

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

Оба уравнения — уравнения прямых. ^{координаты} ~~и~~ ^{ск} общие точки этих прямых будут являться решениями системы. Бесконечное множество решений будет только в случае совпадения этих прямых.

$$\begin{cases} y = -\frac{a+b}{4}x + \frac{a}{12} \\ y = -\frac{4}{a+b}x + \frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

коэффициенты перед x и свободные члены должны быть пропорциональны

$$\begin{cases} -\frac{a+b}{4} = -\frac{4}{a+b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

Доп: $a+b \neq 0$
 $b \neq 0$

если $a+b=0$, то

$$\begin{cases} 12y = a \\ 4bx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{12} \\ x = \frac{1}{4b} \end{cases}$$

решение

если $b=0$, то

~~$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ (a+b)ab = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{b}$$

$$\frac{3}{b} + b = 4$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

или

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{b}$$

$$-\frac{3}{b} + b = -4$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0$$

~~$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 0+0 = 1 \end{cases}$$

$$b_1 = 3, b_2 = 1$$

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$b_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{4}}{2} = -2 + \sqrt{4}$$

$$b_2 = -2 - \sqrt{4}$$

$$a_1 = -2 - \sqrt{4}$$

$$a_2 = -2 + \sqrt{4}$$

Ответ: $(3; 1), (1; 3), (-2 - \sqrt{4}; -2 + \sqrt{4}), (-2 + \sqrt{4}; -2 - \sqrt{4})$
 $\sqrt{5}$

Разложу 1400 на простые множители

$$1400 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 7$$

Всего 6 ~~простых~~ простых множителей.

Это значит, что в 8-значном числе будет минимум 2 единицы.

$$5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Но $2 \cdot 2 = 4$, а 4 - цифра, значит доступен случай

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, 8 - цифра, значит доступен случай

$$5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Остальные возможные перемножения будут давать произведения больше 9, а они уже не будут цифрами.

Значит всего 3 случая.

Буду пользоваться формулой $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_n!}$

1) Всего 8 цифр, 1 повторяется 2 раза, 2 повт. 3 раза, 5 повт. 2 раза

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1680$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Всего 8 цифр, 1 повт. 3 раза, 5 повт. 2 раза

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$$

3) Всего 8 цифр, 1 повт. 4 раза, 5 повт. 2 раза

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$$

$$1680 + 3360 + 840 = 5880$$

Ответ: 5880

57.

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$1) |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\text{Обозначу } x-3-y = \underline{I}, x-3+y = \underline{II}$$

$$\underline{I} = 0, \underline{II} = 0$$

Линии $\underline{I}=0$ и $\underline{II}=0$ разбивают плоскость на 4 части и в зависимости от того, в какой части плоскости находится точка, меняются знаки в функциях $\underline{I}=0$ и $\underline{II}=0$

Рассмотрю 4 случая:

$$1) \underline{I} < 0, \underline{II} < 0$$

$$-x+3+y -x+3-y \leq 6$$

$$\begin{aligned} -2x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$2) \underline{I} < 0, \underline{II} > 0$$

$$\begin{aligned} -x + 3 + y + x - 3 + y &\leq 6 \\ y &\leq 3 \end{aligned}$$

$$3) \underline{I} > 0, \underline{II} > 0$$

$$\begin{aligned} x - 3 - y + x - 3 + y &\leq 6 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

$$4) \underline{I} > 0, \underline{II} < 0$$

$$\begin{aligned} x - 3 - y - x + 3 - y &\leq 6 \\ y &\geq -3 \end{aligned}$$

$$2) \boxed{(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25}$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Окружность с центром в точке (3; 4) с радиусом 5

и $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$ — эта окружность отображенная относительно осей O_x и O_y

Графики пересекаются в точках (0; 0), (5; 0). Проверить подстановкой.
Ответ: (0; 0); (5; 0).

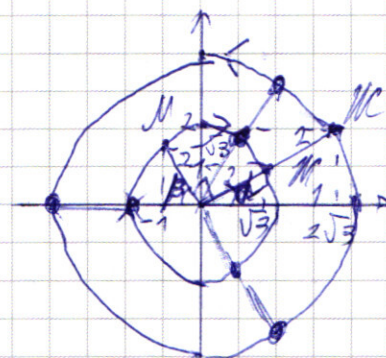
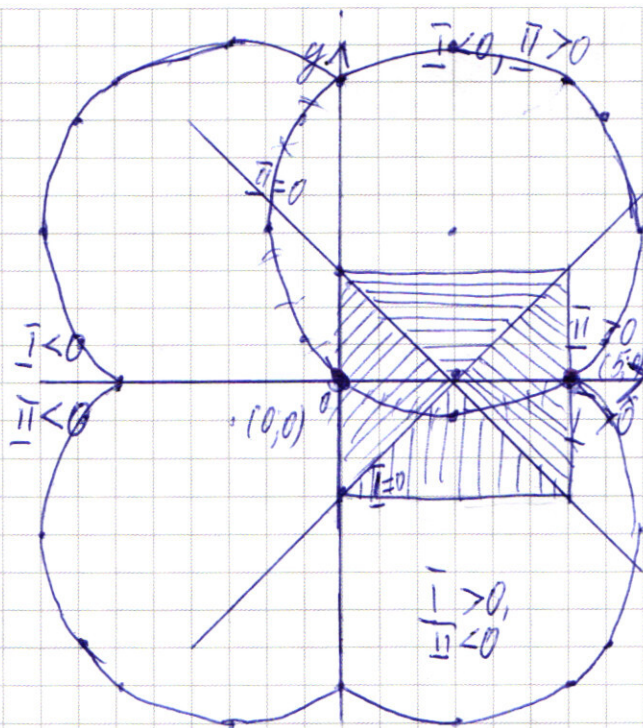
51.

Найдем радиусы окружностей по которым движется муравей и пчел

$$R_{\mu} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$R_{\text{п}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

Наибольшее расстояние между насекомыми достигается, когда



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

шаров и пук находятся на одной радиусе большей окружности.
Проведя пук на маленькую окружность и проводя проекцию на M ,
Точка M будет двигаться с вдвое меньшей скоростью
и ~~координаты~~ M координаты вдвое меньше координат Пука,
т.е. радиусы отличаются вдвое.

$$M(2\sqrt{3}; 2)$$

$$M_1(\sqrt{3}; 1)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Между M и M_1 дуга равная $180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

$\frac{\omega_M}{\omega_{M_1}} = \frac{1}{1}$, значит когда M и M_1 столкнутся, они

будут делить дугу в отношении $2:1 = 60^\circ:30^\circ$

Тогда можно найти координаты первой встречи

$$y_1 = \sin(\alpha + 30^\circ) \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$x_1 = \cos(\alpha + 30^\circ) \cdot 2 = 1$$

$$M_1(1; \sqrt{3}) \Rightarrow M = (2; 2\sqrt{3})$$

Затем расчет дуги по которой ~~они~~ должны будут пройти
до встречи будет равен 360° и они опять x поделит
ее в отношении $2:1 = 240^\circ:120^\circ$

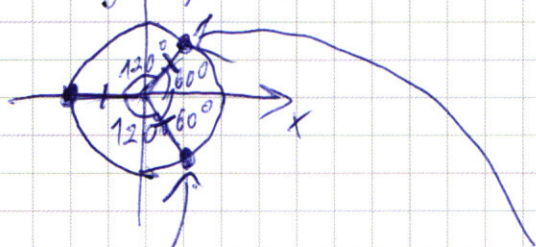
$60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow M_1$ будет лежать на оси Ox , значит $y_2 = 0$,



$$x_2 = -2$$

$$M_1(-2; 0) \Rightarrow \underline{M(-4; 0)}$$

После M_1 и M опять пройдут друг в 360° , и M_1 опять пройдет 120°



симметрична ~~точке~~ точке 1 ~~относительно~~ относительно оси Ox ,
значит $x_3 = x_1, y_3 = -y_1$

$$M_1(1, -\sqrt{3}) \Rightarrow \underline{M(2, -2\sqrt{3})}$$

Затем пройдя ещё 120° M_1 придёт в точку первой ^{встречи}
потому что $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, и ~~отт.~~ с этого момента
путь замкнётся.

Ответ: $M(2, 2\sqrt{3}), M(-4, 0), M(2, -2\sqrt{3})$
53.

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Умножить~~

Если $x = -3$, то $0 = 0$

Если $x \neq -3$, то

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$x^3 - x + 10 = (x + 2)^2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\left(x + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) (x - 2) = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x = 2$$

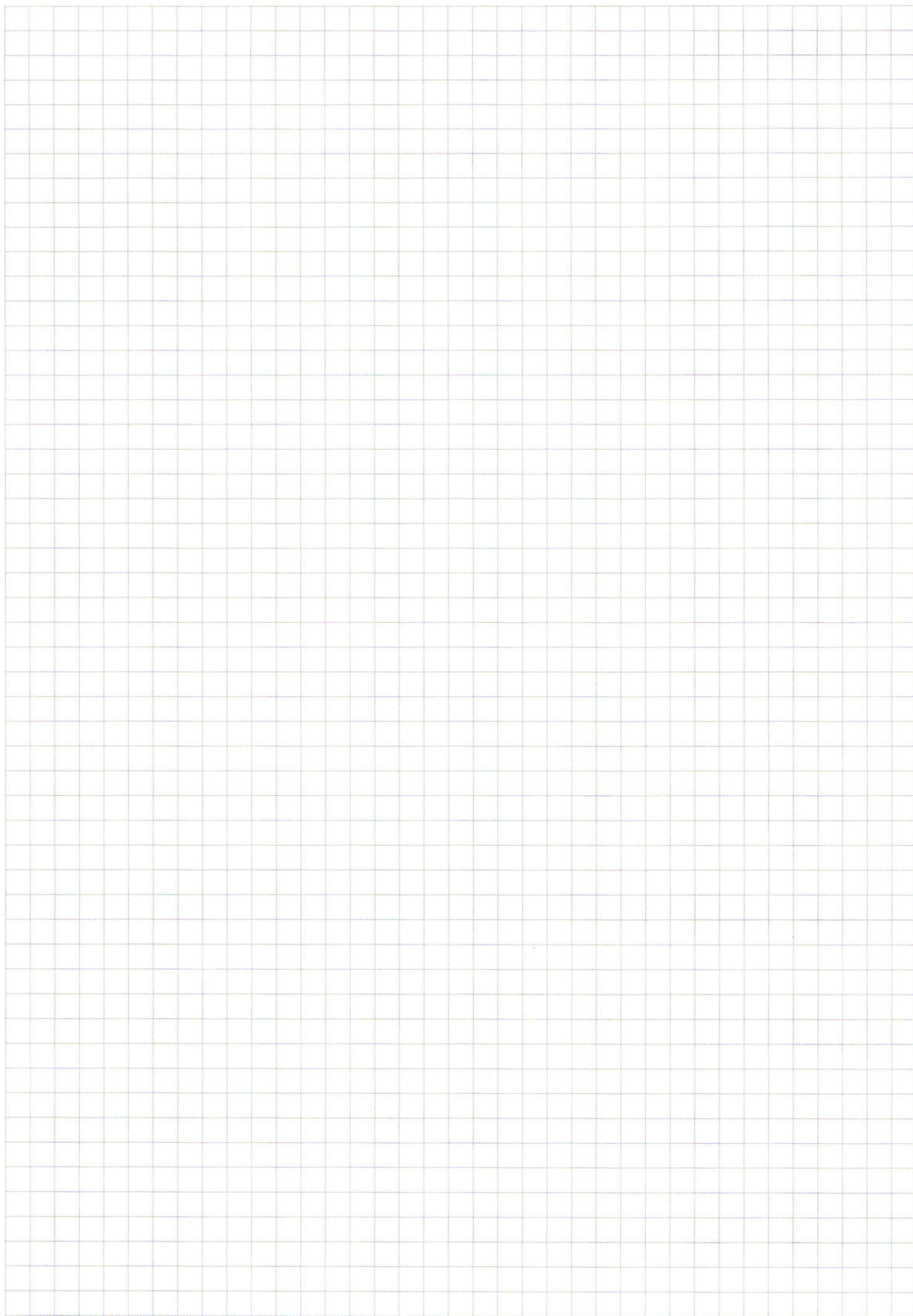
Ответ: $-3, 2, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$
✓ 4

1) $x \geq 0$
 $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + (x - 1)^2 \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(a+b)ab = 12$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = 4, \quad a+b = -4$$

$$ab = 3, \quad ab = -3$$

$$\frac{3}{b} + b = 4$$

$$3 + b^2 = 4b$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$b = 1, 3$$

$$\frac{-3}{b} + b = -4$$

$$-3 + b^2 = -4b$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$D = 28$$

$$b_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{2} = -2 + \sqrt{7}$$

$$b_2 = -2 - \sqrt{7}$$

$$a_1 = -2 - \sqrt{7}$$

$$a_2 = -2 + \sqrt{7}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 / x - 1 / + 1 \geq 0$$

$$1) x \neq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

$$2x^3(x-1) - x^3 + 3x^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + x - 1) - x^2(x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x - 1 \overline{) 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1} \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \\ 6x^2 - 1 \\ \underline{6x^2 - 18x} \\ 17x - 1 \end{array}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 48$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^2 - 3x^3 + (x-1)^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\quad}_{\geq 0} \quad \underbrace{\quad}_{\geq 0} \quad \underbrace{\quad}_{\geq 0}$$

$$2x^4 + 3x^2(x-1) + (x-1)^2 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)(x-1-3x^2) \geq 0$$

$$-3x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + (x-3)(x-2)$$

$$x^2(x-2) + (x-3)(x-2)$$

$$(x^2 + x - 3)(x-2) = 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$1 + 12 = 13$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2(x-1) \geq 0$$

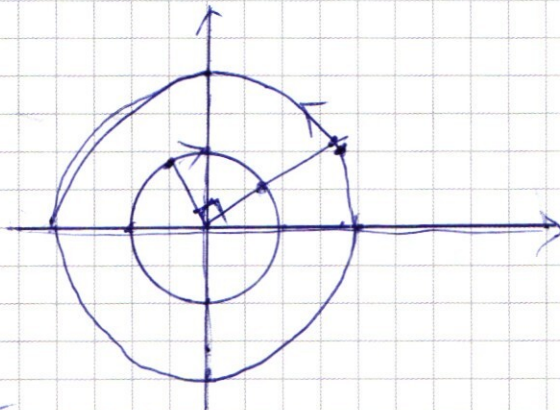
$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{2x^4 + (x-1)^2}{3x^2} \geq x-1$$

$$\frac{-2x^4 - (x-1)^2}{3x^2} \leq x-1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2\pi r$$

$$4\pi$$

$$8\pi$$

$$\frac{2\pi}{1}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 16$$

$$\frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = -(x+3)(x+2)$$

$$y = \frac{a}{12}$$

$$12y = a$$

$$46x = 1$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^2+y^2=16$$

$$0.23$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$x^3$$

$$x^2(x-1)-5(x-1)+10=0$$

$$x^2+y^2=4$$

$$2x^2+4y^2=16$$

$$(x^2-5)(x-1)=-1$$

$$x^2+y^2=16$$

$$1400 \mid 10 \mid 2.5$$

$$140 \mid 10 \mid (2.5)$$

$$14 \mid 2$$

$$4 \mid 4$$

$$1$$

$$2 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8$$

$$9 \cdot 2 \cdot 40 = 1680$$

$$2 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$3! \cdot 2! \cdot 2!$$

$$2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & 240 \cdot 4 \end{cases}$$

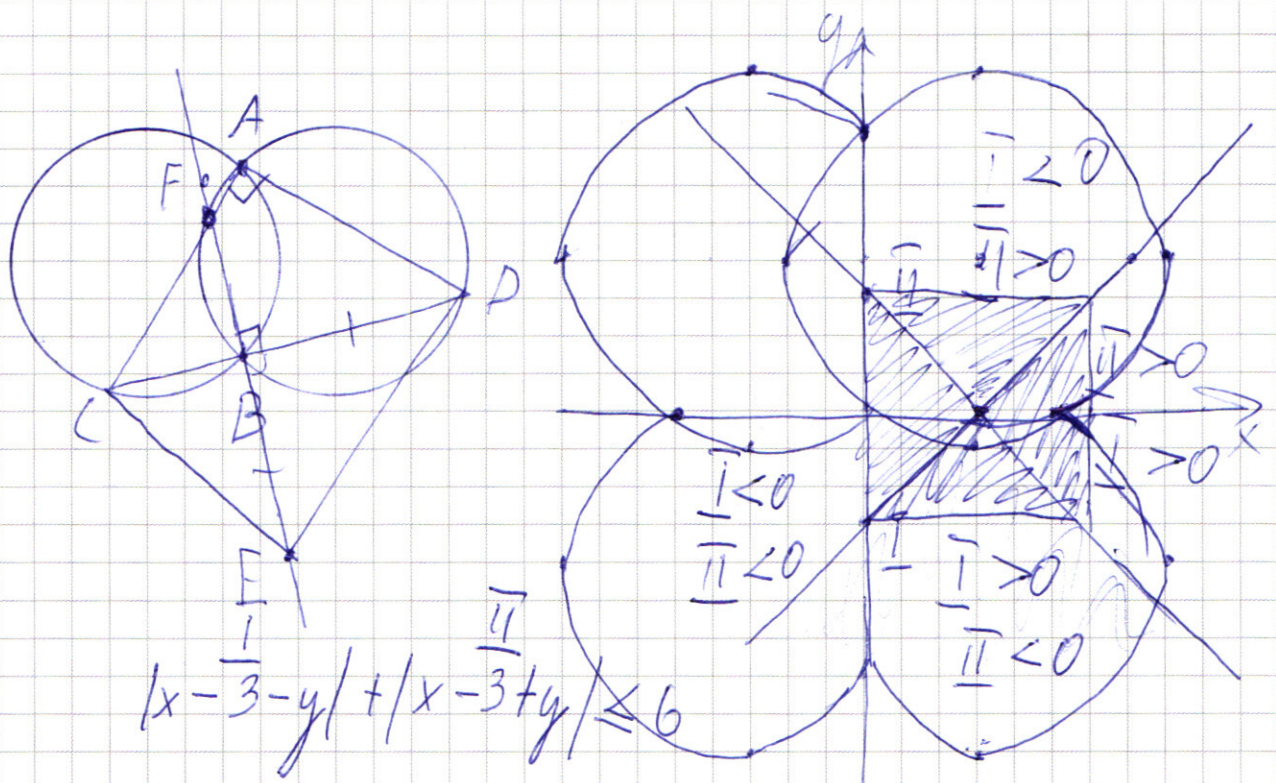
$$\begin{cases} 46x + (a+b)6y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{12} - \frac{a+b}{4}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a+b}{4} - \frac{4}{a+b}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)6} \\ \frac{a+b}{4} = \frac{4}{a+b} \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + 2x^4$$



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\begin{aligned} x-3-y < 0 & \quad y > x-3 \\ x-3+y < 0 & \quad y < 3-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x-3 \\ y &= 3-x \end{aligned}$$

$$y+3-x+3-x-y \leq 6$$

$$6-2x \leq 6$$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$-x+3+y+x-3+y \leq 6$$

$$\begin{aligned} 2y &\leq 6 \\ y &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\leq 3 \\ y &\geq -3 \\ x &\geq 0 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

$$-x+3+y-x+3-y \leq 6$$

$$-2x+6 \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x-3-y-x+3-y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$x-3-y+x-3+y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{aligned} 3(a+b)x + \frac{12}{(a+b)b} &= a \\ x &= a- \end{aligned}$$

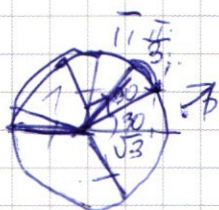
$$\begin{aligned} \frac{3}{-2+\sqrt{4}} & \quad \frac{3}{2-\sqrt{4}} = a \\ (-2-\sqrt{4})(-2+\sqrt{4}) & \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - x + 10 = (x+2)^3$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$4\pi$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x + 10 : x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 3x + 10 \\ \underline{3x + 6} \\ 4 \end{array}$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 3) + 4$$

$$(x+2)(x^2 - 3x + 1) + 4 = 0$$

