

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 2.
$$\begin{cases} 2x - 6y + z = 2 & (1) \\ ax + 5y - cz = a & (2) \end{cases}$$

уравнения (1) и (2) — линейные уравнения.

решения нет, когда:

$$\frac{2}{a} = \frac{-6}{5} = \frac{1}{-c} \neq \frac{2}{a}.$$

$$\frac{2}{a} = \frac{-6}{5}$$

$$10 = -6a$$

$$6 = -\frac{10}{a}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{-c}$$

$$-2c = a$$

$$c = -\frac{a}{2}$$

$$\frac{2b}{a} \neq \frac{b}{5}$$

$$10b \neq ab$$

$$b \neq 0$$

$$10b \neq -ab$$

$$a \neq -10$$

числа $b \in \mathbb{Z}$,

$$a \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$$

числа $c \in \mathbb{Z}$,

$$a \in 2\mathbb{Z}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Объединив все полученные возможные значения a

получили: $a \in \{\pm 2; 10\}$.

при $a = 2$

$$b = -\frac{10}{2} = -5$$

$$c = -\frac{2}{2} = -1$$

при $a = -2$

$$b = -\frac{10}{-2} = 5$$

$$c = -\frac{-2}{-2} = 1$$

при $a = 10$

$$b = -\frac{10}{10} = -1$$

$$c = -\frac{10}{2} = -5$$

Ответ: 1) $a = 2; b = -5; c = -1$

2) $a = -2; b = 5; c = 1$

3) $a = 10; b = -1; c = -5$

~ 3

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0 \quad x^3 - 18x - 5 \geq 0$$

Заметим, что $\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2 \geq 2 > 0 \Rightarrow$ пер-во. верно

когда на это выражение.

$$|x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$$

Это пер-во выполняется только когда

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

Заметим, что $x = 2$ является решением

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

$$x^2(x-2) - 2x(x-2) - 9(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2-2x-9)=0.$$

$$x=2 \quad \text{или} \quad x^2-2x-9=0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$$

Проверим, какие из полученных корней удовлетворяют условию

$$x^3 - 18x - 5 \geq 0.$$

$$x = 1 + \sqrt{10}$$

$$x = 1 - \sqrt{10}$$

$$x=2$$

$$8 - 36 - 5 < 0$$

не подходит

$$(1 + \sqrt{10})^3 - 36 - 36\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 1 + 3\sqrt{10} + 30 + 30\sqrt{10} - 41 - 36\sqrt{10} =$$

$$= -10 - 33\sqrt{10} < 0$$

не подходит.

$$(1 - \sqrt{10})^3 - 36 + 36\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 1 - 3\sqrt{10} + 30 - 30\sqrt{10} -$$

$$- 41 + 36\sqrt{10} =$$

$$= -10 + 23\sqrt{10} > 0$$

$$23\sqrt{10} > 10$$

$$\sqrt{10} > \frac{10}{23}$$

$$10 > \frac{100}{23}$$

$$10 > 1 > \left(\frac{10}{23}\right)^2 \Rightarrow 10 > \left(\frac{10}{23}\right)^2$$

$$\text{Ответ: } 1 - \sqrt{10}$$

№ 5. Минимальная сумма, которая может быть получена - 60, максимальная - 360.

$P(60) = P(360)$, поскольку в обоих случаях возможен только один

благоприятный исход. Для 60 - все единицы; для 360 - все десятки.

Аналогично рассуждая:

$$P(61) = P(359)$$

$$P(119) = P(301)$$

Для случая $S_{\text{шары}} < 120$ вероятность равна $S_{\text{шары}} > 300$.

Означает нас спрашивают о случае $S_{\text{шары}} \geq 300$,

что более вероятно, чем $S_{\text{шары}} > 300$, а значит более

вероятно, чем $S_{\text{шары}} < 120$.

Ответ: для того, что $S_{\text{шары}} \geq 300$.

$$\text{№ 7. } \begin{cases} x^2 - 24x + 10y + x^2 + y^2 = 0 & (1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 169 & (2) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассмотрим ур-е (1).

$$a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + y^2 + 10y + 25 = 25$$

$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = 5^2.$$

ур-е (1) является уравнением окружности с центром в т. $(a; -5)$ и $r = 5$.

рассмотрим ур-е (2)

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 13^2.$$

$$\text{при } x \geq 0; \\ y \geq 0;$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$

$$x \leq 0 \\ y \leq 0$$

$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = 13^2$$

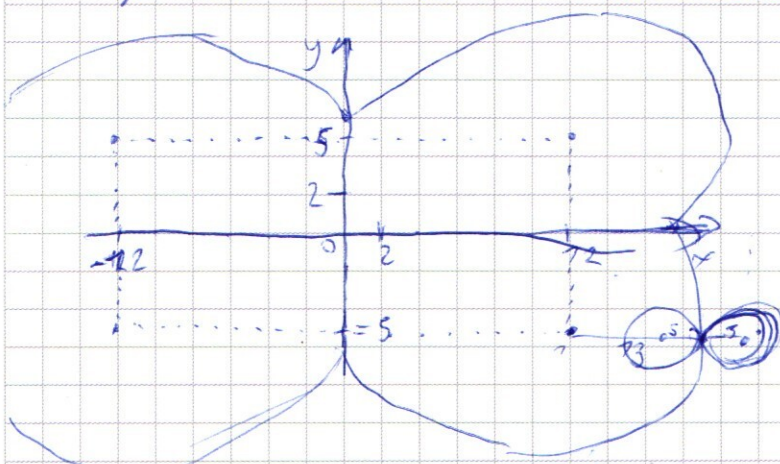
$$x \geq 0 \\ y \leq 0.$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = 13^2$$

$$x \leq 0 \\ y \geq 0.$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 13^2.$$

ур-е (2) является ~~уравнением~~ уравнением нескольких окружностей. ($R = 13$).



2 решения системы имеет, когда окруж. (1) касается со стороны ур-е (2). внешним образом и заключивая, когда окруж. (1) касается ур-е (2) внутренним образом.

т.к. в ур-е (2) R окружностей $R = 13$, то центр одной из них в т. $(12; -5)$, то касание с окр. (1) будет когда.

$$R_x + R = a + R_y.$$

$$12 + 13 = a + 5. \quad a - 5 \geq 5; a \geq 30.$$

внутреннее касание будет тогда.

$$R_1 + R_2 = a + r_m$$

$$12 + 13 = a + 5$$

$$25 = a + 5$$

$$a = 20.$$

так. ур-е (2) - четная функция, но гр-к (2) симметричен.

относительно Oy $\Rightarrow$ 2 решения будут от $a = -30$ до $a = 20$.

Ответ: $a \in (-30; -20) \cup (20; 30)$.

рассмотрим гр-к (2) при $x \geq 0$.

$$(12)^2 + (|y| - 5)^2 = 13^2$$

$$|y| - 5 = 5$$

так. у в интервалу y нас интересует < 0 , то следует

написать модуль.

$$-y - 5 = 5.$$

$$-y = 10$$

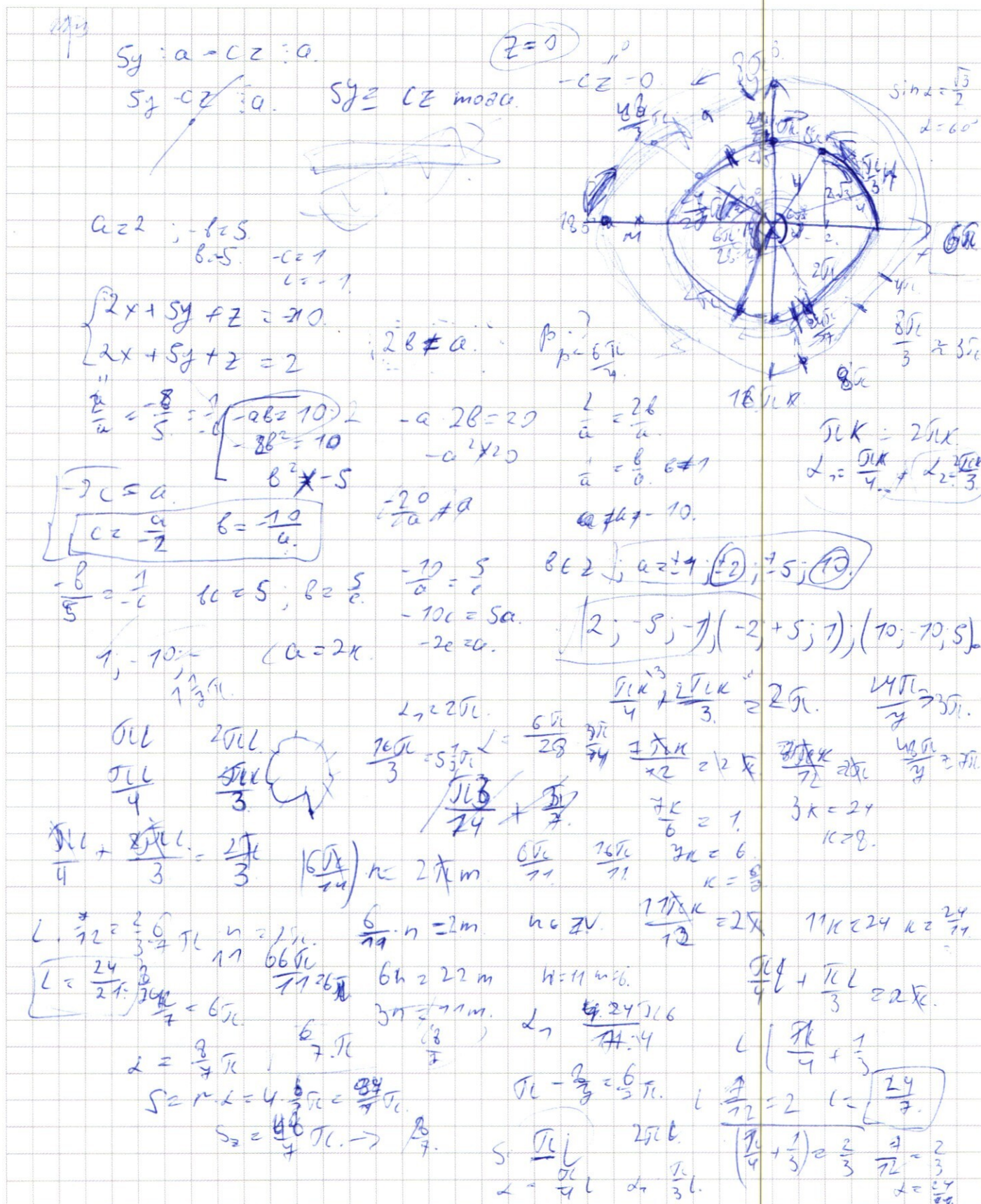
$$y = -10.$$

Получается, что центр окр (1) будет иметь центр $(0; -5)$, то

у нас будет только 1 решение, поэтому этот случай
нам не подходит.

Ответ: $a \in (-30; -20) \cup (20; 30)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\max = 360$$

$$\min = 60$$

157

6

$$\geq 300$$

$$300, \dots, 360$$

750

$$> 300$$

$$60 \dots 179$$

$$150 - 9 = 141$$

$$(x-1)(4x^3 - x^2 - 75x - 9) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \star$$

$$4x^3 - x^2 - 75x - 9 = 0$$

$$x^2(4x-1)$$

$$S = \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{27}{2} - 73.5 - 22.5 = 22.5 - 9$$

$$\frac{1}{26} - \frac{1}{26} - \frac{15}{4} - 9 = 3.9 = 0$$

$$3.5 \cdot 33 = 115.5$$

$$S = 360 - S = 20$$

$$S = 359 = S = 69$$

$$S = 358 = S = 62$$

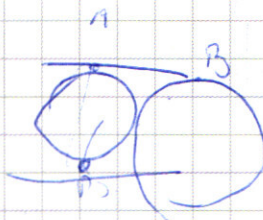
$$60 \cdot 59$$

$$= 30 \cdot 59 = 1770$$

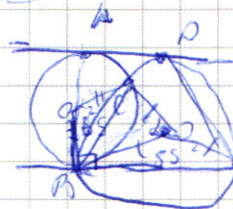
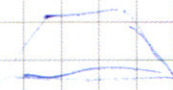
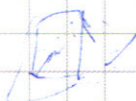
$$30(55+1) = 30 \cdot 60 = 1830$$

$$S = 301 = S = 179$$

$$S = 300$$



$$r_1, r_1, r_2, r_2 \quad r_1, r_2$$



$$\frac{1}{2} r_1^2 \cdot \sin \alpha_1$$

$$\frac{1}{2} r_2^2 \cdot \sin \alpha_2$$

$$2.5 r_2^2 \sin \alpha_2 = 0.5 (r_1^2 \cdot \sin \alpha_1 + r_2^2 \cdot \sin \alpha_2)$$

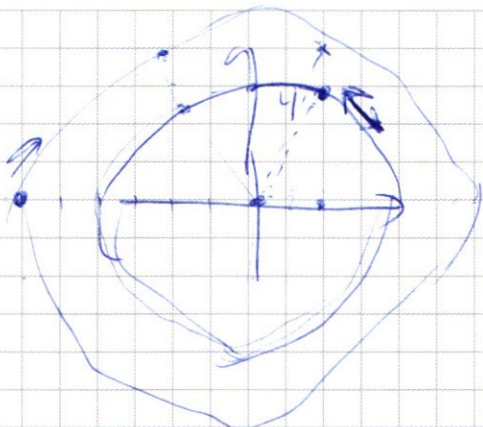
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1^2 \sin \alpha_1 + r_2^2 \sin \alpha_2}{3 r_2^2 \sin \alpha_2} = \frac{r_1^2 \sin \alpha_1}{3 r_2^2 \sin \alpha_2} + \frac{r_2^2 \sin \alpha_2}{3 r_2^2 \sin \alpha_2}$$

$$\frac{2.5 \cdot \sin \alpha_2}{3 \sin \alpha_2} = \frac{1}{3} + \frac{r_1^2 \sin \alpha_1}{3 r_2^2 \sin \alpha_2}$$

$$1 + \sqrt{70}$$

$$1 + \sqrt{70} + 30 + 10\sqrt{70} - 4 + 8\sqrt{70} + 40 - 5 - 8\sqrt{70} + 18 = 37 + 18 - 49 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} 2x - 6y + z = 2 \\ ax - 5y - cz = a \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -10x + 5y - 5z = -10 \end{cases}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{-6}{-5} = \frac{1}{-c} \neq \frac{2}{a} \quad \begin{cases} 2a \neq 2ab \\ 6 \neq 1 \end{cases} \quad \frac{2}{a} \neq \frac{2b}{a}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{-c} \Rightarrow -2c = a \quad \begin{cases} 2x - y + z = 2b \\ -10x + 5y - 5z = -10 \end{cases}$$

$$a, b \neq 0 \quad \frac{2b}{a} \neq \frac{1}{5}$$

$$10x = -a \quad a \neq -10$$

$$\begin{cases} 2x - 6y + z = 2b \\ ax - 5y - cz = a \end{cases} \quad \begin{cases} 2b \neq 2 \\ a \neq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax - 6by + az = 2ab \\ 2ax - 5y - 2cz = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} 2b \neq 2 \\ a \neq a \end{cases}$$

$$10y(10 - ab) + z(a + 2) = \frac{a + 10}{2ab - 1}$$

$$\sqrt{y^3 - 18y - 5} + 2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^3 - 18x - 5 \geq 0$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

$$8 - 16 - 10 + 18 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x - 9x + 18$$

$$x^2(x - 2) - 2x^2(x - 2) - 9(x - 2)$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 9) = 0$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x = 2 - \text{реш.}$$

$$8 - 36 - 5 < 0$$

$$x \neq 2$$

$$(1 + \sqrt{10})^3 - 18 - 18\sqrt{10} - 5$$

$$125 - 27 - 18\sqrt{10} < 102 - 18\sqrt{10} > 0$$

$$1 + \sqrt{10} > 4 \quad 64 - 23 - 18\sqrt{10} > 102 - 18\sqrt{10} > 5$$

$$1 + 3\sqrt{10} + 30 + 10\sqrt{10}$$

$$23 - 18\sqrt{10} =$$

$$8 - 8\sqrt{10} < 0$$

$$8 \neq 5\sqrt{10}$$

$$(1 - \sqrt{10})^3 - 18 + 18\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 1 - 3\sqrt{10} + 30 - 10\sqrt{10} - 23 + 18\sqrt{10} =$$

$$28 + 5\sqrt{10} > 0$$

$$x = 1 - \sqrt{10}$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2(x+3) + 9 = 0$$

$$x \geq 3 \quad -5x^2 - 15x + 9$$

$$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$24 + 135 - 126 + 18 + 9 = 0$$

$$261$$

$$26.244$$

$$26.244 \quad x \geq 1$$

$$4x^4 - 4x^3 - x^3 + x^2 - 15x^2 + 15x - 9x + 9 = 0$$

$$4x^3(x-1) - x^2(x-1) - 15x(x-1) - 9(x-1) = 0$$

$$(x-1)(4x^3 - x^2 - 15x - 9) = 0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = 0$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$

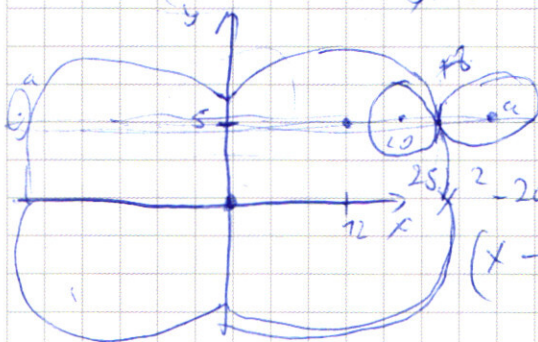
$$x = 0$$

$$(y-5)^2 = 5^2$$

$$|y-5| = 5 \quad |y| = 10$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\begin{aligned} -x-1 \\ -y-7 \\ y+7 \\ x+1 \end{aligned}$$



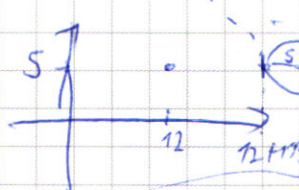
$$25x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 10y + 25 = 25$$

$$(x-a)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$(x-a)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$



$$(x-a-x+12)(x-a+x-12) = (5-13)(5+13)$$

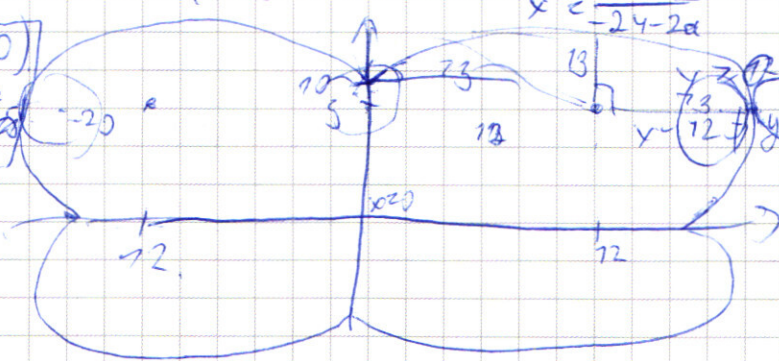
$$(12-a)(2x-a-12) = -16/4$$

$$(x-a)^2 - (x-12)^2 = x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 24x - 144 = x^2$$

$$a \geq -30$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -30) \cup (30; \infty).$$

$$\begin{aligned} a \in [25; 30] \\ a \in [-35; -20] \end{aligned}$$



$$x(24-2a) + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a^2}{24-2a}$$

$$-x-12 \quad a > x+12$$

$$y \geq 0 \quad y = -12$$



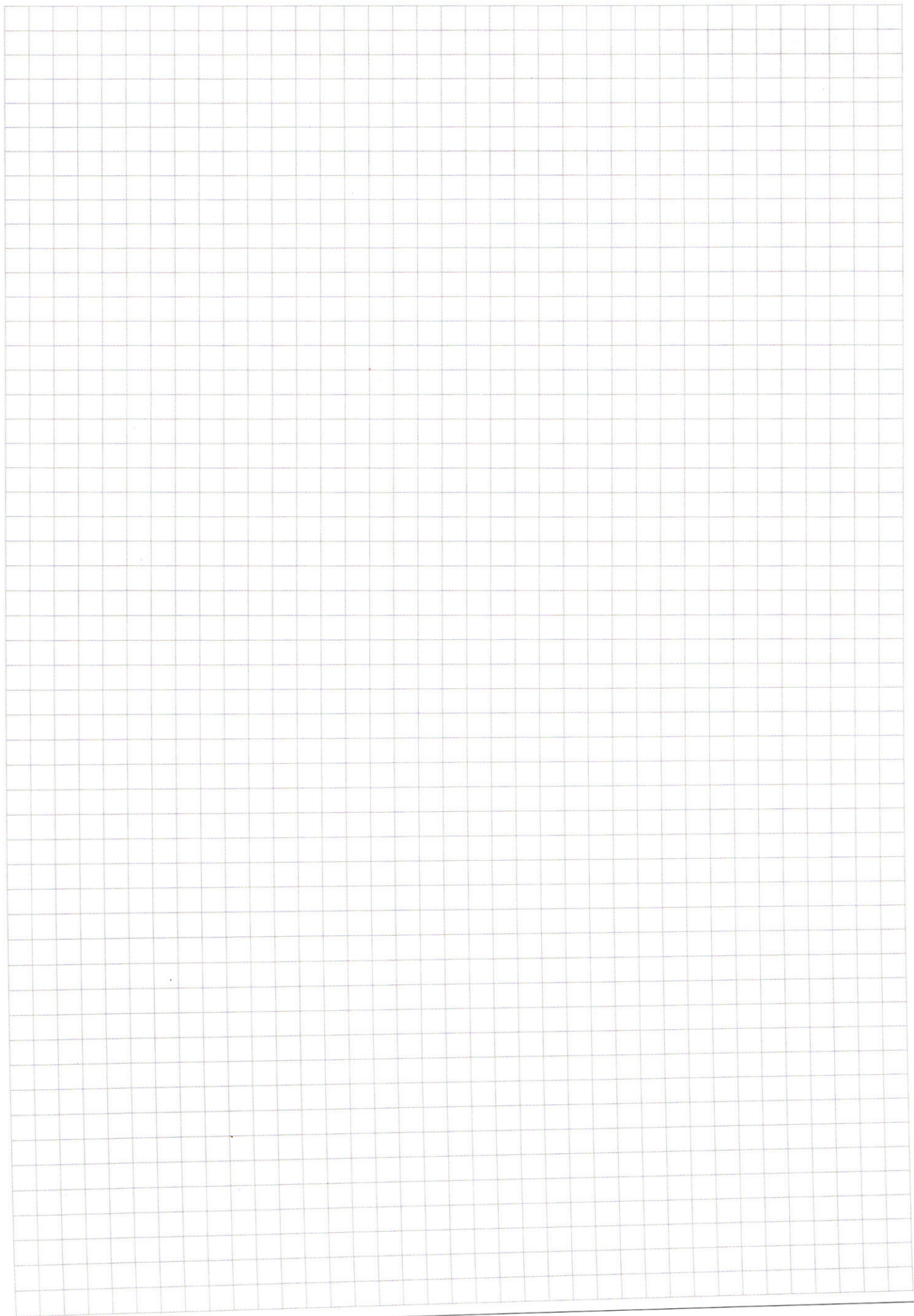
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)