к. $\frac{360^\circ}{\frac{\omega_ж}{\omega_ж+\omega_м}\cdot 360^\circ} = 3$

Ответ: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (-2; -2\sqrt{3})$

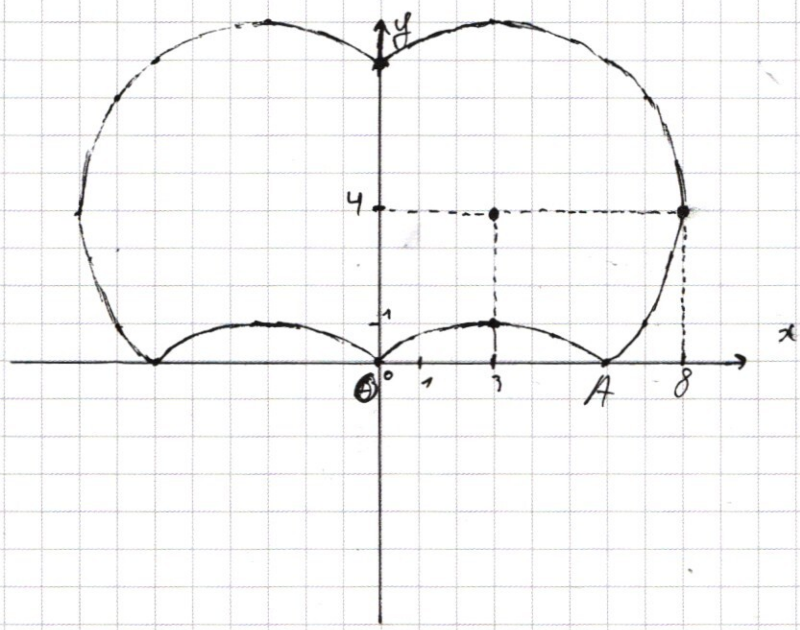
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \le 6 & (1) \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25 & (2) \end{cases}$$

1.) Заметим, что график второго ур-ия (2) (без учёта модулей) — окр. [зачёркнуто] смещ. на 3 вправо и на 4 вверх, радиусом $\sqrt{25}=5$

Модули „отражают" график относительно осей так, что в 2-ой и 3-ей четвертях ничего не остаётся, а изображение из первой „отражается" относительно оси y



2.) Заметим, что график первого ур-ия (1) — часть плоскости не строго ограниченная прямыми

3.) Заметим, что (0; 0) является решением 1-ого ур-ия, значит одно решение системы — (0; 0), найдём другие

4.) Заметим, что (3; 1) - решение

5.) Заметим, что дуга OA (все точки на ней) — решения

Ответ: (0; 0); (3; 1); . . .

№ 4

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$

$2x^4 + x^2 + 1 - 2x \geq 3x^2|x-1|$

заметим, что $x^2 \geq 0$; $|x-1| \geq 0$ $\Rightarrow$ $3x^2|x-1| \geq 0$, значит

$2x^4 + x^2 + 1 - 2x \geq 0$

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

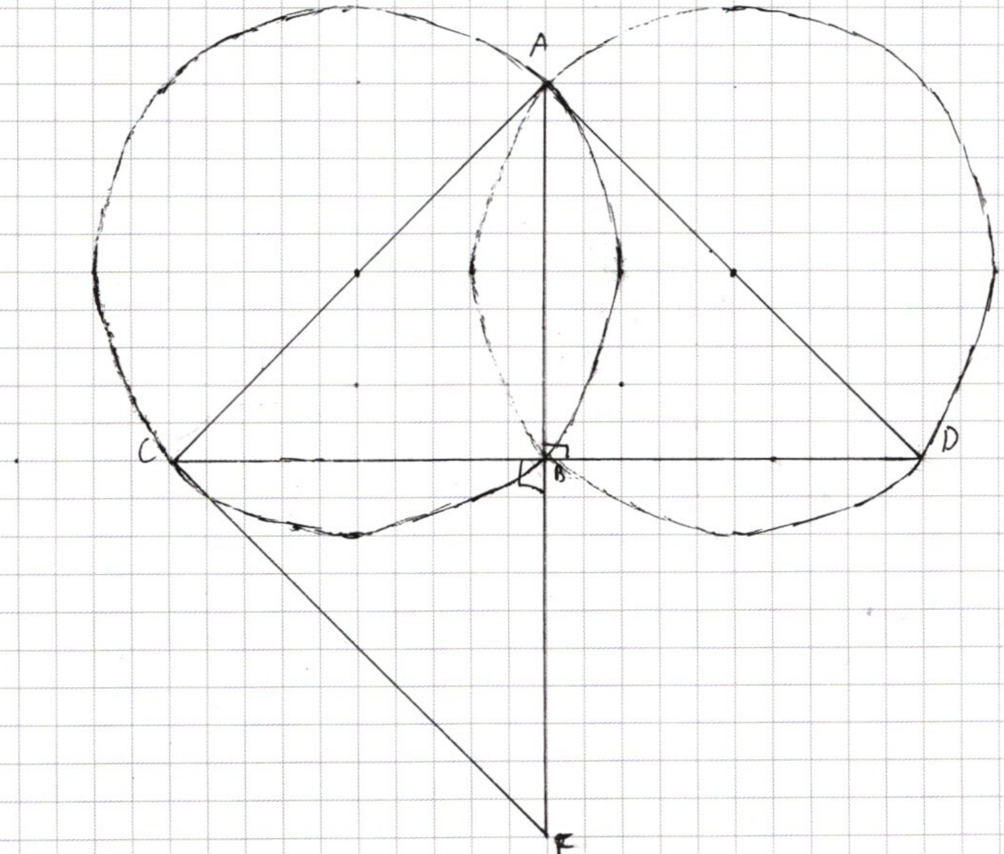
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Существует единственное решение, значит C и D симметричны отн. AB, тогда начертим рисунок



1.) Из симметрии $\angle CAF = \angle DAF$

2.) $\angle CAF + \angle DAF = 90^\circ \Rightarrow \angle CAF = 45^\circ$; $\angle DAF = 45^\circ$

3.) $\angle CAF = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$; $\angle BAD = 45^\circ$

4.) Из пункта 3 $\Rightarrow AB = BC = BD$, а так-же, по усл., равен BF

5.) $\triangle BCF = \triangle ABD$ по катетам и прям. углу $\Rightarrow CF = AD$

6.) $AD = 2r$, т.к. $\triangle BAD$ — п/у

7.) $AD = 18 = CF$

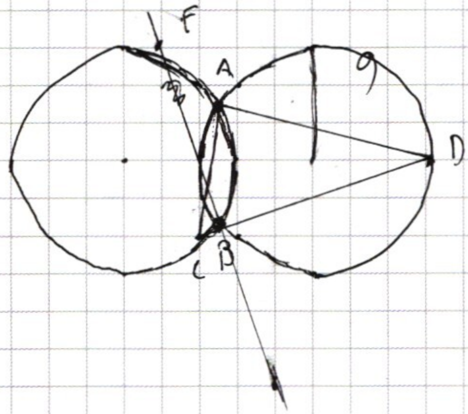
Ответ: $CF = 18$

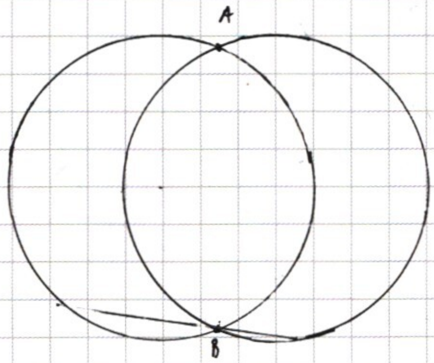
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{array}{r} 5 \\ \cdot\, 48 \\ 7 \\ \hline 336 \end{array}$$

№5

1400

2 700
2 350
2 2 7 50
2 2 7 5 10
2 2 7 5 5 2

1 1 2 2 2 5 5 7 — $8 \cdot \frac{7\cdot 6}{2} \cdot \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}$
1 1 1 2 4 5 5 7 — $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{5\cdot 4}{2}$
1 1 1 1 8 5 5 7 — $8 \cdot 7 \cdot \frac{6\cdot 5}{2}$

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{12} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\cdot 6\cdot 7 = 240\cdot 7 = 1680$$

$$\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 10\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 480\cdot 7 = 3360$$

$$\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8 = 40\cdot 21 = 840$$

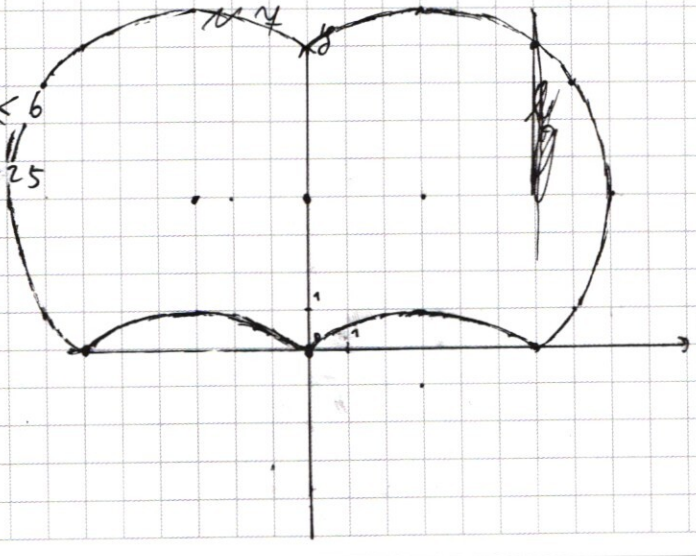
$+\ 4200$

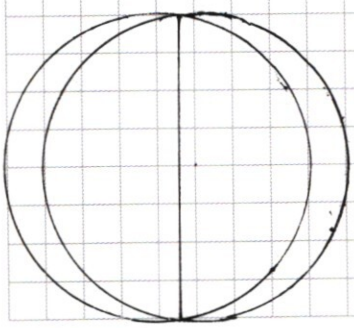
5880

№7

$|x-3-y|+|x-3+y| \le 6$

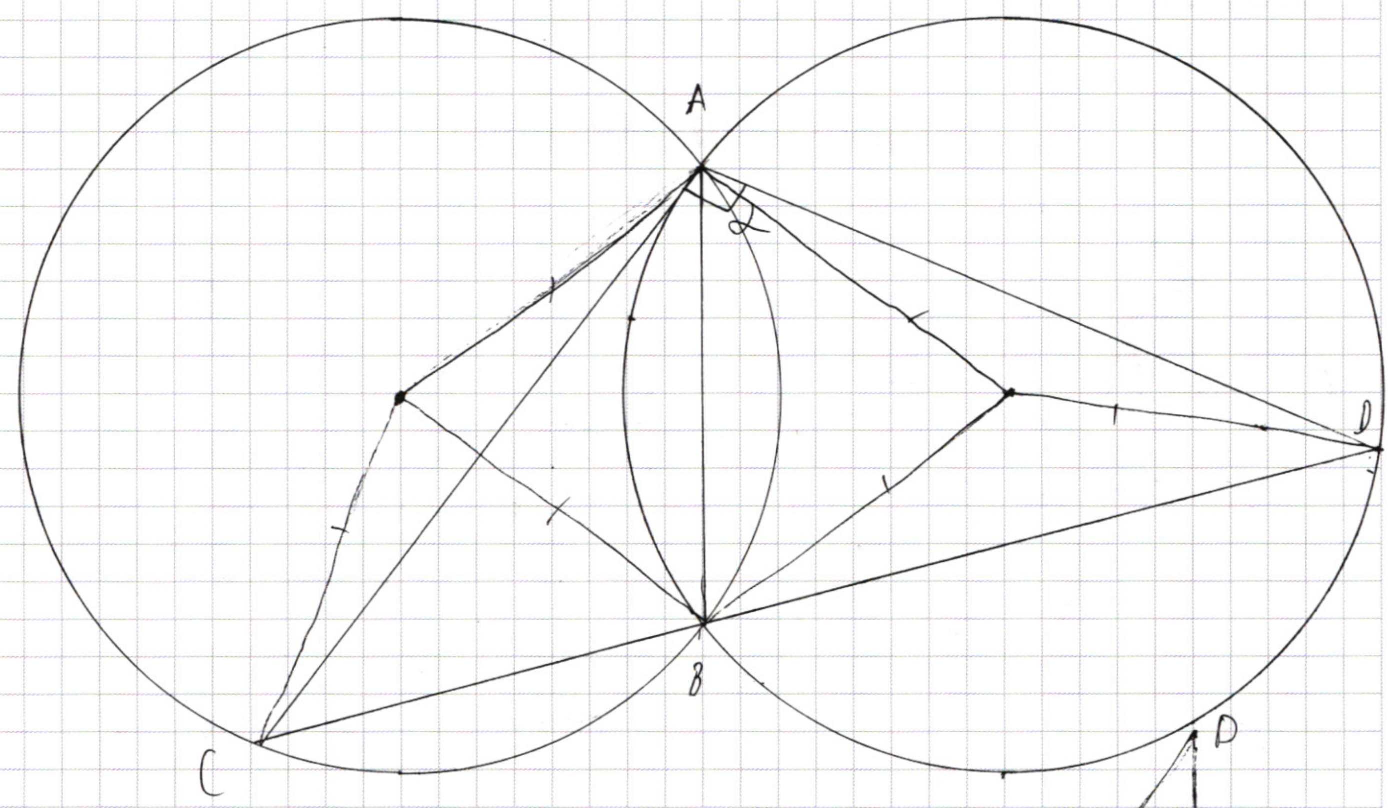
$(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$

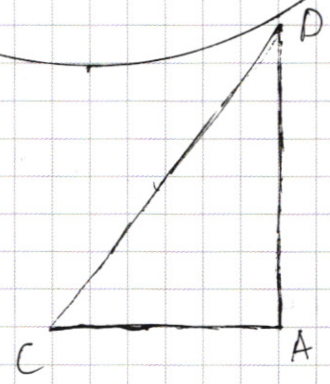


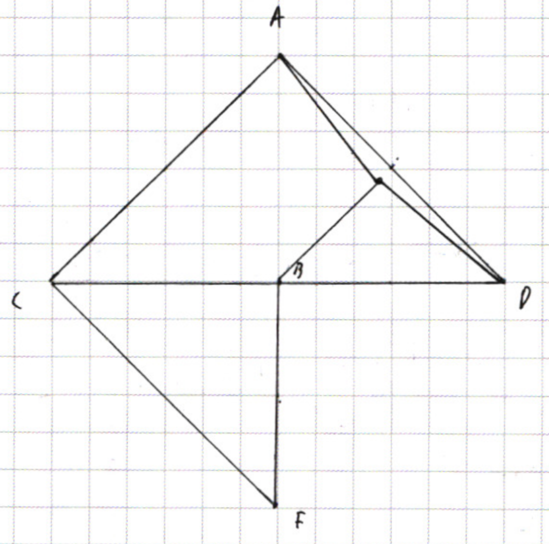


☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№6







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$

$x_1=-3$; при таком x $x^3-x+10=-14$; $-14<0$ $\Rightarrow$ не подх. по ОДЗ.

$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$\cancel{\text{при } x_1=1}$

$\cancel{1-1-5+6=1}$

при $x_2=2$

$8-4-10+6=0$

$x_2=2$; при таком x $x^3-x+10=16$; $16>0$

$x^3-x^2-5x+6 \mid x-2$

$x^3-2x^2 \mid x^2+x-3$

x^2-5x

x^2-2x

$-3x+6$

$x^2+x-3=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{13}$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$

$x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \geq 0$

$x^3 < x$ при $x>0$

$x^2<1$

$x\in(0;1)$

$x^2+5x+6=0$

$\sqrt{D}=1$

$x_1=\dfrac{-5+1}{2}=-2$

$x_2=\dfrac{-5-1}{2}=-3$

ОДЗ: $x^3-x+10\geq 0$

$\cancel{(-3)^3-(-3)+10=-27+3+10=-14}$

№ 4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x+1 \geq 3x^2|x-1|$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$2x^4+x^2-2x+1\geq 0 \qquad 2x^4+x^2-2x+1=0$

$2x^4+x^2+1\geq 2x$

при $x\in(-\infty;0]$ очевидно да

при $x\in(0;1)$

$2t^2+t+1=y$

$\left(\sqrt{2}\,t+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$2t^2+4t+1=0$

$D=16-8$

$t_1=\dfrac{-4+\sqrt{8}}{4}=-1+0,5\sqrt{2}$

$t_2=\dfrac{-4-\sqrt{8}}{4}=-1-0,5\sqrt{2}$

$4t^2+8t+2=0$

$D=64-32$

1.) $x\geq 1$

$2x^4+x^2-2x+1-3x^2(x-1)\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4+4x^2+1 \geq 3x^3+2x$

$2(x^2+1-0,5\sqrt{2})(x^2+1+0,5\sqrt{2})\geq x(3x^2+2)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

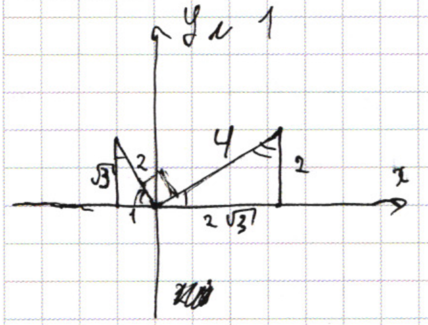
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$

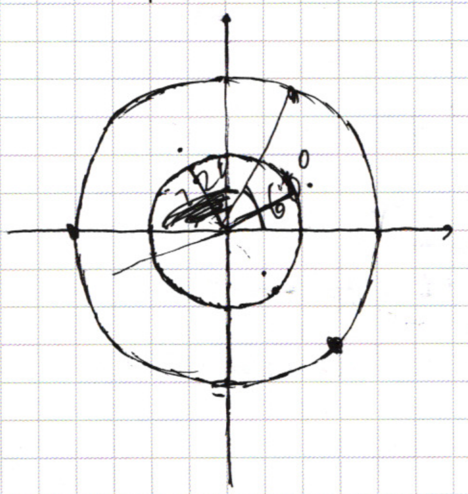
$$\begin{cases} 3(a+b)x=-12y+a \\ 4bx-1=-(a+b)by \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x=-12y+a \\ \frac{4bx-1}{-(a+b)b}=y \end{cases}$$

$$x=\frac{-12y+a}{3(a+b)}$$

$$\frac{4b\frac{-12y+a}{3(a+b)}-1}{-(a+b)b}=y$$





№2

$3(a+b)x+4bx+12y+(a+b)by=a+1$

$x(3a+3b+4b)+y(12+(a+b)b)=a+1$

$x(3a+7b)+y(12+ab+b^2)=a+1$

$$\begin{cases} 3a=-7b \\ a=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12+ab+b^2=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

$3a=-3$ $\qquad b^2-b+12=0$

$-3=-7b$

$$\begin{cases} b=\frac{3}{7} \\ a=-1 \end{cases} \qquad b_1=4 \quad a=-1 \qquad b_2=-3 \quad a=-1$$

$3(a+b)x-4bx+12y-(a+b)by=a-1$

$x(3a+3b-4b)+y(12-(a+b)b)=a-1$

$x(3a-b)+y(12-ab-b^2)=a-1$

$$\begin{cases} a=1 \\ 3a=b \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b^2+ab-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases} \qquad b^2+b-12=0$$

$$\begin{cases} b_1=3 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_2=-4 \\ a=1 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)