

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

где $a_1 a_2 \dots a_8 = 1400$

$1 \leq a_1, a_2, \dots, a_8 \leq 9$

цифры не могут быть равны нулю т.к.

их произведение равно 1400

$$1400 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3$$

т.е. какая то из цифр делится на 7 $\Rightarrow$ т.к. $1 \leq a_i \leq 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.е. какая то цифра равна 7 аналогично есть две цифр 5-ёрки. т.е. цифры могут быть только образам в каком то порядке

1) 7, 5, 5, 8, 1, 1, 1, 1 $\Rightarrow$

2) 7, 5, 5, 2, 4, 1, 1, 1

3) 7, 5, 5, 2, 2, 2, 1, 1

в I-ом случае любая цифра может быть

7 $\Rightarrow$ т.е. 8х (8 позиций) потому цифра 8 на остальных

мы 7 мест $\Rightarrow 7 \cdot 8 \cdot C_6^2$ т.е. 2 5-ёрки C_6^2 т.е.

$$7 \cdot 8 \cdot C_6^2 = 7 \cdot 8 \cdot 15 = 840 \text{ чисел}$$

в II-ом случае аналогичным образом вывести

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot C_2^2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 = 3360 \text{ чисел}$$

в общем случае $8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^3 = 8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$

$$1680 + 840 + 3360 = 4200 \text{ ~~чисел~~ } 1680 = 5880 \text{ чисел}$$

Ответ: 5880 чисел.

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Данная система имеет бесконечно много решений
тогда и только тогда когда отношение коэффициентов
будет одинаковым (x, y, c)

т.е.

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1} \quad b \neq 0, a \neq -b$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b}$$

$$3(a+b)^2 = 48$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = \pm 4$$

$$1) \quad a+b = 4$$

$$a = 4 - b$$

$$\frac{12}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$$

$$ab = 3$$

$$(4-b)b = 3$$

$$4b - b^2 = 3$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$b_1 = \frac{4+2}{2} = 3, \quad b_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$2) \quad a+b = -4$$

$$a = -4 - b$$

$$\frac{12}{-4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$$

$$ab = -3$$

$$(-4-b)b = -3$$

$$4b + b^2 = 3$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

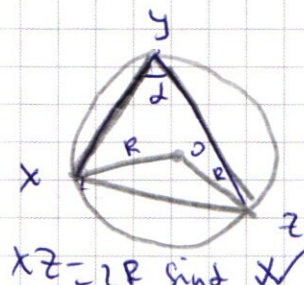
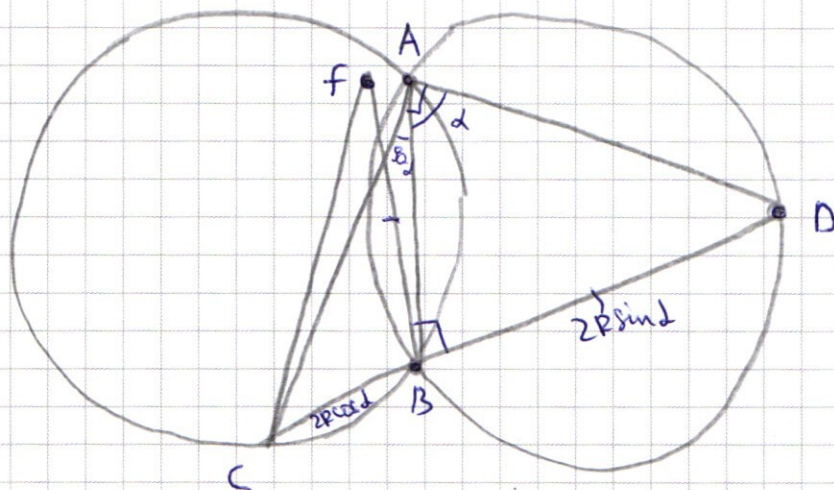
$$b_1 = -2 - \sqrt{7}, \quad b_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7} - 2$$

$$a_1 = \sqrt{7} - 2, \quad b_2 = -2 - \sqrt{7}$$

Ответ: $(1, 3), (3, 1), (-2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} - 2), (\sqrt{7} - 2, -2 - \sqrt{7})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle CAB = \angle CAD - \angle BAD = 90^\circ - \alpha$

$$CB = 2R \cdot \sin \angle CAB = 2R \cos \alpha$$

$$BD = 2R \cdot \sin \angle BAD = 2R \sin \alpha$$

По условию $FB = BD = 2R \sin \alpha$

$$\begin{aligned} CF^2 &= CB^2 + BF^2 = (2R \cos \alpha)^2 + (2R \sin \alpha)^2 = 4R^2 \cdot \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = \\ &= 4R^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2 \end{aligned}$$

$$\text{Т.к. } CF \geq 0 \text{ т.е. } CF = 2R$$

$$\text{а } R = 9 \text{ (по условию) т.е. } CF = 2 \cdot 9 = 18$$

Ответ: 18

№ 3

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$$

$$x+2 = \sqrt{x^3 - x + 10}$$

$$x^3 - x + 10 \geq 0$$

$x \rightarrow$ это не ответ т.к.
 $x^3 - x + 10 < 0$
т.е. ~~тогда~~ $x \neq -3$

$$x^2 + 4x + 4 = x^3 - x + 10$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x=2 \quad P(2)=0 \quad \text{т.е.}$$

Схема Горнера

2	1	-1	-5	6
2	1	1	-3	0

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$$

$$x^3 - x + 10 > 0 \quad \text{т.е. если } x^3 - x > 0 \text{ то } x^3 - x + 10 > 0$$

$$x^3 - x > 0 \quad \text{или } x^2 > 1$$

$$x^3 > x \quad \text{при } x > 0 \quad x^2 > 1$$

$$a \quad x_1 = \frac{\sqrt{13}-1}{2} > \frac{\sqrt{13}-1}{2} = 1 \quad \checkmark$$

$$a \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 4 > 0$$

$$\frac{1+13+2\sqrt{13}}{4} - 2-2\sqrt{13}+4 > 0$$

$$3,5 + \frac{\sqrt{13}}{2} + 2 - 2\sqrt{13} > 0$$

$$5,5 > 1,5\sqrt{13}$$

$$11 > 3\sqrt{13}$$

$$121 > 9 \cdot 13$$

$$121 > 117 \quad \checkmark$$

$$\text{Ответ: } x_1=2, \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \quad x_3=\frac{\sqrt{13}-1}{2} \quad \text{и } x=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

1) $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$\S = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

или $\begin{cases} 2x^4 - 3x^3 \geq 0 & (x \geq 1,5) \text{ и} \\ 4x^2 - 2x \geq 0 & (x \geq 1) \end{cases}$

$$\S \geq 0 \text{ и}$$

т.е. $1 \leq x \leq 1,5$

$$(2x^4 - 2x^3) + (1,5x^2 - x^3) + (2x^2 - 2x) + (0,5x^2 + 1) \geq 0$$

$$\begin{matrix} 2x^4 - 2x^3 \geq 0 & 1,5x^2 - x^3 \geq 0 & 2x^2 - 2x \geq 0 & 0,5x^2 + 1 \geq 0 \\ x \geq 1 & 0 \leq x \leq 1,5 & x \geq 1 & \text{и} \end{matrix}$$

т.е. для $x \geq 1$ задача верно.

2) $x < 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

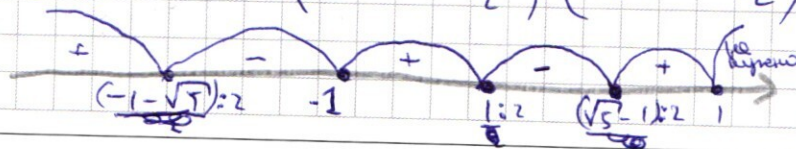
$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x+1)(2x^2 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

$$(x+1)(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

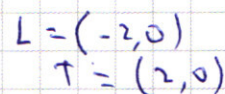
$$(x+1)(x - \frac{1}{2})(x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$(x+1)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \geq 0$$



Answer: $x \in (-\infty, -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty)$.

$$N=1$$



$$R_4^2 = 2$$

$$R_{X|Y} = 4$$

 $\angle LOM_0 = 60^\circ$

$$\angle TON_0 = 36^\circ$$

то язык комбинаторного нп и тк.

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

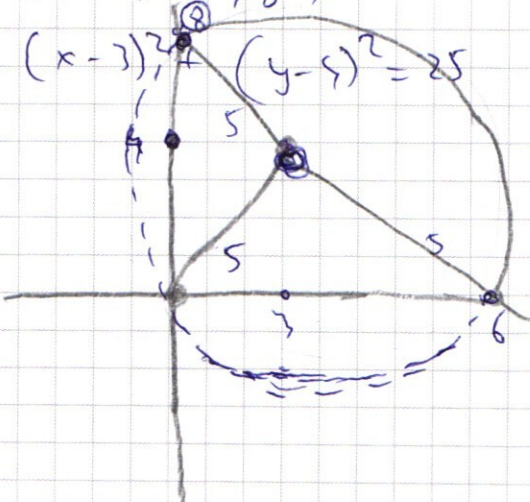
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е. M_0 и M_1 симметричны отн. OY т.е. если $M_0(x, y)$
то $M_1(-x, y)$ т.е. $M_1(1, \sqrt{3})$ и $M_2(2, 2\sqrt{3})$ (проф.
указали на 2 т.к. O, M_1, M_2 на одной прямой
аналогично второй всегда будет косе 120° ($\beta + 2\beta = 360^\circ$)
 $\Rightarrow \beta = 120^\circ$) т.е. в ~~этом~~ будет в точке $M_2(-1, 0)$ и
еще раз косе 120° будет в точке симметричной
 $M_1(x, y)$ т.е. в точке $M_3(x, -y) \Rightarrow \text{~~на } (2, 2\sqrt{3}) \text{ и } (2, -2\sqrt{3})~~ } M_3(2, -2\sqrt{3})$
и также
Ответ: ~~на } (2, 2\sqrt{3}), (-1, 0), (2, -2\sqrt{3})~~ координаты
точки в кратчайших расстояниях между точками и
уравнений).

$N^{\circ} 7$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

1) $x > 0, y > 0$



4) $x \leq 0, y \leq 0$
 $x > 0$

1) ~~$x > 0, y > 0$~~ $x > 0, y > 0$
 $x-3-y + x-3+y \leq 6$

$2x \leq 12$
 $x \leq 6$
 $x-3-y \geq 0$
 $x-3+y \geq 0$
 $x+y \geq 3 \Rightarrow x \geq 6-x \Rightarrow x \geq 3$

2) $x \leq 0, y \leq 0$
 $x-3-y + x-3+y \leq 6$

3) $x \leq 0, y \geq 0$
 $x-3-y + x-3+y \leq 6$

1) $x > 0$

$$x - 3 - y \leq 0$$

$$x + y \leq 0$$

$$y \leq 3 - x$$

$$x \leq y + 3 \leq 6 - x$$

$x \leq 3$

и y значения $x \in (0, 3)$ (уравнение окружности)

2) $x - 3 - y \geq 0$

$$x - 3 + y \leq 0$$

$$x \geq 3 + y$$

$$x - 3 + y \leq 0$$

$$3 + y \leq x \leq 3 - y$$

$$\textcircled{x} \quad y \leq 0, y \geq 3$$

3) $x - 3 - y \leq 0$

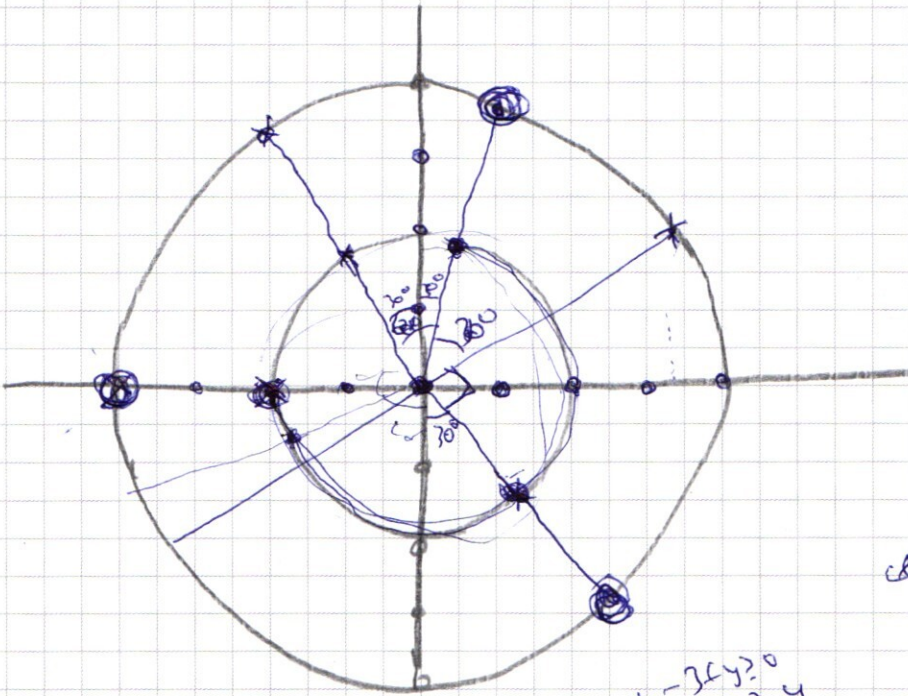
$$x - 3 + y \geq 0$$

$$3 \geq x - y$$

$$x + y \geq 3 \geq x - y$$

$y > 0$
 $y \leq 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} x+y &\leq 6 \\ -x+y &\leq 3 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y &\leq 6 \\ y &\leq 3 \\ -x+3 &\leq 0 \\ -x+3 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-3-y &\geq 0 \\ x &\geq 3+y \end{aligned}$$

$$x-3-y \geq 0$$

$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{aligned} x-3-y &\geq 0 \\ x &\geq 3+y \end{aligned}$$

$$x \geq 3$$

$$\begin{aligned} x+y &\geq 3 \\ y &\geq 3-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\leq 6 \\ y &\geq 3 \end{aligned}$$

$$y \geq 3$$

$$y \leq 3$$

$$y \leq 3$$

$$x \geq 0$$

$$x-3-y \leq 0$$

$$x \leq y+3 \leq 6-x$$

$$x-3+y \leq 0$$

$$x+y \leq 3$$

$$y \leq 3-x$$

$$x \leq 3$$

$$\begin{aligned}
 x - 3 - y &\geq 0 \\
 x + 3 + y &\geq 6 - x \\
 x - 3 + y &\geq 0 \\
 x + y &\geq 3
 \end{aligned}$$

$$x \geq 3$$

$$x - 3 - y \geq 0$$

$$x - 3 + y \leq 0$$

$$x \geq 3 + y$$

$$x - 3 + y \leq 0$$

$$3 + y \leq x \leq 3 - y$$

$$\leq 0 \quad \geq 0$$

$$x - 3 - y \leq 0$$

$$x - 3 + y \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 x &\leq 3 + y & 3 & \leq x - y \\
 &\geq 3 + y & & \\
 x + y &\geq 3 & & \geq x - y
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1400 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3$$

$$1 \rightarrow 7$$

$$1 \rightarrow 5$$

$$1 \rightarrow 5$$

$$x > 1$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$\frac{3(a+b)}{4x} = \frac{12}{(a+b)x}$$

$$48 = 3(a+b)^2$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 > 2x^3$$

$$\frac{470}{8}$$

$$C_6^7 = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$5 \cdot 4 =$$

$$\frac{5!}{8}$$

$$C_7^7 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} =$$

$$2x^4 > 2x^3$$

$$1 < x < 15$$

$$2x^4 > 2x^3$$

$$-2 + 1 + 3 = 1$$

$$\frac{17}{2}$$

$$\frac{3360}{840} = 4$$

$$\frac{15}{2} \cdot 2 = 15$$

$$2x^4 - 2x^3 + 1.5x^2 - x^3 + 2.5x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2.5x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$2.5x^2 > 2x$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 - 3 - 2 + 2 + 1$$

$$12 = 486$$

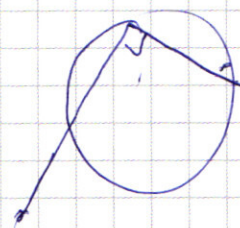
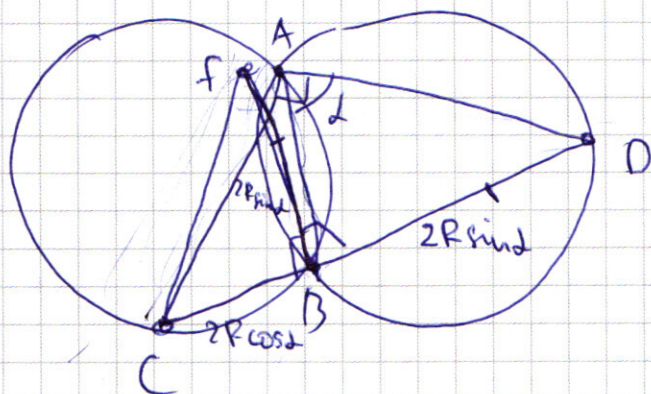
$$-12$$

$$-2x + 1 + 3 = 1$$

$$\frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 1$$

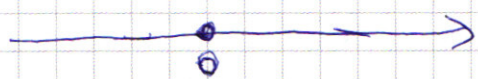
1
2 x
3 x
4
5 x
6 x
7



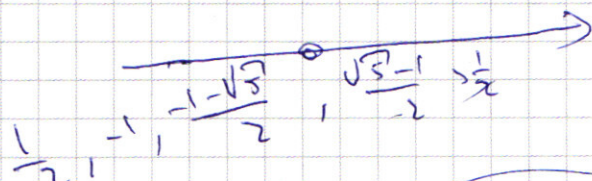
x

$$\frac{2 \cdot 2.5}{2.5} = 2$$

$$\frac{2 \cdot 10.8}{16} = 1.35$$



$$\frac{13}{117}$$



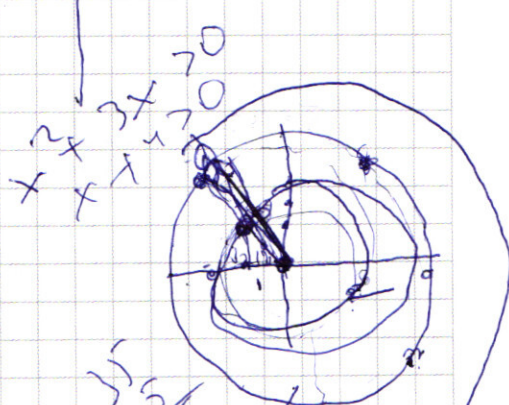
x-3 > y



x < -3

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{4+5\sqrt{5}}{10}$$



$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^2 - x + 10} = x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$$

2	1	-3	1
2	2	-2	0

$$D = 1$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5+1}{2}$$

$$x^2 + 2x > 0$$

$$2x + 4 > 0$$

$$x > -2$$