

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases} \quad | : N^2$$

$$\begin{aligned} 3(a+b)x + 12y &= a(4bx + (a+b)by) \\ 3ax + 3bx + 12y &= 4abx + a^2by + ab^2y \\ 3ax + 3bx - 4abx &= a^2by + ab^2y - 12y \\ x(3a + 3b - 4ab) &= y(a^2b + ab^2 - 12) \end{aligned}$$

Для бесконечного кол-ва решений в обеих частях
должен быть ноль:

$$\begin{cases} 3a + 3b - 4ab = 0 \\ a^2b + ab^2 - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(a+b) - 4ab = 0 \\ ab(a+b) - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = u \\ ab = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u - 4v = 0 \\ uv - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{4v}{3} \\ 4v^2 = 36 \end{cases} \quad \underline{v = \pm 3}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} v = 3 \\ u = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4-b \\ b^2 - 4b + 3 = 0 \end{cases} \quad D = 4 \quad \begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{4 \pm 2}{2} = \{3; 1\} \\ a_{1,2} &= \{1; 3\} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} v = -3 \\ u = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} ab = -3 \\ a+b = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b-4 \\ b^2 + 4b - 3 = 0 \end{cases} \quad D = 28 \quad \begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} \\ b_{1,2} &= \{-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7}\} \\ a_{1,2} &= \{-2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2\} \end{aligned}$$

Ответ: сначала, a , потом, b ;

$$(1; 3); (3; 1); (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}); (\sqrt{7} - 2; -2 - \sqrt{7})$$

N 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x^3-x+10 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow (x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D = 1+12 = 13$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ (x-2)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

* Если $x = -3$, то подкоренное выражение будет отриц. ~~тогда равенство все равно верно,~~
но тогда равенство все еще будет верным!

$$\text{Ответ: } \left\{ \overset{-3}{\cancel{-3}}; 2; -\frac{\sqrt{13}+1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right\}$$

N 5

$$\overline{abcdefgh} : abcdefgh = 1400 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1}_{8 \text{ чисел}}$$

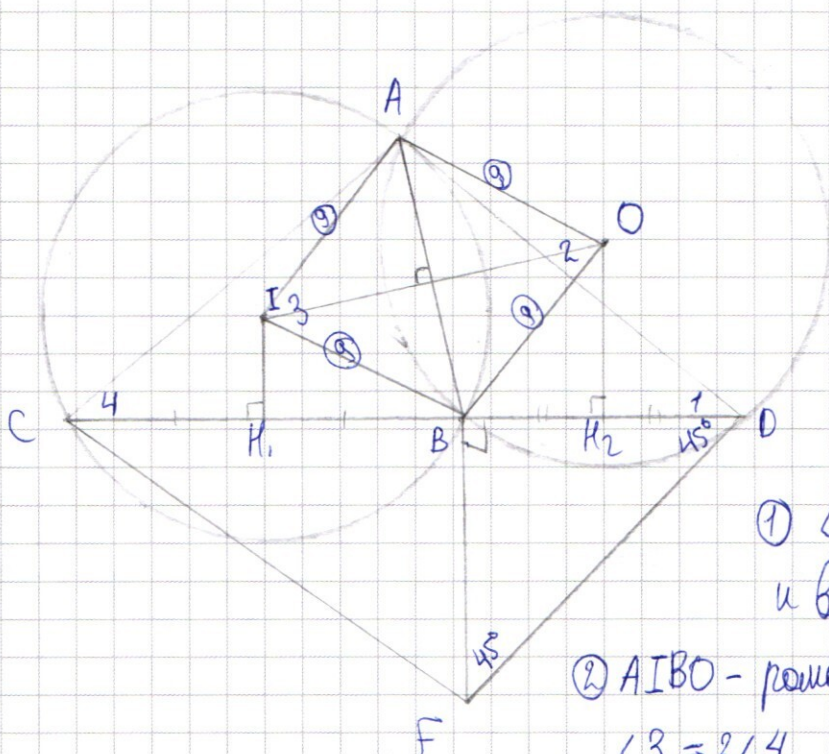
Нам надо только ~~сделать~~ перестановку $\overset{8 \text{ чисел}}{\text{этих чисел}}$:

$$\frac{8!}{3! \cdot 2 \cdot 2} = 1680$$

$$\text{Ответ: } 1680$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



① $\angle 2 = \angle 1$, как центр.
и внутр. углы окр. на одну дугу

② АІВD - ромб, зн $\angle 2 = \angle 3$
 $\angle 3 = 2\angle 4$, значит $\angle 1 = \angle 4$

② $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$, $\therefore \angle 1 = \angle 4 = 45^\circ$; $\triangle BFD: \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

③ $\angle AIO = \angle AOI = 45^\circ$, жк. $\angle IAO = 90^\circ$; раиб $AOBI$ вписан. (по укл.)
 $\angle IBO = 90^\circ$ ($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$)

④ $\Delta H, B = \Delta OH_2 B$ (по 2 углам и гипотенузе): $I H_1 = B H_2$

$$\textcircled{5} CF^2 = CB^2 + BF^2 = (2BH_1)^2 + (2BH_2)^2 \quad H_1B = OH_2$$
$$\Delta I_{H,V}: I_{H_1}^2 + V_{H_1}^2 = 9^2 \rightarrow V_{H_2}^2 + V_{H_1}^2 = 81 \rightarrow 4V_{H_2}^2 + 4V_{H_1}^2 = 4 \cdot 81$$
$$CF^2 = 4BH_1^2 + 4BH_2^2 = 4 \cdot 81$$
$$CF = 2 \cdot 9 = 18$$

Orbiter: $CF = 18$

N 4

$$2 + 1 - 2 \cdot 1 + 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$|x-1| = t, t \geq 0$$

$$2x^4 + t^2 - 3x^2t \geq 0$$

$$(x^4 + t^2 - 2x^2t) + x^4 - x^2t \geq 0$$

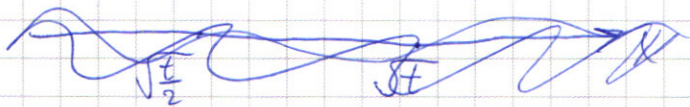
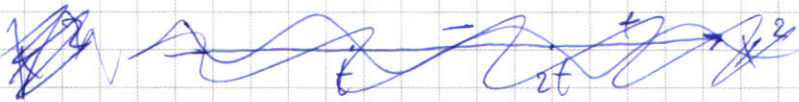
$$(x^2 + t)^2 + x^2(x^2 - t) \geq 0$$

$$(x^2 - t)(x^2 - t + x^2) \geq 0$$

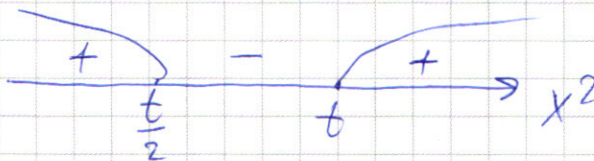
$$(x^2 - t)(2x^2 - t) \geq 0$$

$$\frac{1+3}{2} = -2$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$



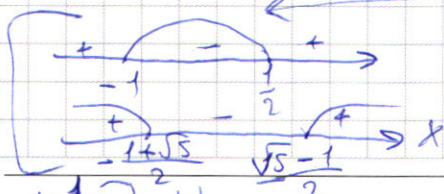
$$\begin{cases} x^2 \leq \frac{t}{2} \\ x^2 \geq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq \frac{|x-1|}{2} \\ x^2 \geq |x-1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - |x-1| \leq 0 \\ x^2 - |x-1| \geq 0 \end{cases}$$

① $x \geq 1$: $\begin{cases} 2x^2 - x + 1 \leq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \emptyset \text{ (парабола е вярвяща върху върху оси ox)} \\ x \in \mathbb{R}, x \geq 1! \end{cases}$

② $x < 1$: $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 \leq 0 \\ x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x-\frac{1}{2}) \leq 0 \\ (x+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \geq 0 \end{cases}$



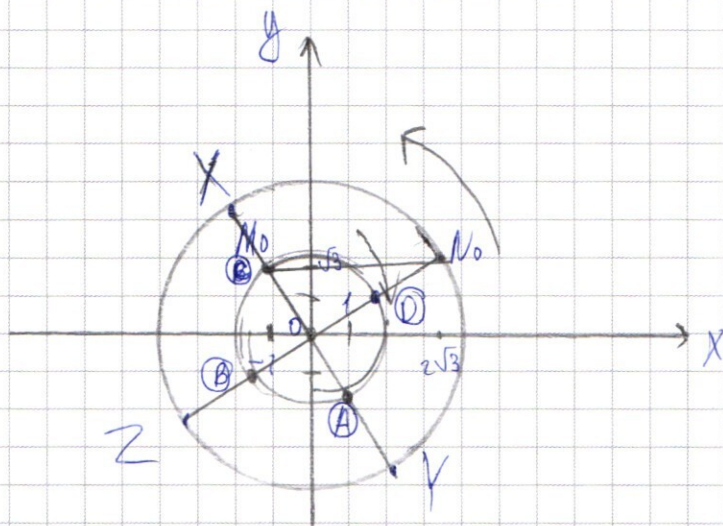
$$x < 1$$

Омбер:

$$[-1, \frac{1}{2}] \cup$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1



Мин. расст. =
= разности радиусов
окруж

$$\textcircled{1} r_M = \sqrt{12+4} = 4$$

$$r_N = \sqrt{1+3} = 2$$

$$r_M - r_N = 2$$

$$\textcircled{2} r_M = 2 \cdot r_N, v_1 = v_2, \text{ з.н.}$$

пока жука дает полуокруж,
муравей дает полный круг

$$\textcircled{3} M_0 N_0 = \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{20}$$

$$M_0 O^2 + N_0 O^2 = 16 + 4 = 20$$

$$M_0 N_0^2 = 20 \leftarrow = M_0 O^2 + N_0 O^2$$

$\triangle M_0 N_0 O$ - ~~прямоу.~~ прямоу., з.н. след. точки.

пересечения (при мин. расстоянии) - A, B, C, D ~~у муравья~~

у муравья и X, Y, Z и N_0 у жука

N4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$|x-1| = t, t \geq 0$$

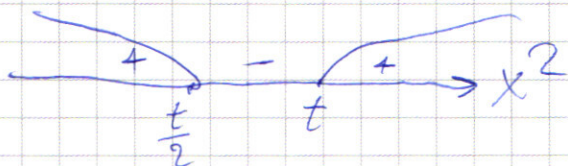
$$2x^4 + t^2 - 3x^2t \geq 0$$

$$(x^4 - 2x^2t + t^2) + x^4 - x^2t \geq 0$$

$$(x^2 - t)^2 + x^2(x^2 - t) \geq 0$$

$$(x^2 - t)(x^2 - t + x^2) \geq 0$$

$$(x^2 - t)(2x^2 - t) \geq 0$$

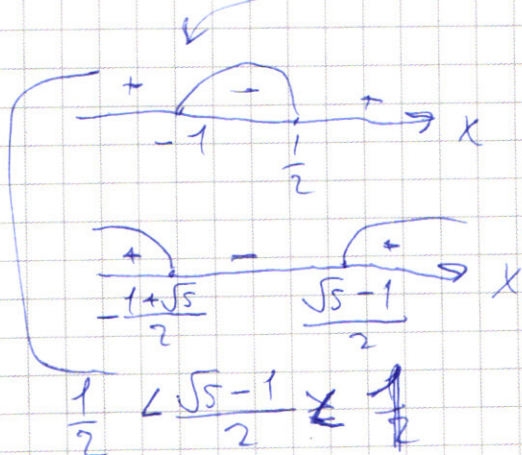


$$\begin{cases} x^2 \leq \frac{t}{2} \\ x^2 \geq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - |x-1| \leq 0 \\ x^2 - |x-1| \geq 0 \end{cases}$$

① $x \geq 1$: $\begin{cases} 2x^2 - x + 1 \leq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{parabola с ветвями вверх} \\ x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \end{cases}$ (выше оси OX)

② $x < 1$: $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 \leq 0 \\ x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-\frac{1}{2}) \leq 0 \\ (x+\frac{\sqrt{5}+1}{2})(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \geq 0 \end{cases}$



$x < 1$

Ответ: $(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup$
 $\cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1)$
 $\cup [1; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$r_B = \frac{S}{P} = \frac{a+b+c}{2} = 6$$

$$r_0 = \frac{abc}{4S}$$

$$4 \cdot 24$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \quad \{-3; -2\}$$

N 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - x - 2) = 0$$

$$-27 + 3 + 10$$

$$8 - 2 + 10 > 0$$

$$x = -3$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0$$

	1	-1	-5	6
1	1	0	-5	
2	1	1	-3	0

$$x^3+x^2-3x-2x^2-2x+6$$

$$= x^3-x^2-5x+6$$

$$x = -3?$$

не явл. решением,
т.к. ~~то~~ подкоренное
выражение будет
отрицательным

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2+x-3 = 0$$

$$x^2+x-3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{ответ: } \{-3; 2; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\}$$

т

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} = x +$$



N2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax + 3bx + 12y - a = 0 \\ 4bx + aby + by^2 = 1 \end{cases}$$

$$a(3x-1) + 3(bx+y)$$

$$\frac{3(a+b)x + 12y}{4bx + (a+b)by} = a$$

$$3ax + 3bx + 12y = 4abx + a^2by + ab^2y$$

$$3ax + 3bx - 4abx = a^2by + ab^2y - 12y$$

$$ax(3+3b-4b)$$

$$x(3a+3b-4ab) = y(a^2b + ab^2 - 12)$$

$$\begin{cases} 3a+3b-4ab=0 \\ a^2b+ab^2-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)-4ab=0 \\ ab(a+b)-12=0 \end{cases}$$

$$a+b=u, ab=v$$

$$\begin{cases} 3u-4v=0 \\ uv-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4v}{3} \\ \frac{4v}{3} \cdot v = 12 \end{cases}$$

$$4v^2 = 36$$

$$v^2 = 9$$

$$v = \pm 3$$

$$\textcircled{1} v=3$$

$$u=4$$

$$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4-b \\ 4b-b^2-3=0 \end{cases}$$

$$b^2-4b+3=0$$

$$D=16-12=4$$

$$b_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \{3; 1\}$$

$$a_{1,2} = \{1; 3\}$$

$$b^2-4b+3=0$$

$$D=16-12=4$$

$$b_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\begin{cases} ab=-3 \\ a+b=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-b-4 \\ b^2-4b+3=0 \end{cases}$$

$$a_1 = 2 - \sqrt{4} - 4 = -2 - \sqrt{4}$$

$$a_2 = 2 + \sqrt{4} - 4 = -2 + \sqrt{4}$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2(x-1) \geq 0$$

$$|x-1| = t, t \geq 0$$

$$2x^4 + t^2 - 3x^2t \geq 0$$

$$x^2(2x^2 - 3t) + t^2 \geq 0$$

$$2x^4 + |x-1|(x-1-3x^2) \geq 0$$

$$2x^4 + |x-1|(3x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$3x^2 - x + 1 = 0$$

$$(x^4 - 2x^2t + t^2) + x^4 - x^2t =$$

$$(x^4 + 4x^2 + 4) + (x^4 - 2x^2 + 1) - 2x + x^2 + 4 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

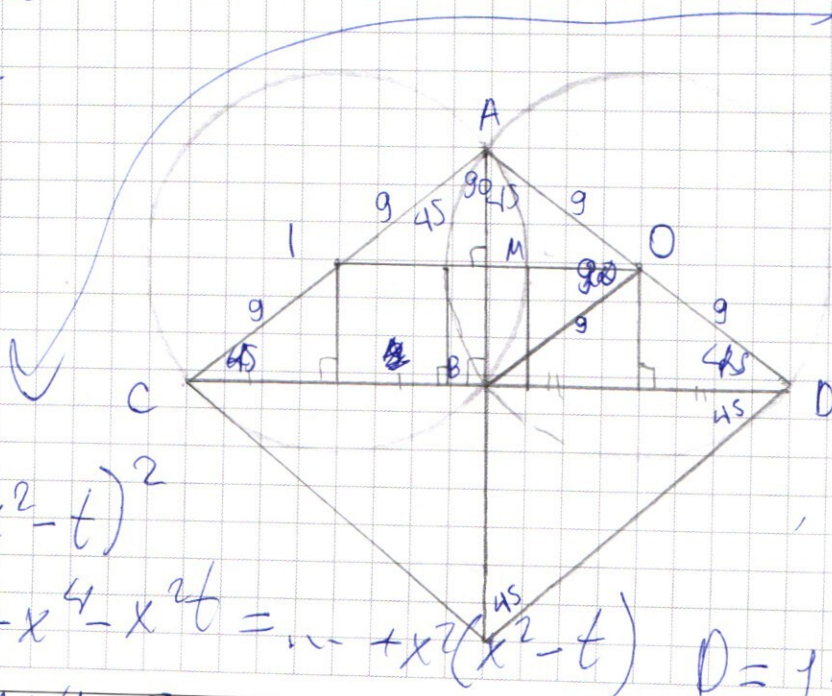
$$(x^2+2)^2 + (x^2-1)^2 - (x+1)^2 - 2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$2x^4 \leq$$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$$

$$x^2(2x^2 - 3|x-1|) \geq 0$$



$$= (x^2 - t)^2$$

$$+ x^4 - x^2t = \dots + x^2(x^2 - t)$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

1011CP

$$\frac{4ac - b^2}{4a} =$$

$$\frac{8-1}{8} =$$

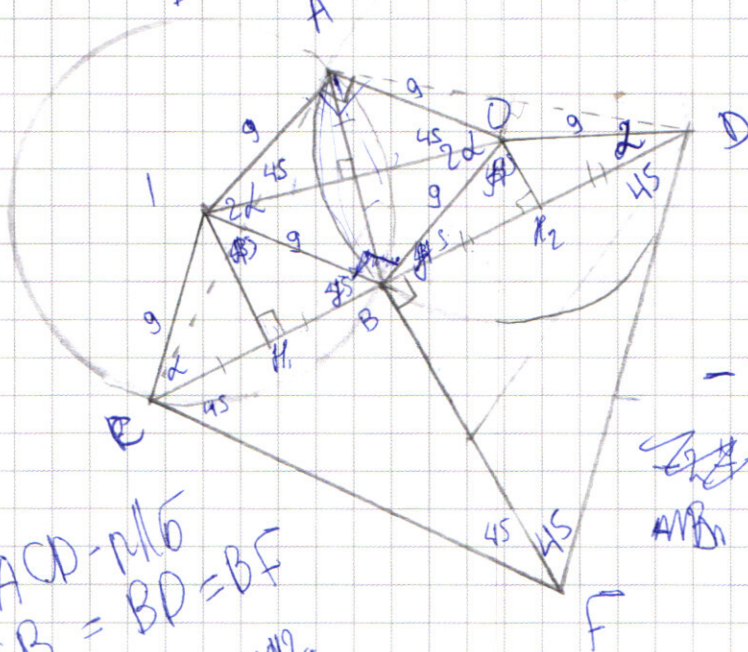
$$y = \frac{4}{8}$$

$$D =$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$D = 1 + 8 =$$

$\angle IAO = 90^\circ$ м.к.
 $\triangle IOA$: углы по 45°
 $\beta = 45^\circ = \gamma$



$\angle VAO = 90^\circ$,
 (м.к. $\{H_1, B = H_2 B \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle H_1 B = \triangle O H_2 B$
 $\Rightarrow$ углы равны

$-8 + 2 + 10 = 18$
 $-24 + 8 + 10 = -8$
 $2x$
 $2y$

$\triangle ACD$ - м.б
 $CB = BD = BF$

$\triangle ACD$ - правильный.
 $\text{гр. } \alpha = 45^\circ$

$AC \parallel FD$, углы накр. паралл. по 45°

$\angle ACD = \angle BFD$, зн. $ADFC$ - впис. четырехуг.,
 $\angle CFD = 90^\circ$

$4\alpha = 180$
 $\alpha = 45$

~~$CB = BD$~~
 ~~$ACFE$ - квадрат~~

$x - 3 = y$
 $x - 3 - y + x - 3 + y = 6$
 $2x = 12$
 $x = 6$

$H_1 = H_2 B = k$

$2k^2 = 9$

$k = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $k = BF$

$x^2 + y^2 = 9$

$\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$
 $\frac{\angle 3}{2} + \frac{\angle 2}{2} = 90^\circ$

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

$CF = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 + 1 \geq 0$$

$$\textcircled{1} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0, \quad x \geq 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

	2	-3	4	-2	1
1	2	-1	3	1	2
-1	2	-5	9		
0,5	2	-2	3	-0,5	

N 5

$$abcdefgh = 10^4 a + 10^6 b + 10^5 c + 10^4 d + 10^3 e + 10^2 f + 10g + h$$

$$(abcdefgh = 1400$$

$$1400 = 10^2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 =$$

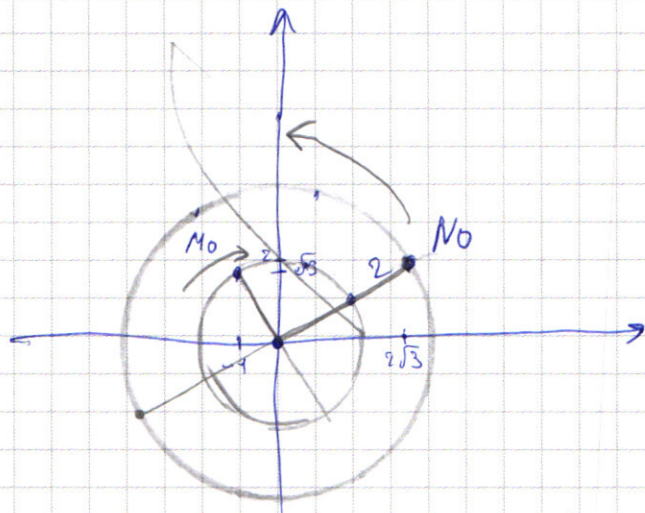
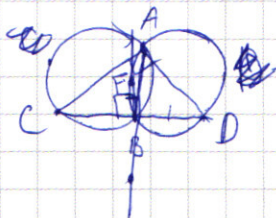
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

2^3

8 цифр

Ответом будет число равное кол-во перестановок этих чисел, но формула не равна

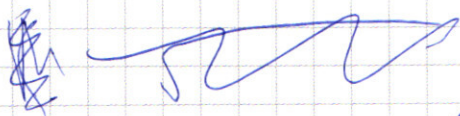
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{6 \cdot 120} = \frac{8!}{720} = 35$$



$$r_N = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$r_M = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\min p = 2$$



Можно провести прямую

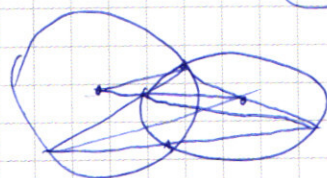
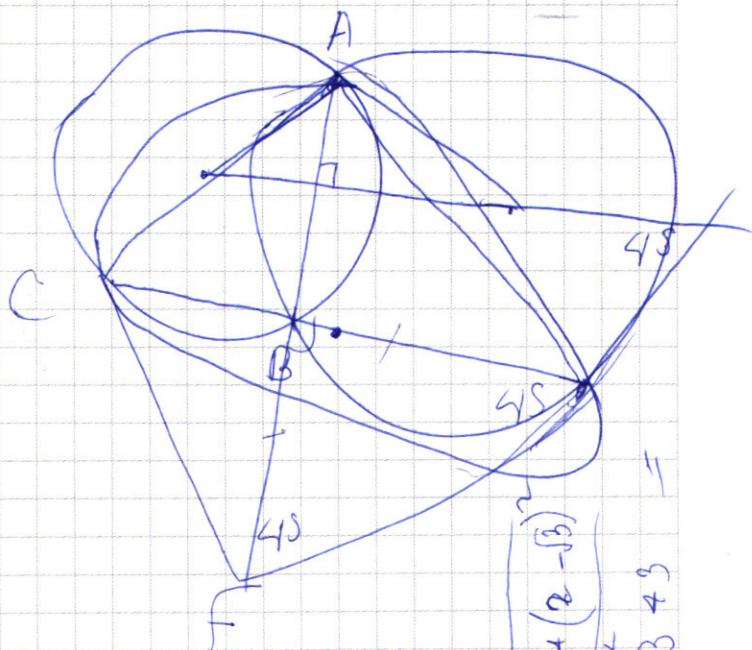
$$L_N = 2 \cdot 4 \cdot \pi = 8\pi$$

$$L_M = 2 \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi$$

$$\begin{cases} v_1 t_1 = L_1 \\ v_2 t_2 = L_2 \end{cases} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{L_1}{L_2} = 2$$

$$\begin{aligned} 9 + 9 - X &= 0 \\ 18 - X &= 9 \end{aligned}$$

$$\min p = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = 4$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \\ &= \sqrt{12 + 4\sqrt{3} + 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$