

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

* * * * *

$$7000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

т.е. т.к. цифр < 10 то:

одна из цифр : 7 и одна : 5 т.к.

цифры ненулевые, иначе произведение цифр было бы равно 0. т.е. в записи есть цифра

7 и цифра 5 $\Rightarrow$ другие цифры можем найти, т.к. их произведение равно 8

т.е. произведение 4 цифр равно 8:

1, 2, 2, 2

1, 1, 2, 4

1, 1, 1, 8

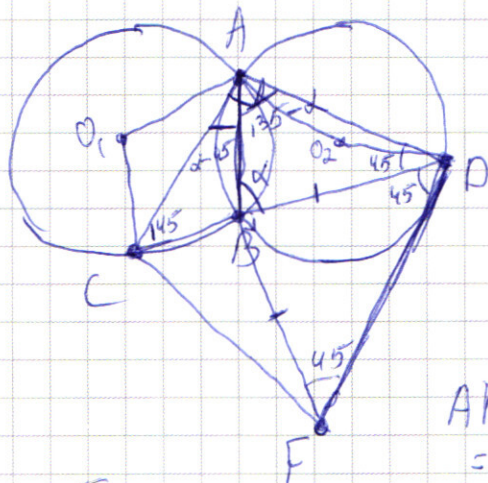
без порядка:

7 может стоять в 8 местах в ост. 7 при 5 и ещё в ост. 4 или 3 двойки, одна 2 и одна 4, одна 8 а ост. 1.

По правилу произ. всего будет $8 \cdot C_7^5 \cdot (C_4^3 + 4 \cdot 3 + 4) =$
 $= 8 \cdot 21 \cdot (4 + 12 + 4) = 20 \cdot 168 = 3360$

ОТВЕТ: 3360 чисел.

№6



O_1 и O_2 центры I и II окр.
м.к. $AD = 2 \cdot 7 \sin \alpha$ и $AC =$

$$= 2 \cdot 7 \cdot \sin(180 - \alpha)$$

где $\alpha = \angle ABD \Rightarrow AD = AC$

и $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

$\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$ ($BD = BF$)

$$AB = 2 \cdot 7 \cdot \sin \angle AOB = 2 \cdot 7 = 14 \text{ м.к. } \angle AOB = 2 \cdot \angle ACB = 90^\circ$$

Пусть $BC = z$ $BD = y$ тогда по теореме синусов в $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ получаем следующее:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha - 45)} = \frac{AB}{\sin 45} \quad \text{и} \quad \frac{BD}{\sin(\alpha + 45)} = \frac{AB}{\sin 45}$$

$$z = 14\sqrt{2} \sin(\alpha - 45) \quad y = 14\sqrt{2} \sin(\alpha + 45)$$

$$\begin{aligned} CF^2 &= z^2 + y^2 = 14^2 \cdot 2 (\sin^2(\alpha - 45) + \sin^2(\alpha + 45)) = \\ &= 14^2 \cdot 2 (2 \sin^2 \alpha \cos^2 45 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 45) = 28^2 \cdot \frac{1}{2} = 14^2 \cdot 2 \\ \Rightarrow CF &= 14\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ответ: $14\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

023 $x^3-16x+25 \geq 0$ т.е. $x=-5$ не подходит т.к.
и $x \geq 2$ $-125+80+25 < 0$

$x \neq -5$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$(x-3)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)=0$$

~~$$\frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 3.3027756377319946$$~~

$$x_1=3 \quad x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad x_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2 \quad \text{не подходит}$$

$$x^3-16x+25 = 27-48+25 = 4 \text{ при } x=3$$

$$x^3-16x+25 = \frac{1+3\sqrt{13}+3\sqrt{13}+13\sqrt{13}}{8} - 8 - 8\sqrt{13} + 25 = 5+2\sqrt{13} - 8\sqrt{13} + 17 =$$

$$= 22 - 6\sqrt{13} \approx 0$$

$$22^2 \approx 36 \cdot 13$$

$$4 \cdot 11^2 \approx 4 \cdot 9 \cdot 13$$

$$11^2 \approx 9 \cdot 13$$

$$121 \approx 117 \text{ т.е. подходит}$$

Ответ: $\left\{3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 \sqrt{x+1} + 1 \geq 0 \quad N4$$

$$1) x > -1$$

$$2) x \leq -1$$

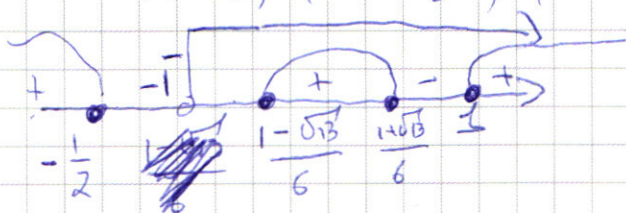
$$1) x > -1 \quad 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^2 - 2x - 2) \geq 0$$

$$2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{6}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right) \geq 0 \quad \text{МУ (метод интервалов)}$$



$$\Rightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$2) x \leq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & + & 5x^3 & (x+1) & + & (x+1)^2 & + & 5x^2 \\ \geq 0 & & \underbrace{\leq 0} & \leq 0 & & \geq 0 & & \geq 0 \\ & & & \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$\text{m.e. } \forall x \leq -1 \quad \checkmark \quad x \in (-\infty; -1]$$

ответ:

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a-b) = 3ab \\ 6 = ab(a-b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18 = 2(a-b)^3 \\ a-b = 3, -3$$

$$a-b=3 \Rightarrow ab=2 \quad b=\frac{2}{a} \quad a-\frac{2}{a}=3 \quad a^2-2=3a$$

$$a^2-3a-2=0$$

$$D=9+8=17$$

$$a_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$$b_1 = \frac{4}{3+\sqrt{17}}$$

$$a_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$b_2 = \frac{4}{3-\sqrt{17}}$$

$$a-b=-3$$

$$ab=-2$$

$$a=b-3$$

$$b^2-3b+2=0$$

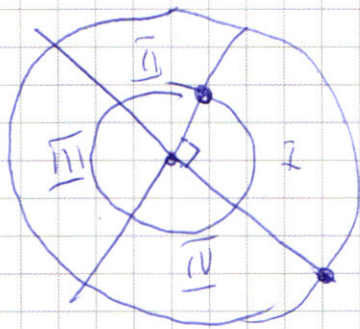
$$D=9-8=1$$

$$b_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad b_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = -2$$

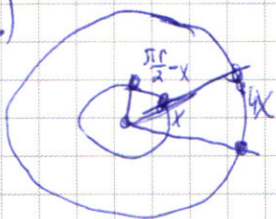
$$\text{Ответ: } (-1; 2), (-2; 1), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{4}{3+\sqrt{17}}\right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{4}{3-\sqrt{17}}\right)$$



N1

И так Сил. и Сил.
"встретятся" в 5-и различных
местах это 2 раза в I секторе
и по 1 разу в др. м.к. пока Сил. пройдёт
1 четверть то Сил. пройдёт весь круг.
м.р. просто найдём все 5 этих мест:

1)

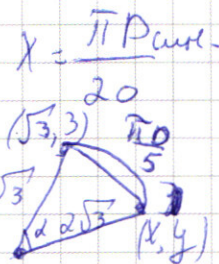


$$\frac{\pi R_{\text{вн.}}}{2} = x = 4x$$

$$\frac{\pi R_{\text{вн.}}}{4} = 5x$$

$$\frac{\pi D}{4} - \frac{\pi D}{20} = \frac{\pi D}{5}$$

м.р.



$$R_{\text{вн.}} = 2\sqrt{3}$$

$$R_{\text{вн.}} = 4\sqrt{3}$$

$$\pi D \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi D}{5}$$

$$\alpha = 72^\circ$$

Находим x, y аналог. для других пересеч.
и всего их 5.

N7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ ((x-5)^2 + (y-12)^2 = 16) \end{cases}$$

из II урав. следует что это 4 окр. с
радиусом 12 и центрами: $(5, 12), (-5, 12), (5, -12)$ и
 $(-5, -12)$

а из I следует что:

$$1) x \leq 0 \quad x \geq -5 \quad \text{случай когда } x+y+5 \geq 0 \quad x-y+5 \geq 0$$

$$2) x+y+5 \geq 0 \quad x-y+5 \leq 0 \quad y \leq 5 \quad y \geq 0 \quad \text{Рассмотрим все}$$

$$3) x+y+5 \leq 0 \quad x-y+5 \geq 0 \quad y \geq -5 \quad y \leq 0$$

$$4) x+y+5 \leq 0 \quad x-y+5 \leq 0 \quad x \leq -5 \quad x \geq -10 \quad \text{случай и всё.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{x+y+5} + \cancel{x-y+5} \leq 10$$

$$2x + 10 \leq 10$$

$$x \leq 0$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$x \geq -5$$

$$x-y+5 \geq 0$$

$$x+y+5 = x+y-5$$

$$2y \leq 10$$

$$y \leq 5$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq -5-x$$

$$x-y+5 \leq 0$$

$$y \geq 5+x$$

$$2(a-b)x + 6y = a$$

$$3bx + (a-b)by = 1$$

$$6x + 6y = 5$$

$$-3x - 6y = 1$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b}$$

$$ab(a-b) - 2(a-b)^2 \cdot b x = 6 - 18bx$$

$$3ab = 2(a-b)$$

$$6 = ab(a-b)$$

$$2(a-b) = 3b$$

$$2 = (a-b)^2$$

$$6 = (a-b)b$$

$$a-b = 3; -3$$

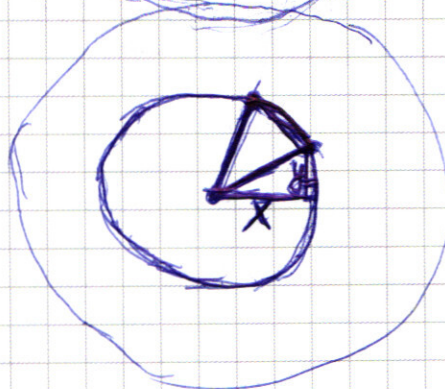
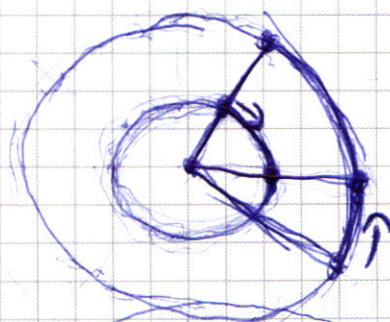
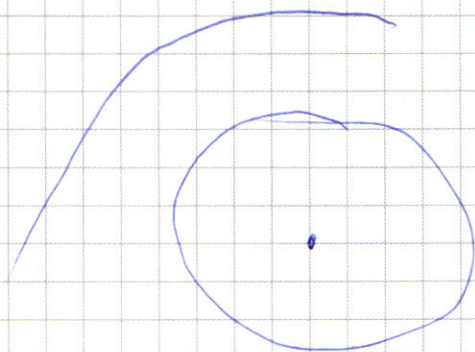
$$12 = 3b^2$$

$$ab = 2$$

$$b = 2; -2$$

$$a = 5; -1$$

$$\frac{9+17+6\sqrt{17}-8}{2(3+\sqrt{17})} = \frac{9+3\sqrt{17}}{3+\sqrt{17}} \rightarrow$$

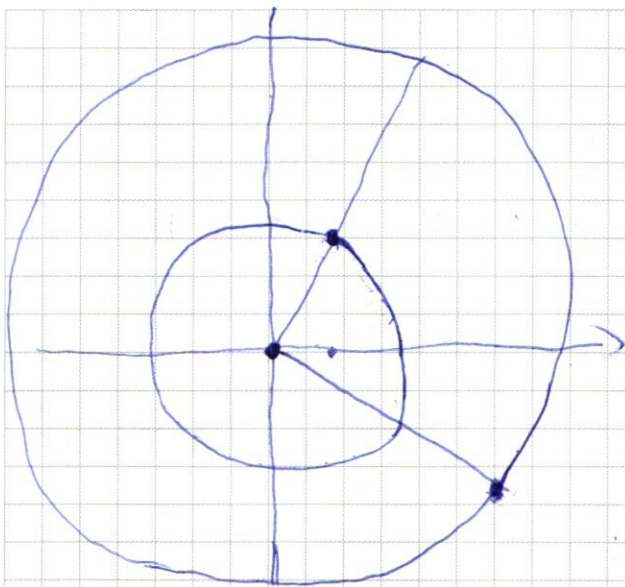


$$x^2 + y^2 = 12$$

a

$$\cancel{2\pi R} \cdot \frac{a}{360} = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x = 4(5 - x)$$

$$5x = 20$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x_1$$

$$x \leq -1$$

$$x \geq -1$$

$$x < -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(6x^3 + x^2 - 3x - 1)(x - 1) \geq 0$$

$$3x^3 + (3x^2 - 1)$$

$$x \geq 1$$

$$(x^3 + x - 5)(x - 2)^2$$

$$7 - \sqrt{13}$$

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$4\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\sqrt{3}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 48$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 12$$

$$0$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$0$$

$$4 - \sqrt{13}$$

$$-3$$

$$1 - \sqrt{13}$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$1 + 12 = 13$$

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$18x^2 + 2x - 3$$

$$4 + 12 \cdot 18$$

$$3x(2x^2 - 1)$$

$$(x^2 - 2x - 2)$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$-2x^2 - 3$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{9}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1$$

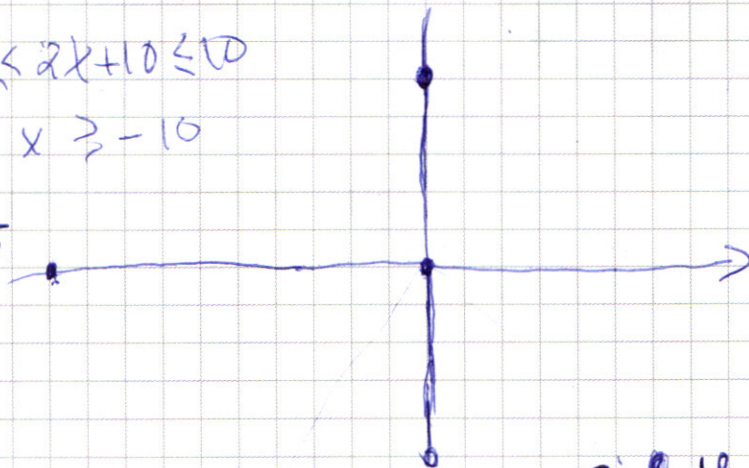
$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1$$

$$x+y+5 \quad (-x+y=5) \quad -10 \leq 2x+10 \leq 10$$

$$-10 \leq 2y \leq 10 \quad -5 \leq y \leq 5$$



$$0; 18$$

$$-12; 18$$

$$|x|^2 + |y|^2 = 10|x| + 24|y|$$

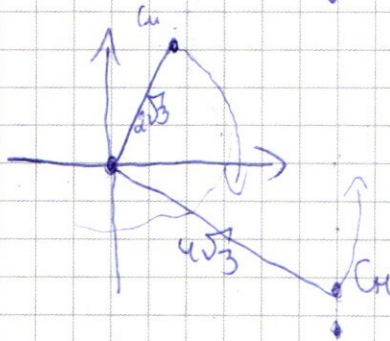
(0,0)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7000 \quad | \quad 1000$$

$$7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

$$7 \ 5 \ 4 \ 2 \ 8$$



$$\pi d_{\text{сш}}$$

$$\pi d_{\text{сш}} = 4 \pi d_{\text{сш}}$$

$$14\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$S_{4X} = X$$

$$S = 5X$$

$$\frac{4\sqrt{3}\pi}{\sin \alpha \cos 45^\circ - \cos \alpha \sin 45^\circ}$$

$$\sin \alpha \cos 45^\circ$$

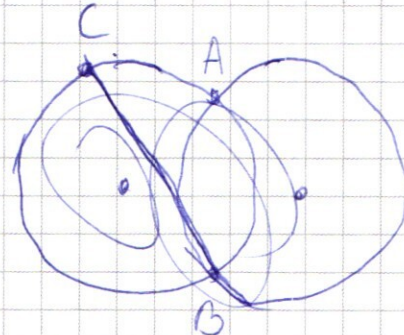
$$Z = 14 \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$2 \sin^2 \alpha \cos^2 45^\circ$$

$$+ 2 \cos^2 \alpha \sin^2 45^\circ$$

$$\frac{2\alpha}{\pi}$$

$$8 \cdot 7 \cdot (C_6^3 + 6 \cdot 5 + 6)$$



$$12$$

$$36$$

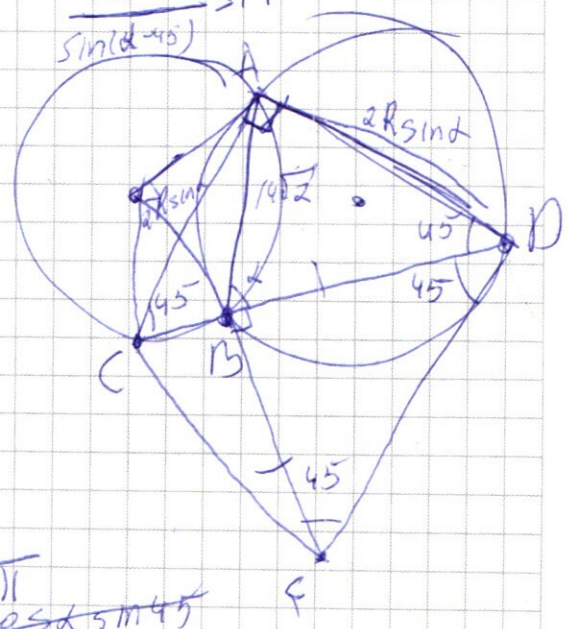
$$48$$

$$8 \cdot 6$$

$$16 \cdot 3$$

$$\frac{y}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = 14$$

$$\frac{y}{\sin(45^\circ)} = 14$$



$$y = 14 \sin(\alpha + 45^\circ)$$

$$Z^2 + y^2 = 14^2 (\sin^2(\alpha - 45^\circ) + \sin^2(\alpha + 45^\circ))$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$x = -5$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)$$

$$x^3-16x+25 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x(x^2-16)+25$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9 = x^3-4x^2+9$$

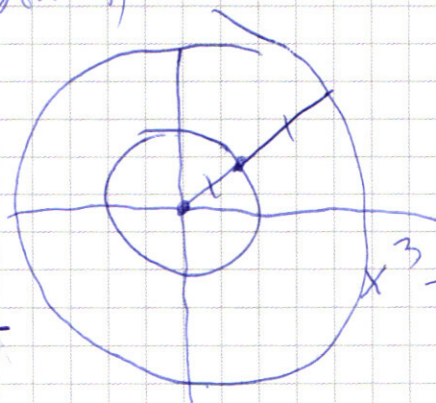
$$2(a-b)x + 6y = a$$

$$3bx + (a-b)by = 1$$

$$2ax - 2bx + 6y = a$$

$$3bx + aby - b^2y = 1$$

$$3(dy + bx) + (a+b)(2x + by) = a+1$$



$$+12 = 13$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^3 - x^2 - 3x - 3x^2 + 3x + 9$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$3$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x(x^2-16)+25$$

$$x < \frac{25}{16}$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} < \frac{25}{16}$$

$$8 + 8\sqrt{13} < 25$$

$$17 > 8\sqrt{13}$$

$$18$$

$$18 < 8\sqrt{13}$$

$$17$$

$$-8 - 8\sqrt{13} + 25$$

$$x^3 \geq -17 + 8\sqrt{13}$$

$$32$$

$$17$$

$$15$$

$$125$$

$$15 \frac{5}{8}$$