

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

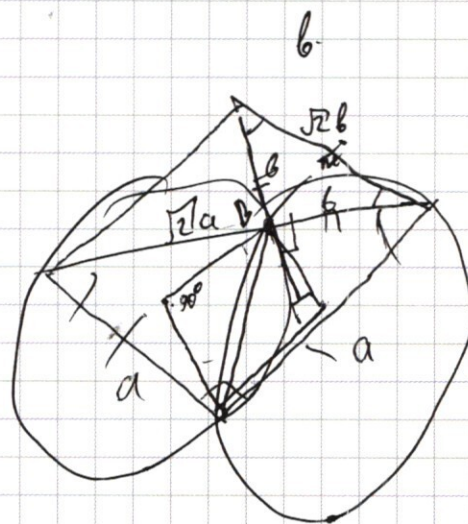
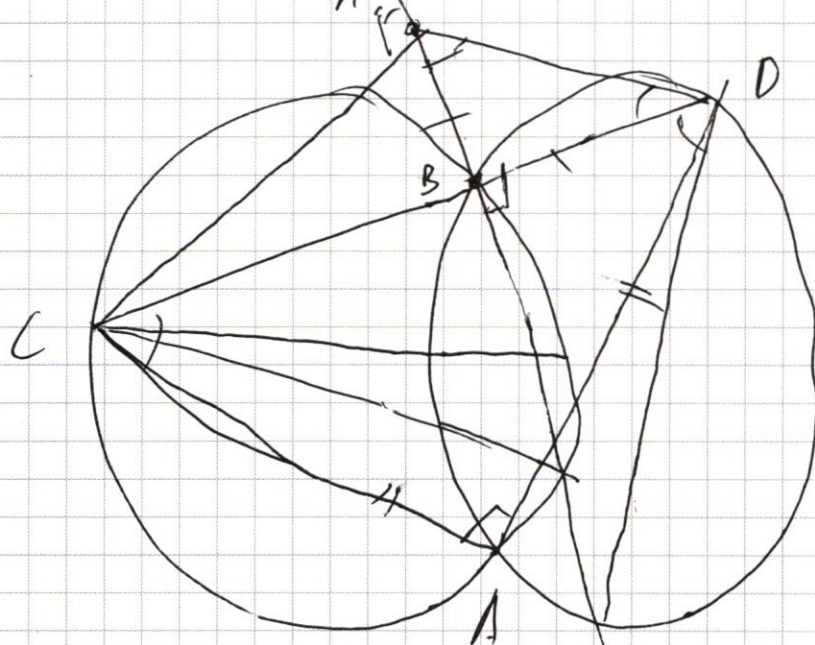
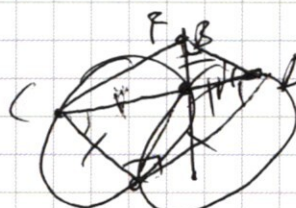
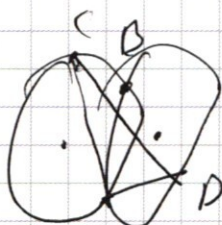
$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

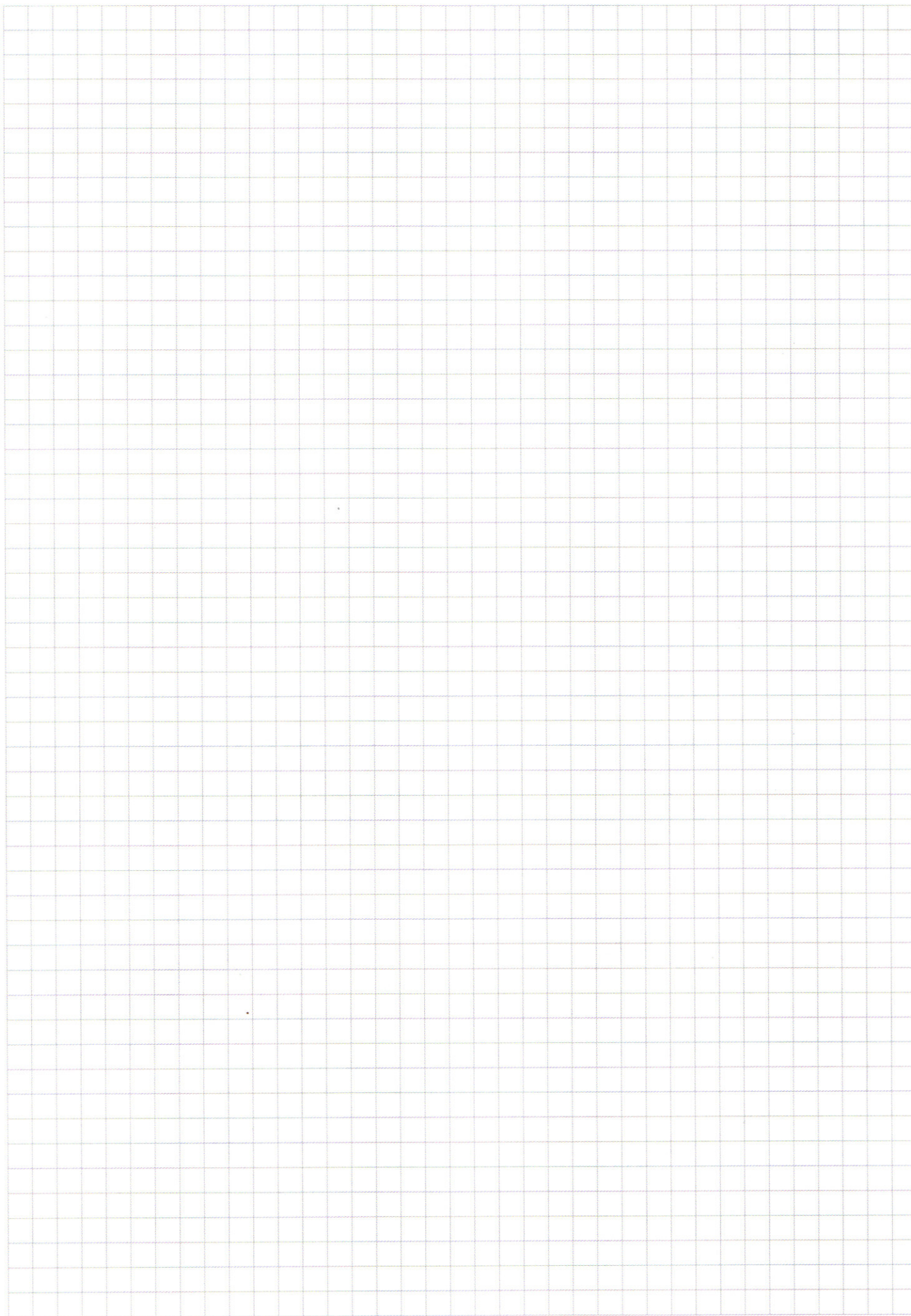
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)

$$x^2 - 10|x| + y^2 - 20|y| = 0$$

$$\begin{cases} x - y + 5 \geq 0 \\ x + y + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y - 5 \\ x \geq -y - 5 \end{cases}$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $6x^4 - 5x^3 + x^2$
 $x^2(x-3)(x-2)$
 $-5x^2 + 2x + 1$

$x \leq (y+5)$
 $|x+(y+5)| + |x-(y+5)| \leq 10$
 $(x^2 - (y+5)^2) + (x - (y+5))^2 \leq 10$

120 $3\beta = 40^\circ$
 $3\beta = 90^\circ$ $\angle = 80^\circ$
 $(2\pi - \angle) \cdot R_1$ $\beta = 30^\circ$
 $(2\pi - \angle) \cdot R_2$ $\angle = 60^\circ$

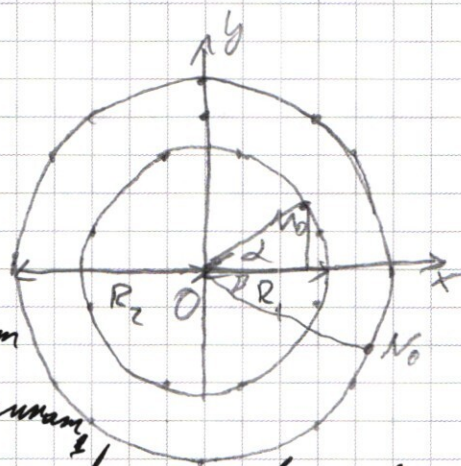
$t = \frac{S}{V_0}$
 $t_1 = t_2$ $3+9 = R_c$
 $S_1 = S_2$ $2\pi - R_c$
 $36 + 12 = R_2^2$
 $4\beta = R_2^2$ $6x^4 + 3x^3 - x(x-y+5) \leq 10$
 $R_2 = 4\sqrt{3}$ $-2x^2 - 2x + 2x + 1$
 $2\sqrt{3} - \angle = 4\sqrt{3}/\beta$ $2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3}$
 $\angle = 2\beta$ $2\pi \cdot 4\sqrt{3}$

$6x^4 + 5x^3 + x^2$ $\gamma \cdot R = \frac{(x-2)R}{\sqrt{3}}$ $t_1 = 2t_2$ $1 \pm \sqrt{3}$
 $x^2 - 10x + 1 \pm 25 + y^2 - 24|y| + 144 = 165$ $(3x)(2x) \cdot (2x+1)$
 $2 \cdot R_1 = \gamma R_2 + 2\pi R_2$ $2ax - 2bx + 6y = a$ $x^2 + y^2 - 10x + 24y = 0$
 $x^2(6x-1)(x+1)$ $2x - 2bx + 6y = a$ $(x-1)(2x+1)$
 $3 \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{y} + 2(a-b)x = \frac{2x}{6y}$ $a(2x-1) = 2bx - 6y$ $2bx - 6y$
 $3 \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{y} - 6y = \frac{2x}{6y} - a$ $3\gamma = 4\pi$ $3x^2(2x^2-1) - (x^2-1)$
 $6^2y - 6y^2 = (2x-1)(1-36x)$ $3bx + \frac{(2bx-2bx+6-6y)}{2x-1} \cdot 6y$
 $6bx^2 - 36x + 6^2y - 6y^2 = 4x - 1$

$\sqrt{2} \sqrt{4} \sqrt{1} \sqrt{7}$
 $2(a-6)x - (a-6)6y + 6y + 1 - a - 36x = 0$
 $\frac{1}{2}(x+5) \sqrt{\dots}$
 $2ax - aby - a - 26x - 36y + 1 = 0$
 $x^2 - 3x - 10 = (x+5)(x-2)$
 $x=5$
 $a(2x-6y-1) - b(2x-6y-1) = 0$
 $\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2x - 4$
 $(a-b)(2x-6y-1) + (6x+6y+1) = 0$
 $\begin{cases} 2x \geq 4 \\ x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 - 4x^2 + 9 = 0 \end{cases}$
 $x^3 - 4x^2 + 9 = 0$
 $x^3 - 5x^2 + x - 3x^2 + x + 9 = 0$
 $x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 6x + 9 = 0$
 $x(x+1)^2 - 1$
 $2^4 = 16 = 4^2$
 $x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 9x + 9 = 0$
 $x(x-3)^2 + (2x-1)(x)$
 $x^3 - 3x^2 + 9 - x^2 = 0$
 $x^2(x-3) + (3-x)(3x) = 0$
 $(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$
 $x^2 - x - 3 = 0$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $\sqrt{13} > 3$
 $\frac{2x}{6y} = \frac{a-6y}{1-36x}$
 $2x - 6bx^2 = a6y - 66y^2$
 $(a-6) = \frac{a-6y}{2x}$
 $3^8 = 9^4 = 81^2$
 $2^8 = 4^4 = 16^2$
 $6 = \frac{2ax - aby}{2x}$
 $125 - 80 = 81^2$
 $x \geq -17$
 $x(x^2 - 16) \geq -25$
 $66x = 6ax + 36y - 3a$
 $2x - 5x^2(x+1) + 120$
 $x^3 - 16x + 25 \geq 0$
 $x(x^2 - 16) \geq -25$
 $x(x-4)(x+4) \geq -25$
 $x(x+4)(x+4) \leq 15$
 $\frac{25}{x(x+4)} > 0 \Leftrightarrow$
 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
 $6x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x^2 + 2x + 1$
 $x^3 - 9x$
 $x^2(3x-1)(2x-1) \neq 5x \neq 1$
 $6x^4 - 4x^3 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 120$
 $6x^4 - 5x^3 - 5x$
 $2x^2(3x^2 - 2) + x(2 - 5x^2) + 120$
 $2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$
 $3 \cdot 2 = 6$
 $x = -5; x = 3$
 $\frac{1 + \sqrt{37}}{2}$
 $\frac{12}{4} - 3 = 0$
 $\frac{1 + 13 + 2\sqrt{37}}{4}$
 $\frac{2 + 2\sqrt{37}}{4} - 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Пусть R_1 - радиус окружности, по которой летает синица, а R_2 - радиус окружности, по которой летает снегирь.



П.к. окружность, по которой летает синица, находится в центре координат и проходит через точку $M_0(3; 3)$, по чему равенство:
 $x_1^2 + y_1^2 = R_1^2$, где x_1 - координата точки M_0 по оси x , а y_1 - координата M_0 по оси y .

$$3^2 + 3^2 = R_1^2 \Leftrightarrow R_1 = \sqrt{12} \Leftrightarrow R_1 = 2\sqrt{3}$$

П.к. окружность, по которой летает снегирь находится в центре координат, и проходит через точку $N_0(6; -2\sqrt{3})$, по чему равенство:

$x_2^2 + y_2^2 = R_2^2$, где x_2 - координата точки N_0 по оси x , а y_2 - координата N_0 по оси y .

$$36 + 12 = R_2^2 \Leftrightarrow R_2 = \sqrt{48} \Leftrightarrow R_2 = 4\sqrt{3}$$

Угол α - угол между осью абсцисс и радиусом OM_0 .

$$\sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ \quad \sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$$

Угол β - центральный угол, между N_0 и осью x .

$$\sin \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \beta = -30^\circ$$

Угол между N_0 и M_0 равен $|\alpha| + |\beta| = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Пусть они встретились через время t_0 они встретились, тогда $\frac{S_1}{v_0} = \frac{S_2}{v_0}$, где S_1 - путь пройденный светом линзой, а S_2 - путь пройденный светом, а v_0 - скорость света линзу

$\frac{S_1}{v_0} = \frac{S_2}{v_0} \Rightarrow S_1 = S_2 = \gamma \cdot R_1 = (\frac{\pi}{2} - \gamma) R_2$, где γ - угол, который прошла линза до кратчайшего расстояния между линзами (между линзы линзами кратчайшее расстояние, когда центральные углы между линзы и осью x равны)

$\gamma = (\frac{\pi}{2} - \gamma) \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \gamma = (\frac{\pi}{2} - \gamma) \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = \pi - 2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma = 60^\circ$, значит линзы были на кратчайшем расстоянии, когда были на оси x , при их перемещении по оси x перемещались, но ось x $Q_1 = (4\sqrt{3}; 0)$, где Q_1 - точка, при которой расстояние кратчайшее.

Пусть прошло время t_1 до их следующей встречи, тогда $\frac{S_3}{v_0} = \frac{S_4}{v_0}$, где S_3 - путь пройденный линзой, а S_4 - путь пройденный светом.

$$\frac{S_3}{v_0} = \frac{S_4}{v_0} \Rightarrow S_3 = S_4 \Rightarrow \gamma \cdot R_1 = (2\pi - \gamma) \cdot R_2, \text{ где } \gamma - \text{угол, который}$$

прошла линза до встречи точки кратчайшего расстояния между линзами.

$$\gamma = (2\pi - \gamma) \cdot \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow 3\gamma = 4\pi \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}\pi, \text{ и. значит прошли}$$

$160^\circ - \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ то, и каждая следующая точка кратчайшего расстояния будет на через 120° от предыдущей, но есть на 120° , на 240° , на 0°

$$Q_2 (\sin 120^\circ \cdot R_2; \cos 120^\circ \cdot R_2) \Rightarrow Q_2 (-2\sqrt{3}; 6), \text{ где } Q_2 - \text{вторая точка}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$Q_3 \left(\cos 240^\circ R_2; \sin 240^\circ R_2 \right) \Rightarrow Q_2(-2\sqrt{3}; -6)$$

$$\text{Ответ: } \{(2\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; -6); (-2\sqrt{3}; 6)\}$$

$$3) \frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$1) x = -5$$

$$2) x = -5$$

$$0 \in 10 = 0 - \text{верно}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3-4x^2+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3-3x^2+9-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2(x-3)-(x-3)(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x^2-x-3)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} > 2, \text{ т.к. } \sqrt{13} > \sqrt{9} \geq 3 \\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Проверка на определенность $x^3-16x+25 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3(x^2-16)+25 \geq 0 \quad \text{Для } x = -5: 5 \cdot 9 + 25 \geq 0 - \text{верно}$$

$$\text{Для } x = 3: -3 \cdot 7 + 25 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 0 - \text{верно}$$

$$\text{Для } x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) + 25 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{18}{2} (1+\sqrt{3}) \left(\frac{2\sqrt{3}-16}{1} \right) + 100 \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 26 - 18 - 18\sqrt{3} + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$82 - 16\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow 59 \geq 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 59 \geq 16 = 4 \cdot 4 = 4 \cdot \sqrt{16} > 4\sqrt{3} - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}; 3; 5 \right\}$$

5) Разложим число 2000 на 5 натуральных множителей;

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$, т.е. ^{возможные} число будет состоять из таких чистых чисел. 7 можно поместить на всевозможные позиции, 1 можно поместить на все оставшиеся позиции.

Для то чтобы разместить двойки на 6 оставшихся позиций получится всего $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 20$ и, следовательно, всего вариантов размещения этих цифр в возможное возможное число будет $8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$

Ответ: 1120 чисел

$$4) 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 / (x+1)(x-1) \geq 0$$

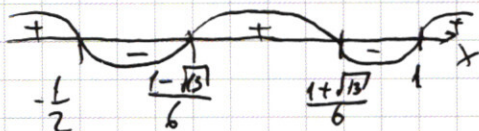
$$1) \text{ при } x < 0 \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 6x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(6x+1)(x-1) - (3x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)(3x^2 - x - 1) \geq 0$$



$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \text{ - корни уравнения } 3x^2 - x - 1$$

$$(\text{если } x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right), \text{ то } x^2 - x - 1 < 0)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$2) x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{т.к. } 6x^4 > 5x^3 \Leftrightarrow$$

$$6x < 5 \Leftrightarrow 6x < 5 - \text{верно}$$

$$6x^2 \geq 2x \Leftrightarrow$$

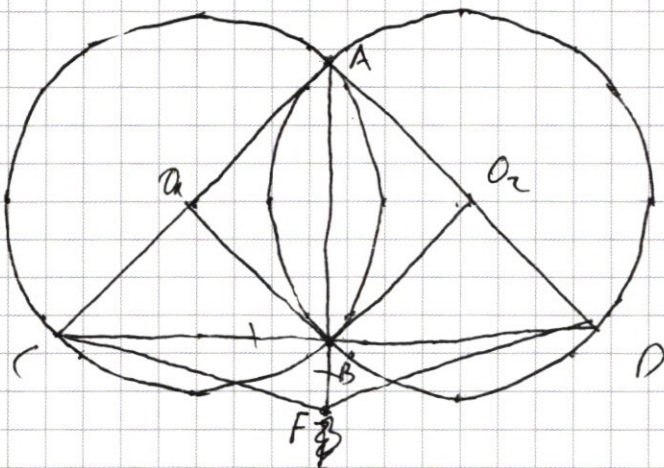
$$3x < 2 \Leftrightarrow 3x < 2 - \text{верно}$$

и. выражение

• - верно всегда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



П.к. уг. $\angle ACB$ и $\angle ADB$
опираются на одну
и те же дуги в одинаковых
окружностях, но они
равны

$$\angle ACB + \angle ADB + \angle CAD = 180^\circ \text{ (по сумме уг. т.р.)} \Rightarrow$$

$$2\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

O_1 и O_2 — центры окружностей

П.к. $O_1B = O_1A$, но $\angle O_1AB = \angle O_1BA$

$$\angle O_1AB + \angle O_1BA + \angle AO_1B = 180^\circ \Rightarrow 2\angle O_1AB = 2\angle ACB \text{ (внеш.)}$$

$$\Rightarrow \angle O_1AB = 45^\circ$$

Аналогично для $O_2 \Rightarrow \angle O_2AB = 45^\circ$, сл.

O_1 лежит на AC ; O_2 лежит на $AD \Rightarrow AC = AD = 7$

$$\angle O_2BD = 180^\circ - \angle BO_2D - \angle O_2DB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$$

A лежит на BF

$$\angle B = \angle D \quad (\angle CO_1B = \angle DO_2B)$$

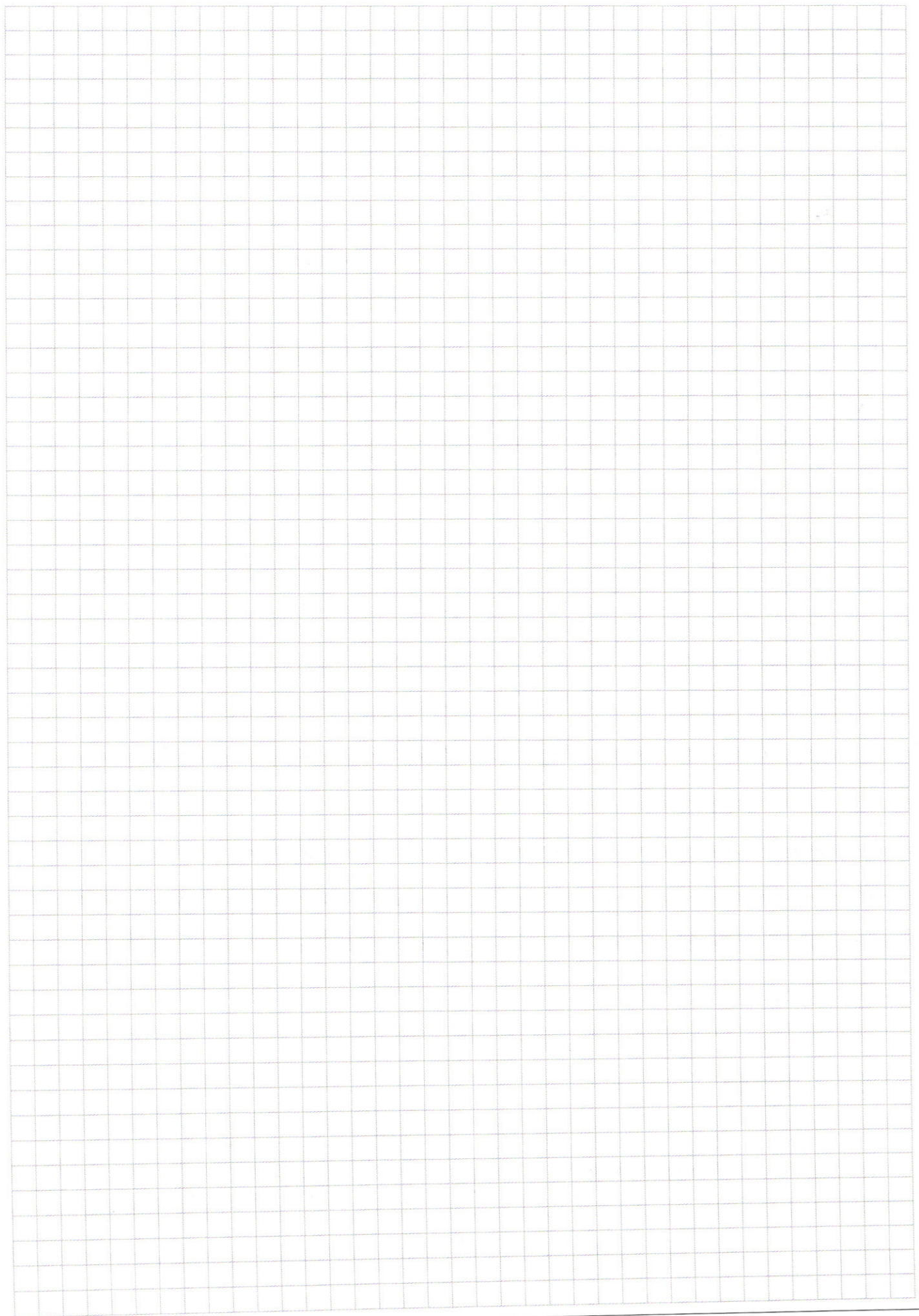
$$CB = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{2} \cdot 7$$

$$CF = FD \quad (\angle CBF = \angle DBF) \Rightarrow CB = DB$$

(прям уг. и з.мер)

$$(F = \sqrt{2} \cdot 7) \Rightarrow CF = 14$$

Ответ: $CF = 14$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)