

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в |
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2(a-b)x + by = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{a}{(a-b)b} = \frac{a}{1}$$

$$2(a-b)^2 b = 18b$$

$$\begin{cases} b(a-b)^2 - 9 = 0 \\ (a-b-3)(a-b+3)b = 0 \\ (a-b-3)(a-b+3)b = 0 \\ (a-b-3)(a-b+3)b = 0 \end{cases}$$

$$1^\circ b = 0 \quad \emptyset$$

$$2^\circ b \neq 0$$

$$\begin{aligned} a-b &= 3 \\ a-b &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{3b} = \frac{a}{1}$$

$$b(b+3) = 2$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$b = 9 + 3 = 12$$

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{13} + 3}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{7 - \sqrt{13}}{2} \approx$$

$$\approx \frac{7 - 3.5}{2} = \frac{3.5}{2} = 1.75 \times \frac{64}{96} = 1.175$$

$$-1.25 + 80 + 25$$

$$3^\circ x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5; 2$$

$$\sqrt{\dots} = \frac{1}{2}(x+5) = (x+5)(x-2)$$

$$\sqrt{\dots} = 2(x-2)$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4(x^2 - 4x + 4) = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 - 16 = 0 \quad x^3 - 4x^2 + 9$$

$$1 - 4 - 16 = 0 \quad 1 - 4 \quad 0 \quad -16 \quad 9$$

$$8 - 1 - 4$$

$$3 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \quad 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$25 + 8 = 33$$

$$\frac{7 + \sqrt{13}}{2} = \frac{7 + 3.5}{2} = \frac{10.5}{2} = 5.25$$

$$10 \cdot 2.25 = 22.5$$

$$N3 \quad \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$4 - 16 - 4 = 0 \quad 16 \quad 25$$

$$x^2(x-4)(x+4) + 25$$

$$x^3 - 16x + 25 = 0$$

$$4 \quad 0 \quad -16 \quad 25$$

$$-5 \quad 1 \quad -5 \quad 9 \quad -20$$

$$x = 2$$

$$8 - 32 + 25 = 1$$

N4 $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3(x+1) + 7 \geq 0$

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & -1 & 2 & 6 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ & & \nearrow & & & & & \end{array}$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 7 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 7$$

$$\begin{array}{cccccc} 6 & -5 & -4 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 6 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 6 & 1 & -3 & -1 \end{array}$$

$$-\frac{1}{6} \quad 6 \quad 0 \quad -3 \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad 6 \quad 4 \quad -1$$

$$-\frac{1}{2} \quad 6 \quad -2 \quad -2 \quad 1$$

$$6x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

N5

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 7000 = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7$$

1° ~~определим~~

$$\frac{8!}{3!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 7}{1} = 14 = 20 \cdot 56 = 7020$$

$$\frac{3,5}{6} \rightarrow \frac{1-3,5}{6} = -\frac{2,5}{6}$$

$$\frac{3,5+1}{6} = \frac{4,5}{7}$$

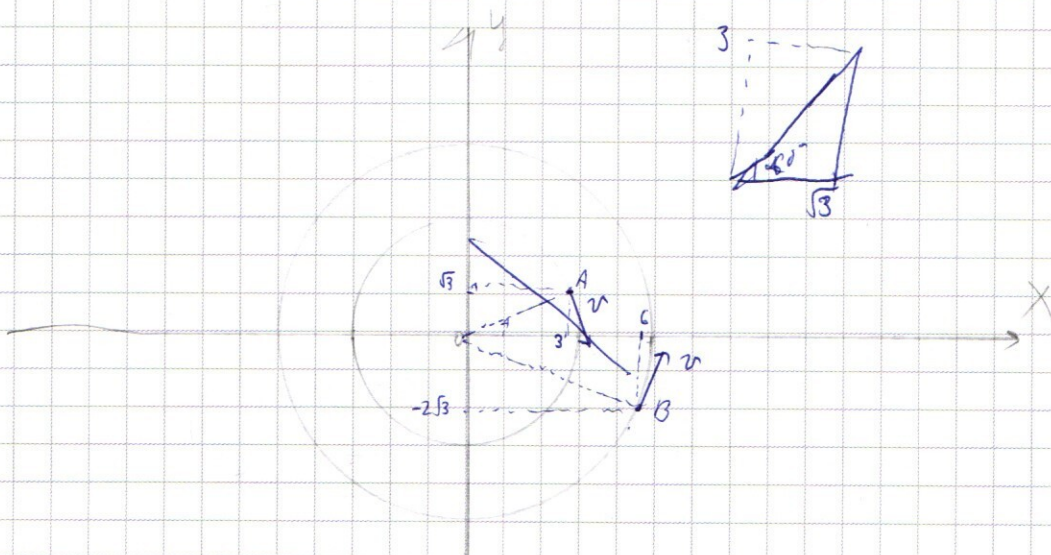
$$\frac{4,5}{7} - 3,5 = -2,5$$

$$\begin{array}{r} \times 7120 \\ 3 \\ \hline 3360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 7120 \\ 50 \\ \hline 5600 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1



$$R_1 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 12$$

$$R_2 = \sqrt{3^2 + 12} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 12$$

$$\omega_1 = v/R_1 = \frac{v}{2\sqrt{3}}$$

$$\omega_2 = v/R_2 = \frac{v}{3\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ$$

$$\alpha_{12} = 120^\circ$$

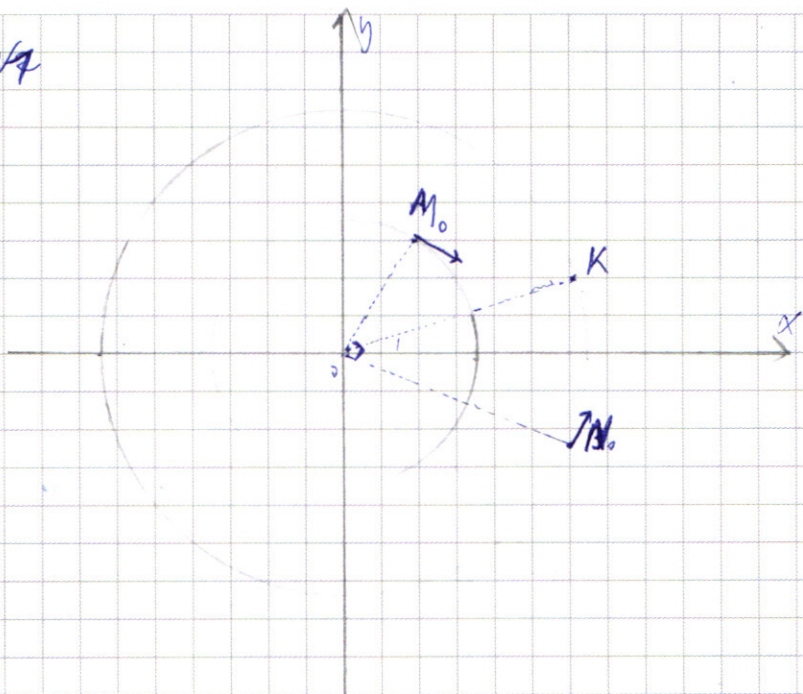
$$t = \frac{\alpha_{12}}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{120^\circ}{\frac{v}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{3\sqrt{2}}} = \frac{120^\circ}{v \left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6\sqrt{6}} \right)} = \frac{120^\circ}{v \left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{6}} \right)}$$

1) для скорости

$$\Delta \alpha_2 = \omega_2 t = \frac{v}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{120^\circ}{v \left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{6}} \right)} = \frac{120^\circ}{\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}} = \frac{120^\circ}{\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{32\sqrt{3}}}$$

$$\alpha_{22} = \alpha_2 + \Delta \alpha_2 = 60^\circ + \frac{120^\circ}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot 32\sqrt{3}$$

№7



~~A(5; 3)~~ $M_0(5; 3), N_0(6; -2\sqrt{3})$

$\angle M_0 OX = \arctg \frac{3}{5} = 30^\circ \Rightarrow \angle M_0 O N_0 = 90^\circ$

$\angle N_0 OX = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{6} = 30^\circ$

$OM_0 = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$ON_0 = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{2}$

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 12$

$(x-6)^2 + (y+2\sqrt{3})^2 = 48$

$\omega_1 = v/OM_0 = \frac{v}{2\sqrt{3}}$

$\omega_2 = v/ON_0 = \frac{v}{4\sqrt{2}}$

$\alpha = 75^\circ$

$\omega_1 = \omega_2$

$\alpha = 75^\circ$
 $\frac{y}{x} = \tg 75^\circ$

$\sin 75^\circ = \sin 30^\circ$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$

$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-4+4\sqrt{3}-3}{4}} = \frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$

$\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

$\sin 75^\circ$
 $\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ}$

$\frac{1}{4t} = \sqrt{1-t^2}$

$\frac{1}{4t} = \sqrt{1-t^2}$

$\frac{1}{16t^2} = 1-t^2$

$16t^2 - 16t^4 - 1 = 0$

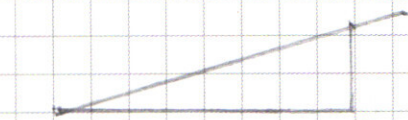
$16t^4 - 16t^2 + 1 = 0$

$D = 256 - 64 = 192 = 64 \cdot 3$

$t_{1,2} = \frac{16 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$

$t = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$= 3 \cdot \sqrt{0.7} \approx 3 \cdot 0.83 = 2.49$



$x^2 + y^2 = 12$
 $x^2 + y^2 = 48$

$\frac{y^2}{x^2} = \frac{12}{x^2} - 1$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{48}{x^2} - 1$

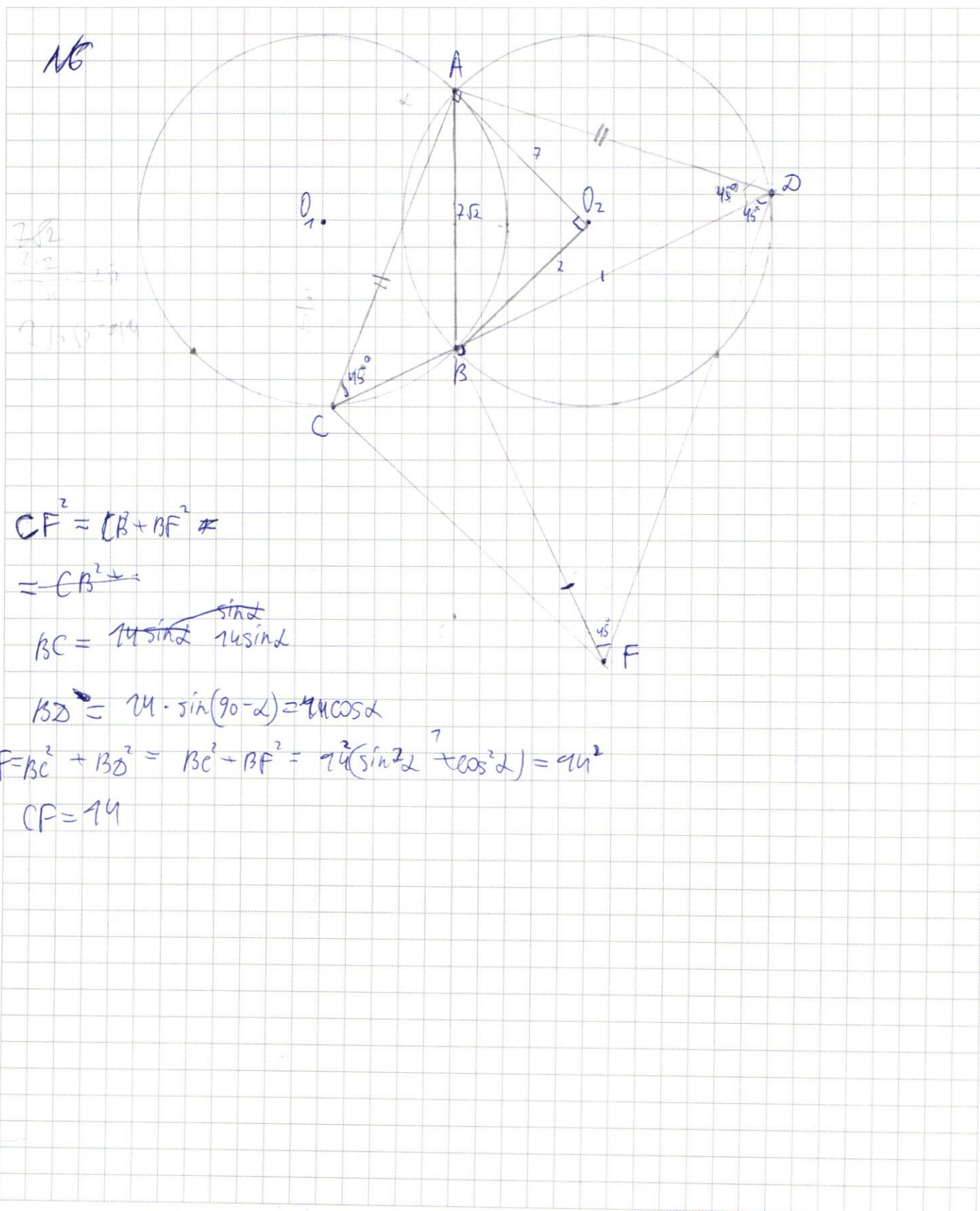
$x = y \cdot \operatorname{arcsin} 75^\circ$

$y_K = \sin 75^\circ \cdot OK = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

$x_K = \cos 75^\circ \cdot OK = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ ((x-5)^2 + (y-2)^2 = 769 \end{cases}$$

$$x+y = -(x-y) \quad -15 \leq x+y \leq 5$$

$$2x = -2y \quad -15 \leq x-y \leq 5$$

$$x = -y$$

$$-30 \leq 2x \leq 10$$

$$-15 \leq x \leq 5$$

$$\text{let } x+y = t$$

$$-15+t \leq x-y \leq 10-t$$

$$x-y \leq t-5$$

N40

$$1) x+y+5 + x-y+5 \leq 10$$

$$x \leq 0$$

$$2) x+y+5 - x-y-5 \leq 0$$

$$y \leq 5$$

$$3) -x-y-5 + x+y+5 \leq 10$$

$$y \geq -5$$

$$4) -x+y-5 - x-y-5 \leq 10$$

$$-x-y-5 - x+y-5 \leq 10$$

$$2x \geq -20$$

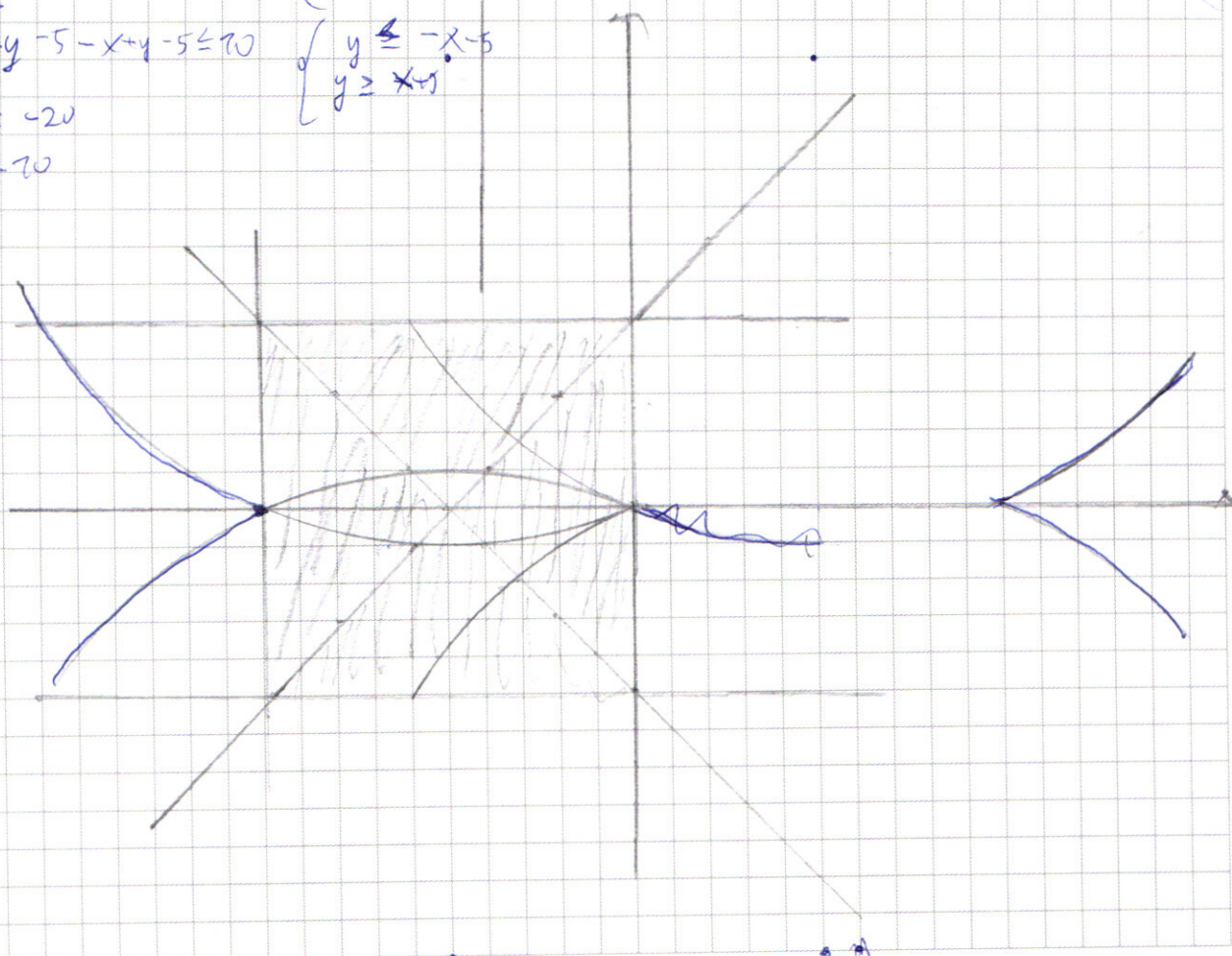
$$x \geq -10$$

$$\begin{cases} x+y \geq 5 \\ x-y \geq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

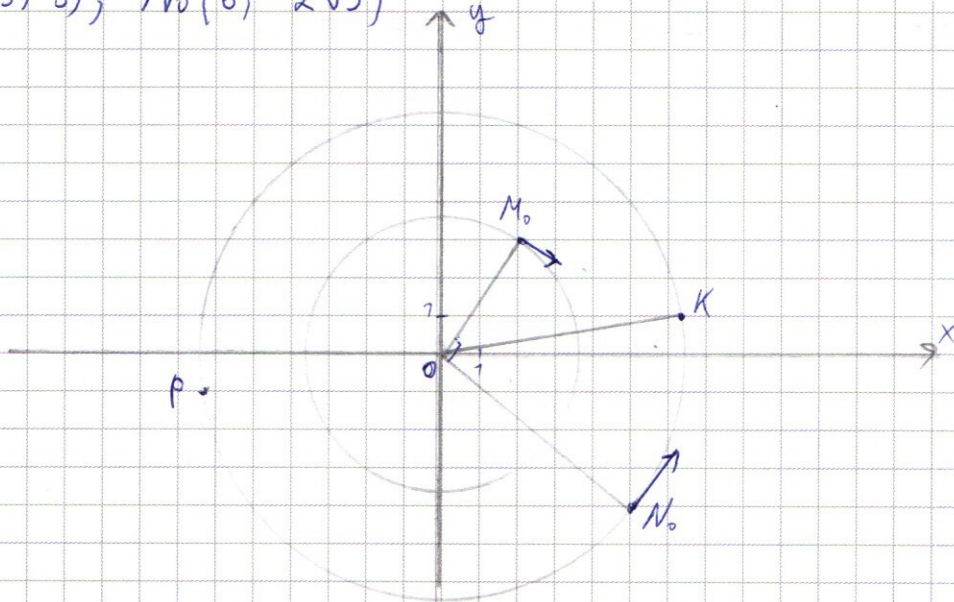
$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $M_0(\sqrt{3}; 3)$, $N_0(6; -2\sqrt{3})$



$$\angle M_0 O X = \arctg \frac{3}{\sqrt{3}} = 60^\circ$$

$$\angle N_0 O X = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{6} = 30^\circ \Rightarrow \angle M_0 O N_0 = 90^\circ$$

~~Если они~~

$$OM_0 = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$$

$$ON_0 = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{2}$$

Если они и скаляр летели с один. линейными скор., то со временем они встретились бы во всех точках $\Rightarrow$ у них одинаковая угловая скорость $\Rightarrow$ они пройдут $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ до первой встречи $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если скаляр в т. К в первой встрече то $\angle KOX = 15^\circ$

$$y_K = OK \sin 15^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 2\sqrt{3}-2$$

$$x_K = OK \cdot \cos 15^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 2\sqrt{3}+2$$

Следующая встреча в силу равенства уг. скор. симм. относ. начала коорд. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_P = 2-2\sqrt{3}, \quad x_P = -2\sqrt{3}-2$$

$$\text{Ответ: } (2\sqrt{3}+2; 2\sqrt{3}-2), (-2\sqrt{3}-2; 2-2\sqrt{3})$$

$$\text{№2} \quad \begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

П.к. беск. много решений, то прямые совпадают $\Rightarrow$ их коэф. пропорциональны $\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{6}{(a-b)b} = \frac{a}{1}$

Очевидно что при $b=0$ нет решений, при $a=b$ их не беск.

$$\begin{cases} 2(a-b)^2b = 18b \\ 2(a-b) = 3ab \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b-3)(a-b+3) = 0 \\ 2(a-b) = 3ab \end{cases}$$

$$1^\circ a-b-3=0$$

$$a=b+3, a-b=3$$

$$b(b+3)=2$$

$$b^2+3b-2=0$$

$$D=17$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2^\circ a-b+3=0$$

$$a=b-3, a-b=-3$$

$$b(b-3)=-2$$

$$b^2-3b+2=0$$

$$D=1$$

$$b_{3,4} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2; 1 \Rightarrow a_{3,4} = -1; -2$$

$$\text{Ответ: при } \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right), (-1; 2), (-2; 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N3 \quad \frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x^3 - 76x + 25} = x^2 + 3x - 70$$

разложим $x^2 + 3x - 70$

$$x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$D = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5; 2 \Rightarrow (x+5)(x-2)$$

$$\frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x^3 - 76x + 25} = (x+5)(x-2)$$

1° $x = -5$ — не подходит в вып-е под корнем

$$2^\circ x \neq -5$$

$$x^3 - 76x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

система Жорнера

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

★ Ответ: $x = 3; \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$N4 \quad 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$$1^\circ \quad x \geq -1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$6 \quad -5 \quad -4 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 6 \quad 1 \quad -3 \quad -1 \quad 0$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$6 \quad 1 \quad -3 \quad -1$$

$$-\frac{1}{2} \quad 6 \quad -2 \quad -2 \quad 0$$

$$6x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$2^\circ \quad x \leq -1$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

при $x \leq -1$ нер-во всегда верно

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

1° 1 единица $\Rightarrow$ цифры: 1 ед., 3 дв., 3 пят., 1 сем.

$$\frac{8!}{3! 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 1120$$

2° 2 единицы $\Rightarrow$ цифры: 2 ед., 1 дв., 1 четв., 3 пят., 1 сем.

$$\frac{8!}{2! 3!} = 3360$$

3° 3 единицы $\Rightarrow$ цифры: 3 ед., 3 пят., 1 сем., 1 восьм.

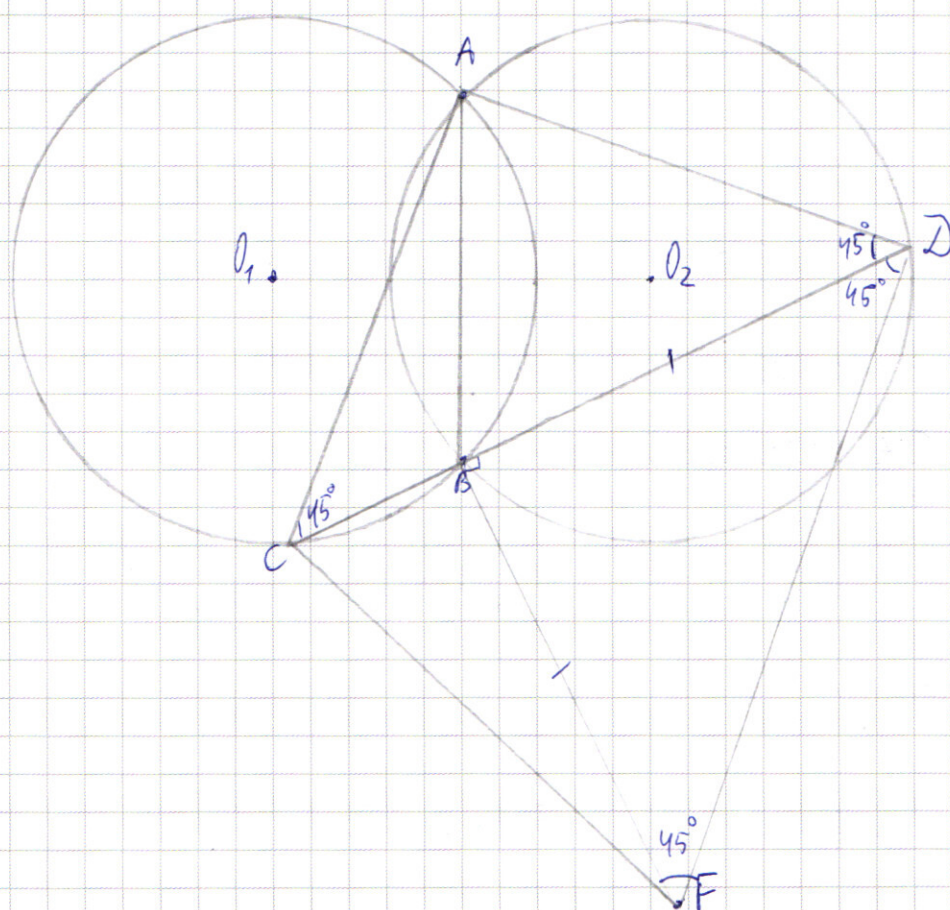
$$\frac{8!}{3! 3!} = 1120$$

~~Ответ~~ Всего $1120 + 3360 + 1120 = 5600$

Ответ: 5600

AG

N°6 Дано: окр.-ми $R=7$, перес. в м. A, B , $\angle CAD=90^\circ$



П.к. окружности равны, то их дуги $\cup AB$ также равны и
 $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \angle ADB = \frac{1}{2} \cup AB \Rightarrow \triangle ACD - \text{п/ч, п/б, } \angle ADB = \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AO_2B = 90^\circ \Rightarrow \text{из теор. Птоп. } AB = 7\sqrt{2}$

$\square \angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = \alpha$

Теорема синусов для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} \Rightarrow BC = \frac{7\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin 45^\circ} BC = 14 \sin \alpha$$

$$BD = 2R \sin \angle BAD \Rightarrow BD = BF \text{ п.к.} = 14 \sin(90^\circ - \alpha) = 14 \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{14^2 \sin^2 \alpha + 14^2 \cos^2 \alpha} = 14$$

Ответ: $CF = 14$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ ((x|-5)^2 + (y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

решить графически

4 2 ур-е: нужно построить окр-ть $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$ в первом квадранте ($x > 0, y > 0$) и симм. отобразить относ. осей ординат, абсцисс и начала координат.

4 1 пер-во

$$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ x-y \geq -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$x+y+5+x-y+5 \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

$$x+y+5-x+y-5 \leq 10$$

$$y \leq 5$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

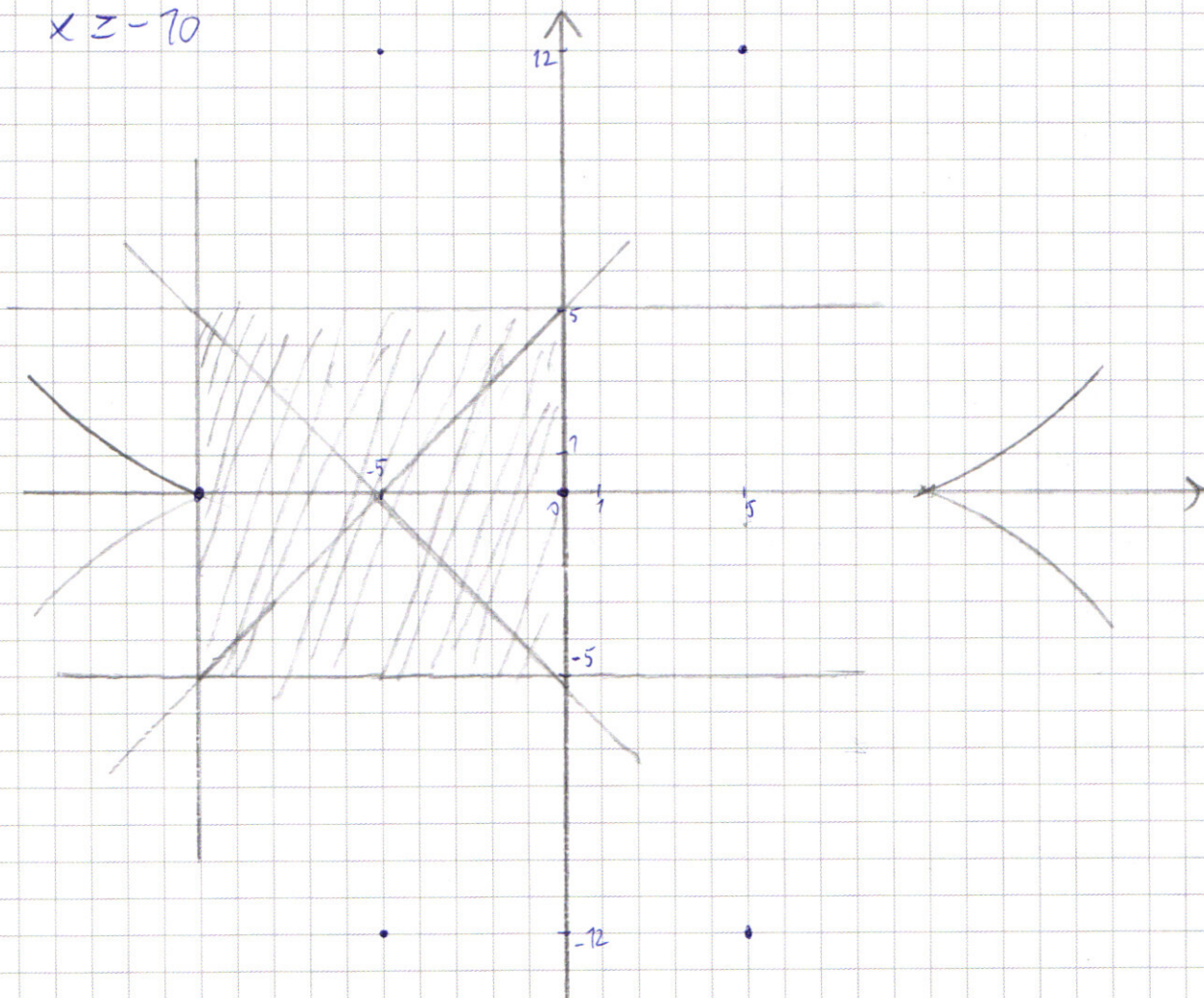
$$-x-y-5+x-y+5 \leq 10$$

$$y \geq -5$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

$$-x-y-5 \leq -x+y-5 \leq 10$$

$$x \geq -10$$



Видно что дуги касаются квадрата в т. $(-10; 0) \Rightarrow$ и $(0; 0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ это ответ задачи

Ответ: $(-10; 0), (0; 0)$