

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

54

$$\begin{cases} (a-b)x + 3y = a/2 \\ 3x + (a-b)y = 1/b \end{cases} \begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases} \quad b \neq 0 \text{ тк } 0+0 \neq 1$$

$$(a-b)(x+y) + 3(x+y) = a/2 + 1/b \quad (a-b+3)(x+y) = \frac{ab+2}{2b}$$

$$\begin{cases} \frac{ab+2}{2b} = 0 \\ (a-b+3) = 0 \end{cases} \quad \text{При } a-b+3=0 \text{ уравн. имеет бесконечное число решений}$$

$$a+3=b$$

$$a=b-3$$

$$\frac{ab+2}{2b} = 0$$

$$b(b-3)+2=0$$

$$b^2-3b+2=0$$

по т. Виета

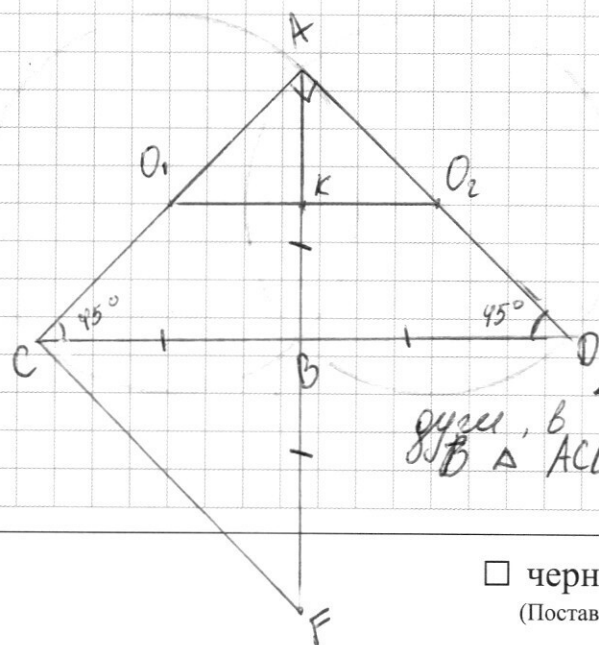
$$\begin{array}{ll} \text{I случай.} & b_1=1, \quad a_1=-2 \\ \text{II случай.} & b_2=2, \quad a_2=-1 \end{array}$$

Рассмотрим I случай. $\begin{cases} -bx+by=-2 \\ 3x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+x=-\frac{2}{b} \\ x-y=\frac{1}{3} \end{cases}$ - бесконечное число решений

Рассмотрим II случай. $\begin{cases} -bx+by=-1 \\ 6x-6y=1 \end{cases}$ - бесконечное число решений

Ответ: $a=-2$ и $b=1$; $a=-1$ и $b=2$.

56



Дано: $\omega_1(O_1; O_1B), \omega_2(O_2; O_2B)$;

$C \in \omega_1, D \in \omega_2, B \in CD, AB \perp CD$
 $\angle CAD = 90^\circ, F \in AB, BF = BD, O_1B = O_2B = r$
Найти: $\angle C$

Решение.

~~Так как~~ $\omega_1 = \omega_2$ по радиусу, то
длины этих 2-х окружностей равны $\Rightarrow$
 AB и 1-ой и 2-ой окружностей равны
(становятся одной хордой AB) $\Rightarrow$
 $\angle D = \angle C$ тк опираются на равные
дуги, в окружностях с равными радиусом.
В $\triangle ACD$ $\angle D = \angle C = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Т.к. $\angle D = \angle C$, то $AD = AC$ ~~то~~ Проверим O_1, O_2 - центры
 внешнего $\triangle ADC$ $\triangle ADC \sim \triangle O_1 O_2$ ($\angle A O_1 O_2 = \angle ADC$; $\angle A$ - общий).
 По в. двух ~~и~~ пересек. окружностей знаем, что $O_1, O_2 \perp AB$;
 $O_1 = O_2$; $AB \cap O_2 = K$ $AK = BK$. ~~то~~

Т.к. $O_1, O_2 \perp AB$ ~~и~~ $O_1, O_2 \parallel DC \Rightarrow AB \perp DC \Rightarrow$
 AB - медиана, биссектриса, высота $\triangle ADC \Rightarrow \angle DAB =$
 $\angle CAB = 90^\circ / 2 = 45^\circ$; $DB = BC$. $F \in AB$.

Т.к. AB - медиана прямоуг. $\triangle$, то $AB = BD = BC = BF$.

Т.к. $\triangle ABC$ - ~~б~~ - прямоуг., то $O_2 \in AC$ (что уже было ~~на~~ доказано
 ранее), $AC = 2R = 14$ ~~или~~
 аналогично $DA = 14$.

$\triangle DBF = \triangle ABC$ ($DB = BF = AB = BC$ $\angle DBF = \angle ABC$) $\Rightarrow DF = AC = 14$

Ответ: 14

55.

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Т.к. любая из цифр числа < 10 то число может
 состоять из таких наборов.

1) $2, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 1$

2) $2, 4, 5, 5, 5, 7, 1, 1$

3) $8, 5, 5, 5, 7, 1, 1, 1$

Посчитаем каждый из 3-х
 случаев. ~~то~~ ~~какой~~ ~~мы~~ ~~мы~~

1) $8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 20$ мы
можем
поставить
какие числа

2) $8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10$

3) $8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 20$

Всего - $8 \cdot 7 \cdot 20 + 8 \cdot 7 \cdot 20 + 8 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 3 =$

$= (8 \cdot 7 \cdot 20) (1 + 1 + 3) = 8 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 5 = 5600$

Ответ: 5600

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$\text{по теореме } x_1 = -5 \quad x_2 = 2$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

при $x = -5$ $0 = 0$ - верно

при $x \neq -5$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$x^3-16x+25 = 4(x^2+4-2x)$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2+16-8x$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

Заметим, что при $x=3$

$$9 \cdot 3 - 4 \cdot 9 + 9 = 0 \text{ - верно } \Rightarrow x^3-4x^2+9 : (x-3)$$

$$\begin{array}{r} \text{Сократим: } x^3-4x^2+9 \mid x-3 \\ \underline{-x^3+3x^2} \quad \mid x^2-x+3 \\ -x^2+9 \quad \mid \\ \underline{-x^2+3x} \quad \mid \\ -3x+9 \quad \mid \\ \underline{-3x+9} \quad \mid \\ 0 \end{array}$$

$$x^2-x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad x_3 = -5 \quad x_4 = 3$$

54

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0$$

Рассмотрим 2 варианта

1) $x+1 \leq 0 \quad x \leq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

~~6x^4~~ Докажем, что $6x^4 \geq 5x^3$ и $6x^2 \geq 2x$
 сократим на x^3 $3x \leq 1$ сократим на x
 $6x^4 \leq 5x^3$ т.к. $x \leq 0$ $-3x \leq -1$ - верно
 $-6 \leq -5$ - верно
 $-2 \leq -1$ - верно
 $6x \leq -6 \leq -5$ - верно

Следовательно при $x \leq -1$ неравенство верно при любых знач. x

2) $x+1 > 0 \quad x > -1$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

при $x=1$ $6-5-4+2+1=0$ - верно

при $x \neq 1$ сократим на $x-1$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 : x-1 \\ \underline{6x^4 - 6x^3} \\ x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -3x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0$$

$$3x(x^2-1) + x^2-1 \geq 0$$

$$(3x+1)(x-1)(x+1) \geq 0$$

~~$$3x+1 \geq 0$$~~
$$x+1 > 0$$

при $3x+1 \geq 0 \quad x \geq -\frac{1}{3}$
 $x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \leq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6 - 5 + 6 - 2 + 1$$

$$12225557$$

$$6x^4 \geq 5x^3$$

$$x \geq 1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$4 \uparrow$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 4 \cdot 6 + 4 + 1 \geq 0$$

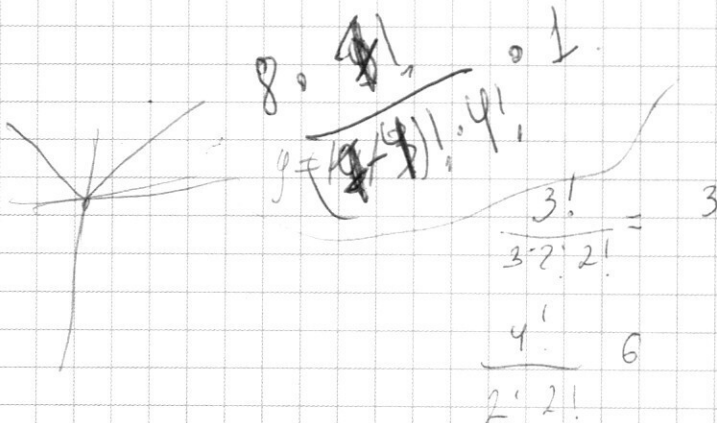
$$5 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 5$$

$$5(17 - 8 - 8) > 0$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0$$

$$2) 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$



$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{40320}{120 \cdot 6} = 280$$

$$7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 21$$

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

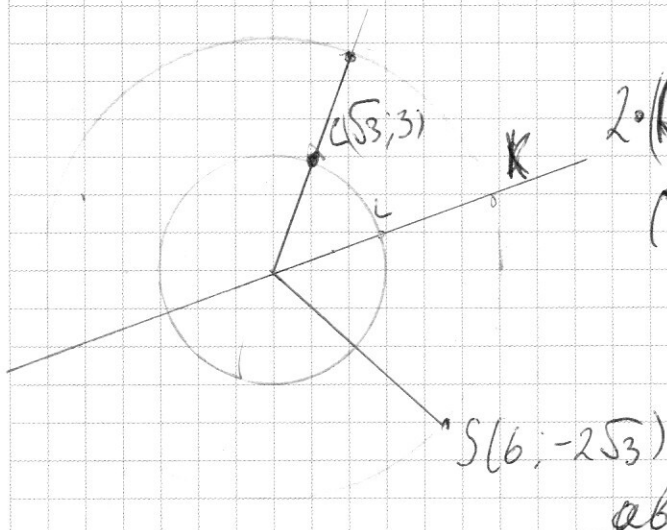
$$8 - 2 = 6$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

$$6 - 3 = 3$$

$$L(a; \sqrt{12-a^2})$$

$$K = (b; \sqrt{48-b^2})$$



$$2 \cdot ((3-a)^2 + (3-\sqrt{12-a^2})^2) =$$

$$(b-b)^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{48-b^2})^2$$

$$\{(a-b)^2 + (\sqrt{12-a^2} - \sqrt{48-b^2})^2 = 2\sqrt{3}\}$$

$$2(3+a^2 - 2a\sqrt{3} + 9 + 12 - a^2 - 6\sqrt{12-a^2}) = 6^2 + 36 - 12b + 48 - 4a\sqrt{3} - 12\sqrt{12-a^2} = 96 - 12b + 4\sqrt{48-3b^2}$$

$$12 - a\sqrt{3} - 3\sqrt{12-a^2} = 24 - 3b + \sqrt{48-3b^2}$$

$$4\sqrt{3} - a - \sqrt{36-3a^2} = 8\sqrt{3} - \sqrt{36} + \sqrt{48-b^2}$$

$$ab + 3\sqrt{b} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}b = 4\sqrt{3} + a + \sqrt{36-a^2} + \sqrt{48-b^2}$$

$$(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = 2x^2 + 6x - 20$$

$$\frac{1}{4}(x+5)^2(x^3-16x+25) = x^4 + 9x^2 + 100 + 6x^3 - 20x^2 - 60x$$

$$\frac{1}{4}(x+5)^2(x^3-16x+25) = x^4 - 11x^2 + 6x^3 - 60x + 100$$

$$16 - 44 + 6 \cdot 16 - 60 \cdot 4 + 100$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

$$x+y+5 + x-y+5 \leq 10 \quad x+y+5 - x-y+5 \leq 10$$

$$2x+10 \leq 10$$

$$2x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$-13 \leq |x|-5 \leq 13 \quad -13 \leq |y|-12 \leq 13$$

$$-8 \leq |x| \leq 18 \quad -1 \leq |y| \leq 25$$

$$x+y+5 \leq 0$$

$$x > 4$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

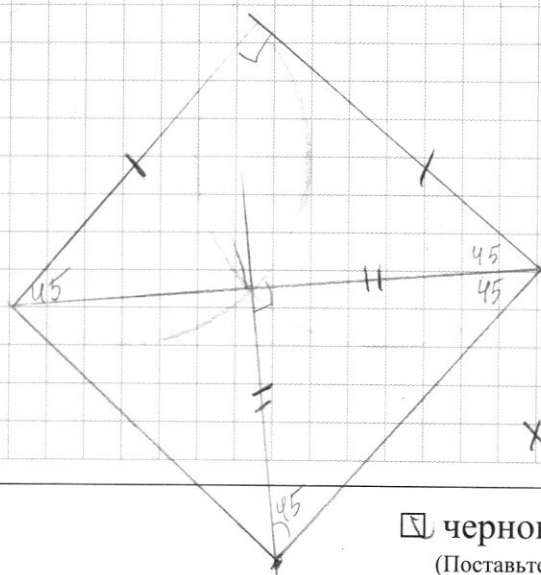
$$6 - 5 - 4 + 2 + 1 = 0$$

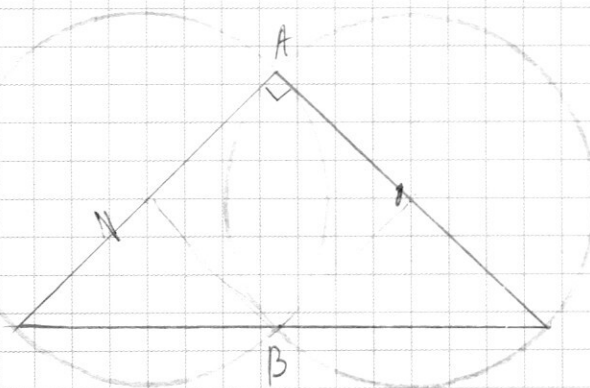
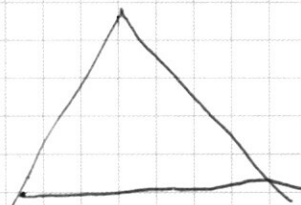
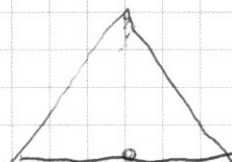
$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 : x-1 \\ \underline{-6x^4 + 6x^3} \\ x^3 - 4x^2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -3x^2 + 2x \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 = (x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1)$$

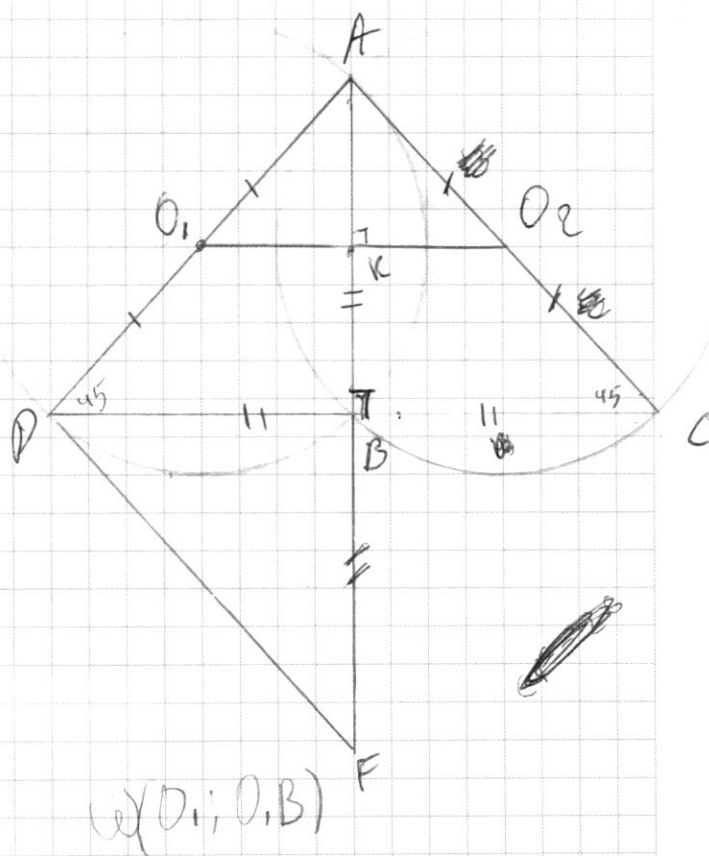
$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 = (x-1)(6x^2 + x - 3)$$

$$x(6x^2 + x - 3) = 13 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1+\sqrt{23}}{2}$$





$$f \circ B = BC =$$



$$24 = 2 \cdot 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

abcdekl

$$\begin{array}{r} 7000 \\ 3500 \end{array} \bigg| 2$$

$$7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2000$$

$$204 \cdot 9 = 8 \cdot 4$$

32 fm.

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$8 \cdot 3$$

$$12 = 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 2 = 6$$

$$(a-b)(2x-by) + 3(2y-bx) = a-1$$

$$222 \quad 555 \quad 7 \quad 1$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 5 \quad 7$$

$$4 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 1$$

$$8 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3 \cdot 8!$$

$$\frac{2}{3}a + 6y = a$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$b=0 \quad \begin{cases} 2ax + 6y = a \\ 3x + by = 1 \end{cases}$$

$$3x + by = 1 \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3x + (a-b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{b}$$

$$(a-b) = b$$

$$\begin{cases} (a-b)x + 3y = a/2 \\ 3x + (a-b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$3x + (a-b)y = \frac{1}{b}$$

$$2(a-b)x + 6y - a = 3x + (a-b)y - \frac{1}{b}$$

$$a-b = x$$

$$2(a-b) =$$

$$(a-b)x$$

$$(a-b)x + 3y - a/2 = 3x + (a-b)y - \frac{1}{b}$$

$$a-b+3=0$$

$$(a-b)(x-y) + 3(x-y) = \frac{a}{2} - \frac{1}{b}$$

$$a = b+3$$

$$(a-b+3)(x-y) = \frac{ab}{2} - 1$$

при $b \neq 0$

$$2(a-b)x + by = a$$

$$3bx + (a-b)by = 1$$

$$(a-b)x + by = a/2$$

$$3x + (a-b)y = 1/b$$

$$(a-b+3)x + (a-b+3)y = a/2 + 1/b$$

$$(a-b+3)(x+y) = \frac{a}{2} + \frac{1}{b}$$

$$a-b+3=0$$

$$a=b+3$$

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{ab+2}{2b} = 0$$

$$ab+2=0$$

$$ab=-2$$

$$(b+3)b=-2$$

$$b^2+3b-2=0$$

$$D=9+8=17 \quad \sqrt{D}=\sqrt{17}$$

$$1) x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad a=3,5$$

$$2) x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \quad a=-0,5$$

$$1) 2 \cdot 3 + 6y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$$1) 2 \cdot 3 x + 6y = 3,5$$

$$1,5x + 1,5y = 1$$

$$6x + 6y = 3,5$$

$$6x + 6y = 4$$

$$2) 2 \cdot 3 x + 6y = -0,5$$

$$-10,5x - 10,5y = 1$$

$$10,5x + 10,5y = 0$$

$$= \frac{4}{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} =$$

8 45
2.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. \begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases} \quad \begin{matrix} (|x|-5)^2 \leq 13 & (|y|-12)^2 \leq 13 \\ -13 \leq |x|-5 \leq 13 & -13 \leq |y|-12 \leq 13 \\ -8 \leq |x| \leq 18 & -1 \leq |y| \leq 25 \end{matrix}$$

Рассмотрим все возможные значения.

$$1) \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x+y-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x-y+5| \leq 10 \\ -10 \leq x-y+5 \leq 10 \end{cases}$$

$$10 \leq 2x+10 \leq 20$$

$$0 \leq 2x \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$10 \leq x \leq 15$$

$$-5 \leq |x|-5 \leq 0$$

$$0 \leq (|x|-5)^2 \leq 25$$

$$-15 \leq x-y \leq 5$$

$$-10 \leq x+y+5 \leq 10$$

$$-15 \leq x+y \leq 5$$

$$8 \leq |x| \leq 18$$

$$1 \leq |y| \leq 25$$

$$(|x|-5)^2 = (13-|y|+12)(13+|y|-12)$$

$$(|x|-5)^2 = (25-|y|)(|y|+1)$$

$$(|x|-5)^2 = 24|y| - y^2 + 25$$

$$y^2 - 24|y| = (5+|x|-5)(5-|x|+5)$$

$$y^2 - 24|y| = |x| \cdot (10-|x|)$$

$$y^2 - 24|y| = 10 \cdot |x| - x^2$$

$$y^2 + x^2 - 24|y| = 10|x|$$

$$y^2 + x^2 = 10|x| + 24|y|$$

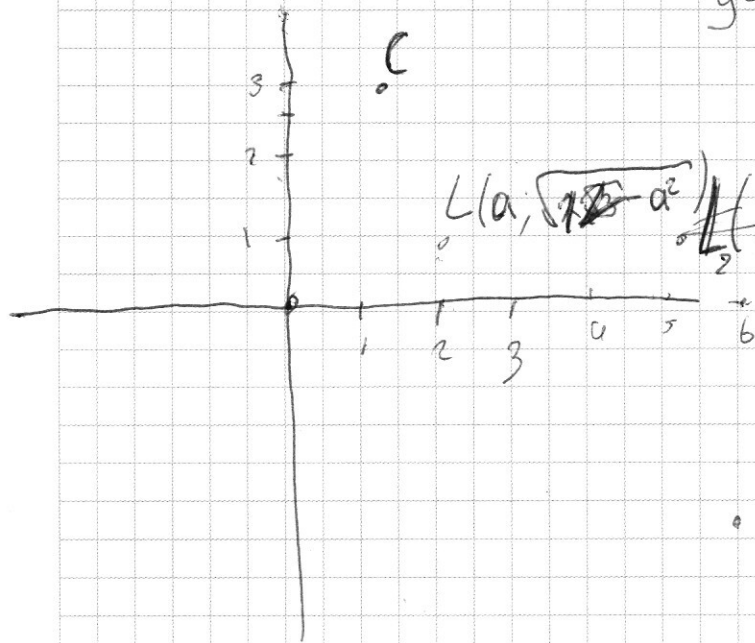
$$x > 0 \quad y^2 + x^2 = 10x$$

$$y^2 =$$

$$1) x > 0, y > 0$$

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 169$$

горизонтальная окружность
на координатах.



$$R_1^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 3 + 9 = 12$$

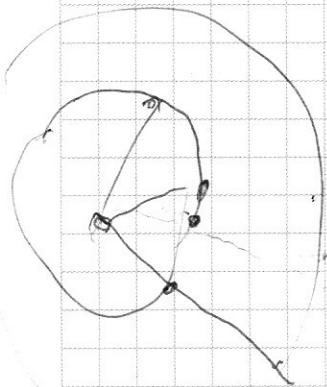
$$R_1 = 2\sqrt{3}$$

$$R_2^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 =$$

$$= 36 + 12 = 48$$

$$R = 4\sqrt{3}$$

• S $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
Длина окружности за
время t.



$$x_3^2 + y_3^2 = 12$$

$$y_3 = \sqrt{12 - x_3^2}$$

$$b^2 + y_0^2 = 48$$

$$y_0 = \sqrt{48 - b^2}$$

$$\frac{2\pi R_1}{k} = \frac{2\pi R_2}{l}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{k} = \frac{4\sqrt{3}}{l}$$

$$2\sqrt{3} l = 4\sqrt{3} k$$

$$l = 2k$$

$$L_2 = (a - b)^2 + (\sqrt{12 - a^2} - \sqrt{48 - b^2})^2 = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 12 - a^2 + 48 - b^2 - 2\sqrt{(12 - a^2)(48 - b^2)} = 2\sqrt{3}$$

$$2ab + 2\sqrt{(12 - a^2)(48 - b^2)} = 60 - 2\sqrt{3}$$

$$ab + \sqrt{(12 - a^2)(48 - b^2)} = 30 - \sqrt{3}$$