

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

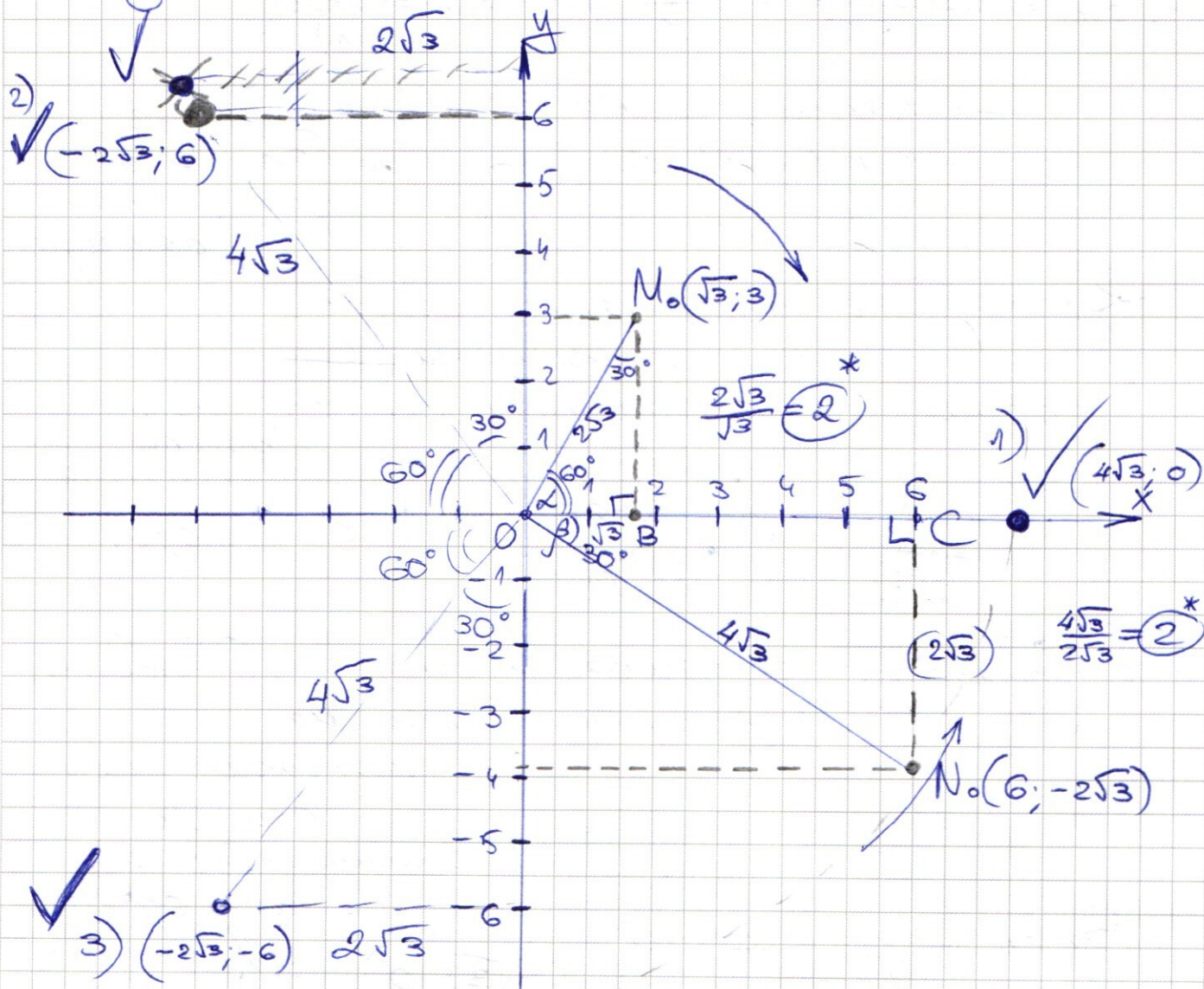
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 51.



Мы можем посчитать радиусы, окружностей,
по которым летят птицы:

$$r_{\text{синусы}} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$r_{\text{Сферы}} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

→ сп-но, углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$

* Заметим,
что в $\triangle OM_0B$ и
 $(n/y) \triangle OCN_0$
 (n/y)
есть катеты,
равные $\frac{1}{2}$ гипотен.

$$l = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$$

(длина дуги.)

$$\frac{r_{\text{смер}}}{r_{\text{син}}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2$$

$$l_{\text{син}} = \frac{\pi r \cdot 60^\circ}{180} = \frac{\pi r}{3}$$

$$l_{\text{смер}} = \frac{2\pi r \cdot 30^\circ}{180} = \frac{\pi r}{3}$$

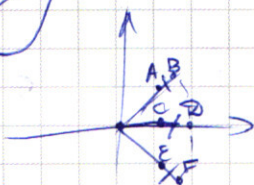
$$\left. \begin{aligned} l_{\text{син}} &= l_{\text{смер}} \\ (r_{\text{син}} &= r_{\text{смер}}) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

(по усл.)

→ значит, за ед. времени синица проходит в 2 раза больший угол, чем синица.

Кратчайшее расстояние между птицами

когда их координаты лежат на одной прямой с $O(0;0)$



$AB = CD = EF$ —
(кратчайшее расстояние)

Получается, следующая их встреча (собственно, и первая встреча) будет на положительной оси Ox

(т.к. синица пройдёт 30° ,
а синица — 60°)
отнош. $\frac{1}{2}$

Здесь координ. синица:

$$1) (4\sqrt{3}; 0)$$

по радиусу синица

В след. раз они встретятся через 240° синицы,
 120° — синица

(Можем посчитать: между синицей и встречей в II четв.: $Oy = 30^\circ$;
Координ. $(-2\sqrt{3}; 6)$!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

И ещё одна встреча — ещё через 120° и 240° синусы.

Встреча — в III четверти (+ аналог. при $\Delta c 30^\circ$) →

Считаем координаты: $(-2\sqrt{3}; -6)$!
(синусы 3)

(в след. раз)
Позже она встретится на месте
самой первой
встречи,
и всё повторится.

Ответ: все эти координаты синусы.

1) $(4\sqrt{3}; 0)$; 2) $(-2\sqrt{3}; 6)$; 3) $(-2\sqrt{3}; -6)$.

Задача №3

ОДЗ:

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$x^3-16x+25 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

Проверка ("5" как корня):

$$-125 + 80 + 25 = -20 < 0,$$

сл. не ув. ОДЗ.

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \quad | : (x+5) \quad (x \neq -5)$$

можем делить

$$x^2+3x-10=0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$(x-2)(x+5)=0$$

к $\sqrt{3} \dots$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x - 2$$

$$\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2x - 4 \quad \text{д.у. } x \geq 2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4(x - 2)^2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

применим
схему Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} x-3 & 1 & -4 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$
$$x = 3 \quad x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

1) $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ (не урв. д.у.)

2) $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$2 < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < 3 \quad \text{урв. д.у.}$$

и 2 $(33 - 32 > 0)$
и 3 $(27 - 48 + 25 > 0)$
урв. д.у. $\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ тоже

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 / |x+1| + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + (x^2 + 2x + 1) - 5x^2 / |x+1| \geq 0$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2 / |x+1| \geq 0$$

$$(4x^4 - 4x^2 / |x+1| + |x+1|^2) + (2x^4 - x^2 / |x+1|) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|)^2 + x^2(2x^2 - |x+1|) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|)(2x^2 - |x+1| + x^2) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|) \cdot (3x^2 - |x+1|) \geq 0$$

анализ

$$1) 2x^2 = |x+1|$$

$$4x^4 - (x+1)^2 = 0$$

$$(2x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$\Delta < 0$
р. нет

$$2) 3x^2 = |x+1|$$

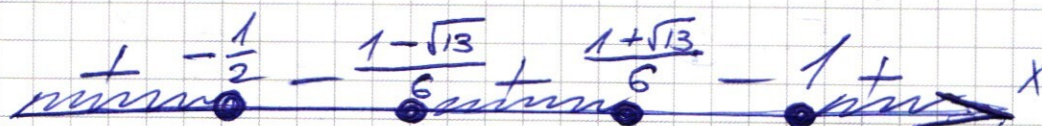
$$9x^4 - (x+1)^2 = 0$$

$$(3x^2 - x - 1)(3x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$\Delta < 0$,
(р. нет)



Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1; +\infty)$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{6} > \frac{2}{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{6} > -\frac{1}{2}$$

Задача 55

Разложим 7000 на простые множители:

$$7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 8 \cdot 125 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

Сл-но, 7000 может получиться из цифр:

1) 7, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 1. ✓

Но может быть ещё 2 варианта набора цифр

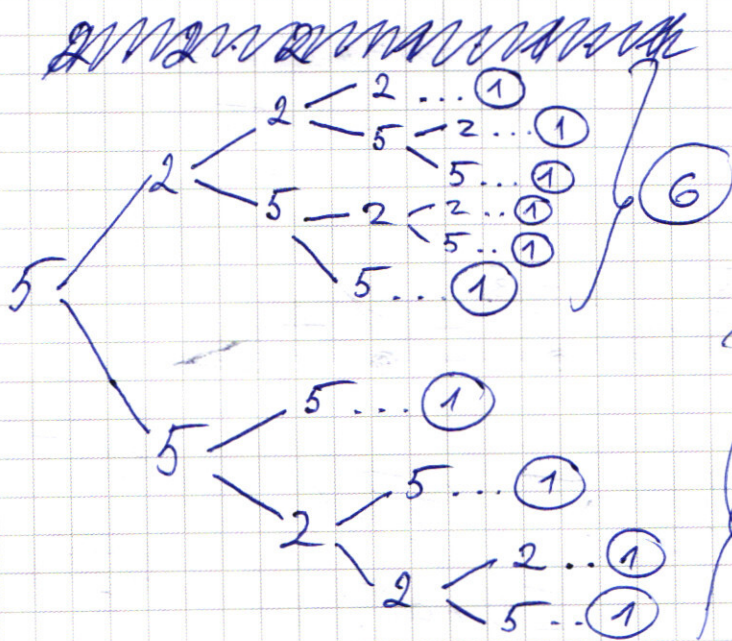
2) 7, 4, 2, 5, 5, 5, 1, 1 ✓

3) 7, 8, 5, 5, 5, 1, 1, 1 ✓

Т.к. мы можем перемножить некоторые двойки и получить однозначные числа.)

Рассмотрим набор 1:

Единица может стоять на любом из 8-и мест, тогда для 7 — остаётся 7 мест, а оставшиеся могут быть рассмотрены: (5, 5, 5, 2, 2, 2)



Аналог, для 2 (как перв. из цифр) 10 · 2 = 20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ Задача 55...

Таким образом:

8.7.20 ~~1000000~~ (вариантов)

4120

Вариантов

для набора Ω_1

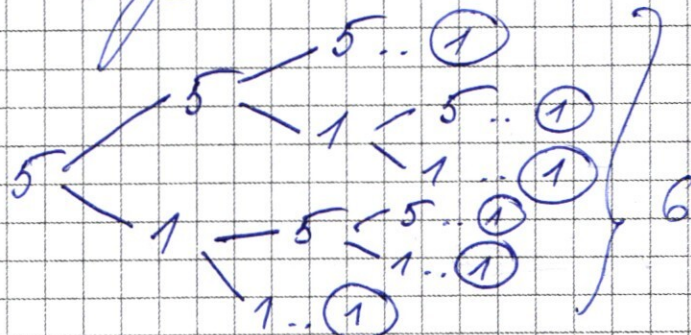
✓ Аналогичная ситуация для набора № 3
(там тоже 2 одиночных узелки.
и 2 "набора" по 3
одинаков.)

Для набора M_2 :

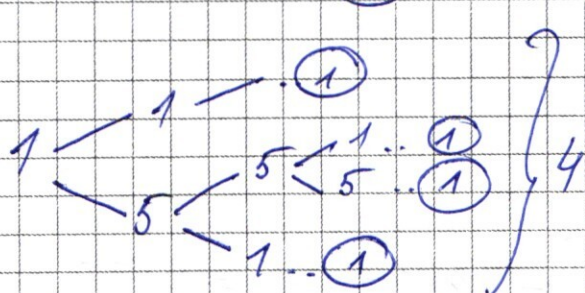
Для, например, семёрки: 7мест,
тогда для четвёрки (7)
то для двойки: 6

Как расстанется оставшийся?

5, 5, 5, 1, 1)



10 всего
для ост.



р. задаче 5.
Для

$$\text{набора 2): } 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 =$$

$$= 3360 \text{ (вариантов)}$$

Значит, всего:

$$\underbrace{1120 \cdot 2}_{\text{набор 1 и набор 3}} + \underbrace{3360}_{\text{набор 2}} = \underbrace{5600}_{\text{Вариантов (восьмизначных чисел)}}$$

$$\begin{array}{r} 2240 \\ + 3360 \\ \hline 5600 \end{array}$$

Ответ: 5600
восьмизначных чисел.

Задача 5.7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-2)^2 = 169 \end{cases}$$

Обратимся ко 2-ому ур-ию:

$$(|x|-5)^2 + (|y|-2)^2 = 169$$

$$x^2 - 10|x| + 25 + y^2 - 24|y| + 144 = 169$$

Сделаем замену:

$$|x| = a$$

$$|y| = b$$

$$a^2 - 10a + 25 + b^2 - 24b + 144 = 169$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

к задаче №7

$$a^2 - 10a + b^2 - 24b = 0$$

$$\frac{a^2}{4} = 25 - (b^2 - 24b) =$$

$$= -(b^2 - 24b - 25)$$

$$a = 5 \pm \sqrt{-(b^2 - 24b - 25)}$$

$$|x| = 5 \pm \sqrt{-(y+1)(y-25)}$$

Решим квадратное,
взяв за неизвестн. $\rightarrow a$

$$b^2 - 24b - 25 = 0$$

$$b = -1$$

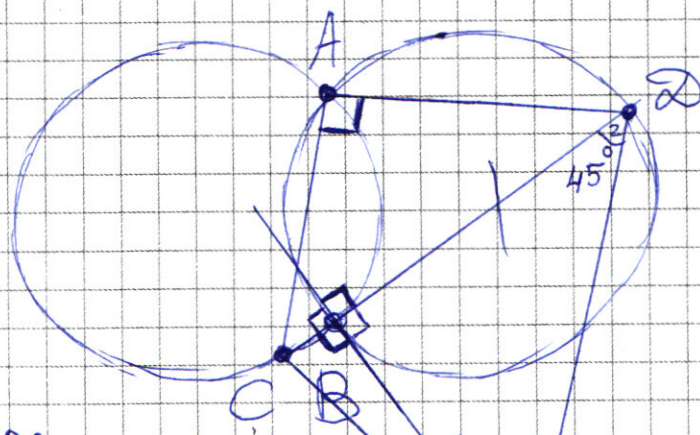
$$b = 25$$

$$(b+1)(b-25) = 0$$

$$1) \quad \left| \frac{5 + \sqrt{-(y+1)(y-25)}}{y+5} + \frac{5 + \sqrt{-(y+1)(y-25)}}{y+5} \right|$$

$$+ \left| \frac{5 + \sqrt{-(y+1)(y-25)}}{y+5} - \frac{5 + \sqrt{-(y+1)(y-25)}}{y+5} \right| \leq 10$$

Задача 56



Найти: CF

$$R = 7$$

д.н. FD →

→ ΔBDF - н/у (∠DBF = 90°)

BD = BF (по ус.)

по сн. ΔBDF - р/б + н/у,
сн. ∠1 = ∠2 = 45°

Задача 52

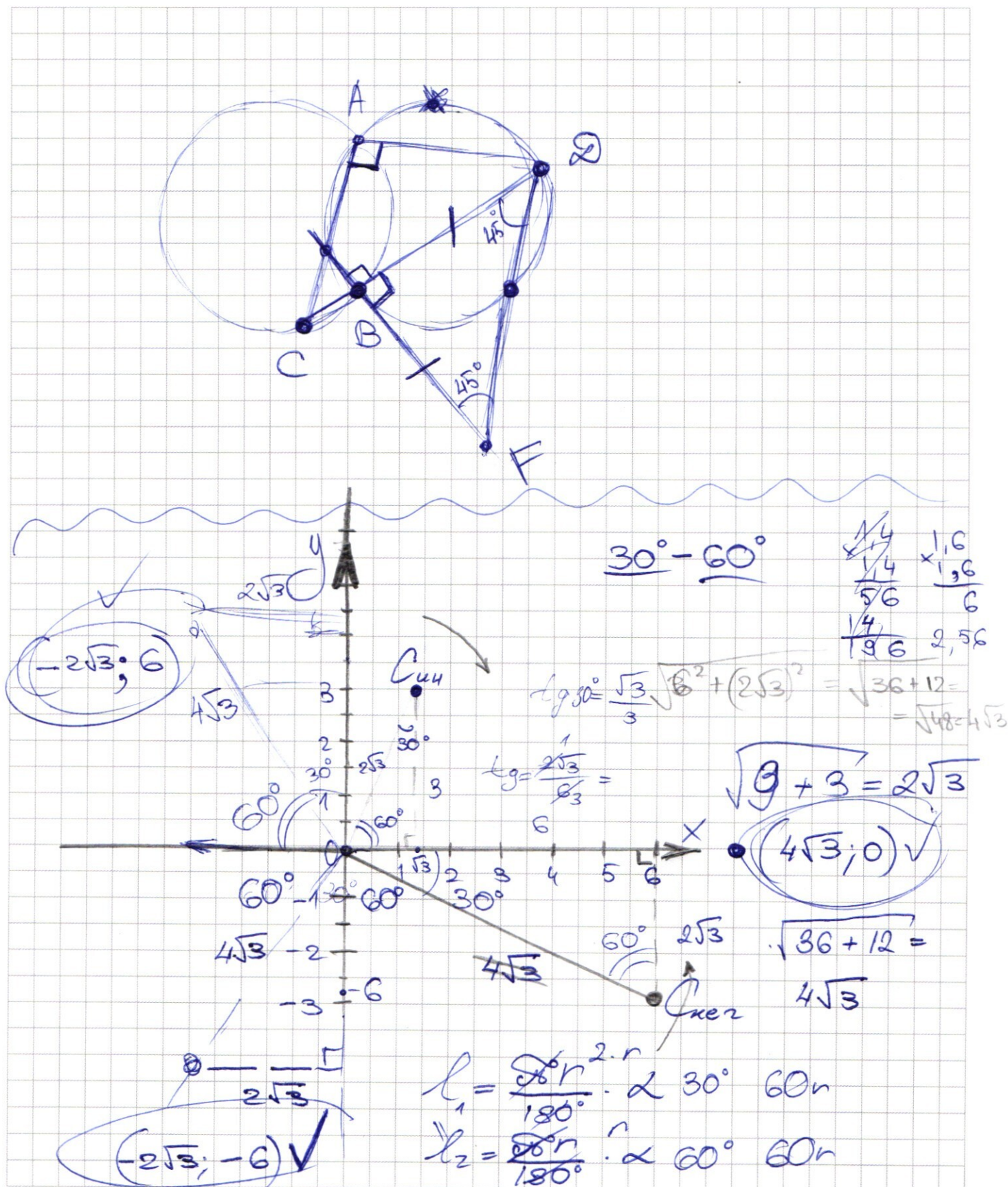
$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

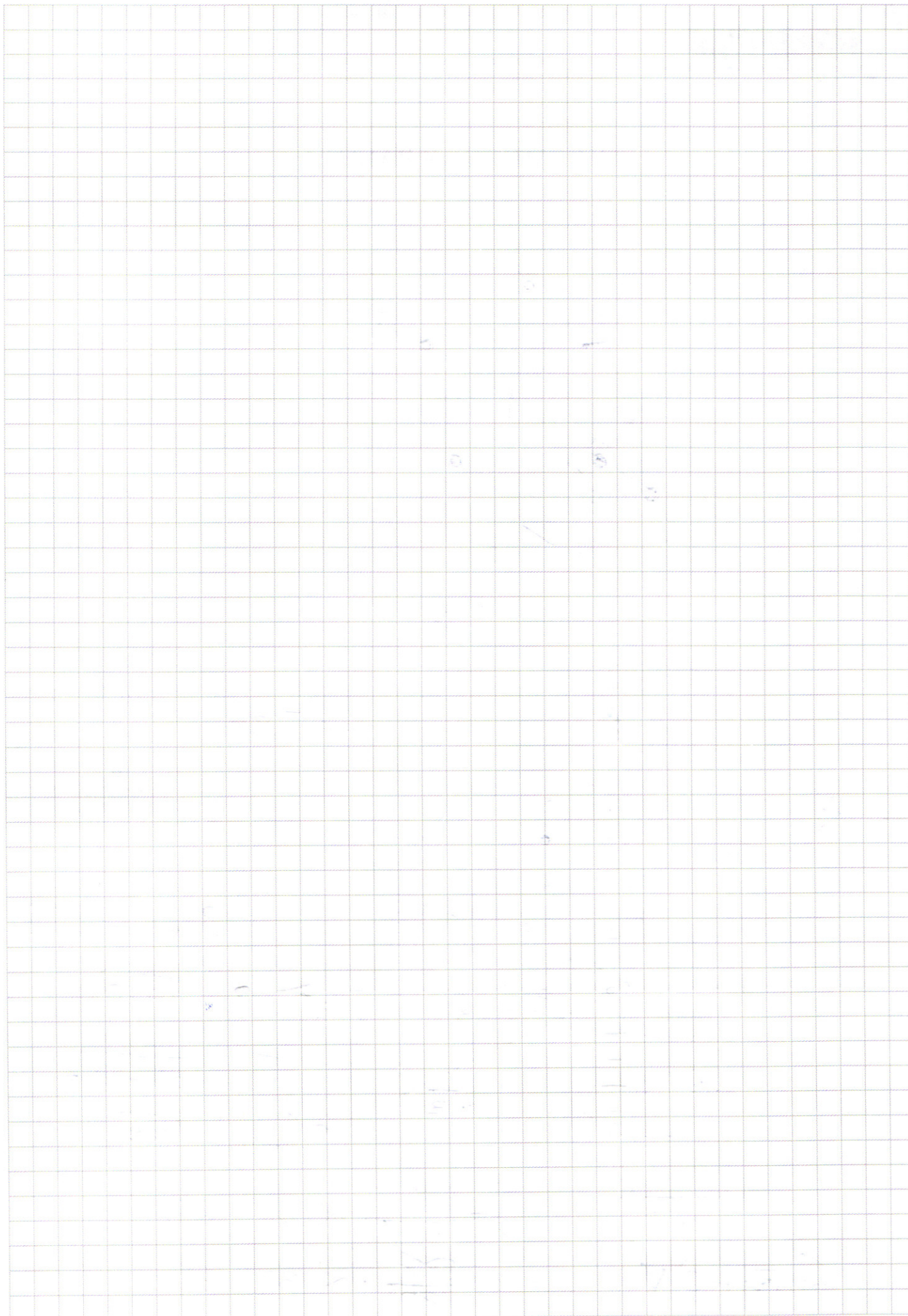
$$+ \begin{cases} 2ax - 2bx + 6y = a \\ 3bx + aby - b^2y = 1 \end{cases}$$

$$2ax + bx + 6y + aby - b^2y = a + 1$$

$$x(2a+b) + y(6+ab-b^2) = a+1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 10|x| + y^2 - 24|y| = 0$$

$$|x|(x-10) + |y|(y-24) = 0$$

$$\begin{cases} |x| = a \\ |y| = b \end{cases}$$

$$a^2 - 10a + (b^2 - 24b) = 0$$

$$\frac{D}{4} = 25 - (b^2 - 24b) = -b^2 + 24b + 25 = - (b+1)(b-25)$$

$$a = 5 \pm \sqrt{-(b+1)(b-25)}$$

$$1) \begin{cases} a = 5 + \sqrt{-(b+1)(b-25)} \\ |x| = 5 + \sqrt{-(|y|+1)(|y|-25)} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a = 5 - \sqrt{-(b+1)(b-25)} \\ |x| = 5 - \sqrt{-(|y|+1)(|y|-25)} \end{cases}$$

$$\left(5 + \sqrt{-(|y|+1)(|y|-25)}\right)^2 + (|y|-12)^2 = 169$$

$$-(|y|+1)(|y|-25) + y^2 - 24|y| + 144 = 169$$

$$-y^2 + 25|y| - |y| + 25$$

$$|x| \geq 5$$

$$|y| \leq 25$$

$$x + y$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = 2x^2+6x-20$$

$$x^2+3x-10$$

$$x=2$$

$$x=-5$$

$$\begin{array}{r} 27-48+25= \\ 8-32+25= \\ 2 \end{array}$$

$$x^3-16x+25 \geq 0$$

$$-125+80+25=$$

корень -5 !
по проверке

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)(x+5) \quad | : (x+5)$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$2(x-2) \geq 0$$

$$x^3-16x+25 = 4(x-2)^2$$

$$2x-4 \geq 0$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$2x \geq 4$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$x \geq 2$$

$$24-36+9=0$$

3

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -4 & 0 & 9 & \\ \hline 3 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x=1+4 \cdot 3=13$$

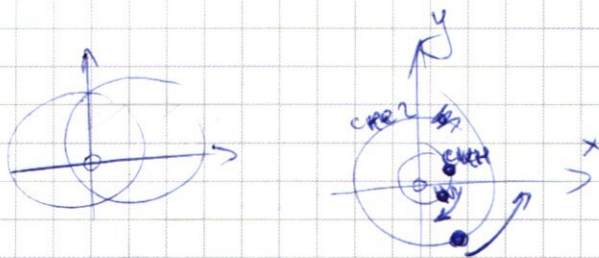
$$-125+80+25=105-125<0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x=3$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



для 1:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

2) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 2ax - 2bx + 6y = a \\ 3bx + aby - b^2y = 1 \end{cases}$$

$$2ax + bx + aby + 6y - b^2 = a + 1$$

$$2ax + bx + aby + 6y - b^2 - a - 1 = 0$$

$$a(2x + by - 1) + bx + 6y - b^2 - 1 = 0$$

7000	2
3500	2
1750	2
875	5
175	5
35	5
7	7
1	1

8

22255571

1. ~~22255571~~

4

2. ~~42555711~~

3. ~~85557111~~

пересчитав.

584-561-1111

гнз Zero analysis

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 =$$

~~555 1/1 2~~

2.2.1

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 112 \\ \times 8 \\ \hline 896 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 24 \\ \hline 224 \\ 112 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \overset{1}{3} \overset{1}{4} 4 \\ + 896 \\ \hline 2240 \end{array} \quad - (2240)$$

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$(|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169$$

$$x^2 - 10|x| + 25 + y^2 - 24|y| + 144 = 169$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0 \quad \begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)6y = 1 \end{cases}$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2 |x+1| \geq 0$$

~~6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0~~

$$6x^4 - 5x^2 |x+1| + (x+1)^2 \geq 0$$

$$4x^4 - 4x^2 |x+1| + (x+1)^2 + 2x^4 - x^2 |x+1| \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|)^2 + 2x^4 - x^2 |x+1| \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|)^2 + x^2 (2x^2 - |x+1|) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x+1|)(2x^2 - |x+1| + x^2) \geq 0$$

$$2x^2 = |x+1|$$

$$3x^2 = |x+1|$$

$$4x^4 = x^2 + 2x + 1$$

$$9x^4 = x^2 + 2x + 1$$

$$4x^4 - (x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$9x^4 - (x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$x=1$$

	4	0	-1	-2	-1
1	4	4	3	1	0

$$-4 + 4 - 3 + 1 = 0$$

$$\sqrt{(x-1)(4x^3 + 4x^2 + 3x + 1)} = 0$$



$$(2x+1)(2x^2 - x + 2x+1) = 0$$

$$4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(4x^3 - x) + (4x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$x(4x^2 - 1) + (2x+1)^2 = 0$$

$$x(2x-1)(2x+1) + (2x+1)^2 = 0$$

$$(x-1)(2x+1)(2x^2+x+1) \geq 0$$

$$4x^4 - (x+1)^2 = 0$$

$$(2x^2-x-1)(2x^2+x+1) = 0$$

2(

$$2x^2-x-1=0$$

$$x=1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$2x^2+x+1=0$$

$$D=1-4 \dots$$

нет р.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$2(a-b)x + (a-b)y + 6y + 3bx = a+1$$

$$(a-b)(2x+by) + 3(6x+y) = a+1$$

$$x(2a-2b+3b) + y(6+ab-b^2) = a+1$$

$$x(2a+b) +$$

Аналог, с $9x^4$ - - -

