

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

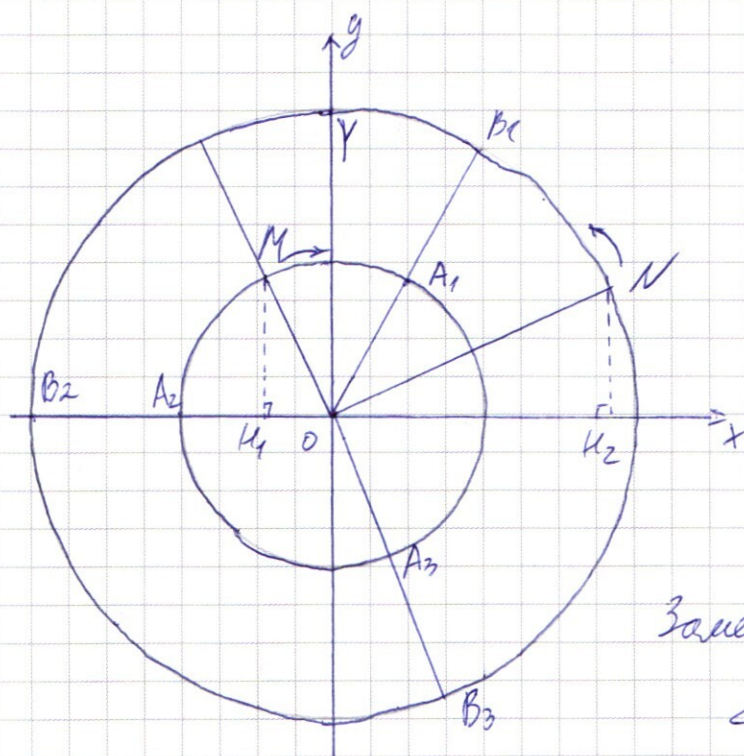
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N1

$$M(-1; \sqrt{3}), N(2\sqrt{3}; 2)$$

Найдём радиус окружности по теореме Пифагора из треугольников OMK_1 и ONK_2 .

$$OM^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

$$OM = 2$$

$$ON^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16$$

$$ON = 4$$

Заметим, что $\cos \angle MOK_1 = \frac{1}{2}$, значит $\angle MOK_1 = 60^\circ$

$$\cos \angle NOK_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle NOK_2 = 30^\circ$$

$$\angle MON = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

Достаточно очевидно, что минимальное расстояние между муравьём и жуком достигается тогда и только тогда, когда муравей, жук и общий центр окружностей лежат на одной прямой.

$$\omega_M = \frac{v}{OM} = \frac{v}{2} = 2\omega - \text{угловая скорость муравья}$$

$$\omega_m = \frac{v}{ON} = \frac{v}{4} = \omega - \text{угловая скорость жука.}$$

$$t_1 = \frac{90^\circ}{2\omega + \omega} = \frac{90^\circ}{3\omega} - \text{время до 1 встречи}$$

$$\alpha_{1M} = 2\omega \cdot \frac{90^\circ}{3\omega} = 60^\circ - \text{угол, который пройдёт муравей до 1 встречи в точках } A_1 \text{ и } B_1$$

$$\angle B_1OK_2 = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

Зная угол и радиус окружности, определим координаты точки B_1 .

$$y_1 = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$B_1(2; 2\sqrt{3})$$

Теперь рассчитаем координаты B_2 точки следующей "встречи". Угол между муравьем и мурав 360°, градус будет 0°.

$$t_2 = \frac{360^\circ}{3\omega} \quad \alpha_{2м} = \omega \cdot \frac{360^\circ}{3\omega} = 120^\circ$$

Мурав пройдет 120°. Заметим, что $\angle B_1 O Y = 30^\circ$, $\angle Y O K_1 = 90^\circ$ а сумма этих углов равна 120°. Значит в момент второй "встречи" мурав окажется на прямой OK_1 , то есть на оси x . Поэтому координаты точки B_2 :

$$x_2 = -4$$

$$y_2 = 0$$

$$B_2 (-4; 0)$$

Между муравом и муравьем вновь 360°, значит до третьей "встречи" мурав вновь пройдет 120°. Тогда острый угол между OB_3 и осью x равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Рассчитаем координаты точки B_3 .

$$x_3 = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$y_3 = -4 \cdot \sin 60^\circ = -2\sqrt{3}$$

$$B_3 (2; -2\sqrt{3})$$

До четвертой "встречи" рассуждаем аналогично, мурав вновь пройдет 120°. Но заметим, что угол между OB_3 и OB_1 равен 120°. Значит четвертая "встреча" произойдет в тех же точках, что и первая. Так мы вернулись в начало цикла из 3 "встречи".

Ответ: $B_1 (2; 2\sqrt{3})$

$$B_2 (-4; 0)$$

$$B_3 (2; -2\sqrt{3})$$

N2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $b = 0$

Тогда 2 уравнение имеет вид $0 = 1$, оно не имеет решений, как и система в целом.

2) $a+b=0$

Тогда 2 уравнение имеет вид $4bx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4b}$
1 уравнение имеет вид $12y = a \Rightarrow y = \frac{a}{12}$

Так, система имеет 1 решение, это нам не подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$3 \text{ случая) } \begin{cases} b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$$

Из 1 уравнения: $12y = -3(a+b)x + a$

$$y = -\frac{a+b}{4} \cdot x + \frac{a}{12} \quad (1)$$

Из 2 уравнения: $(a+b)b y = 1 - 4bx$

$$y = \frac{1-4bx}{(a+b)b}; \quad (2) \quad y = -\frac{4}{a+b} \cdot x + \frac{1}{(a+b)b}$$

Графики уравнений (1) и (2) — две прямые. Они могут пересекаться, не пересекаться и совпадать. Чтобы система имела бесконечно много решений, прямые должны совпадать. Это произойдет когда коэффициенты при x будут равны, и свободные члены тоже будут равны.

$$\begin{cases} -\frac{a+b}{4} = -\frac{4}{a+b} \\ \frac{1}{(a+b)b} = \frac{a}{12} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{a+b}{4} = \frac{4}{a+b} \\ (a+b)^2 = 16 \\ a+b = \pm 4 \end{cases}$$

1) $a+b=4$

$$\frac{1}{(a+b)b} = \frac{a}{12}$$

$$12 = ab(a+b)$$

$$12 = ab \cdot 4$$

$$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

2) $a+b=-4$

$$\frac{1}{(a+b)b} = \frac{a}{12}$$

$$ab \cdot (a+b) = 12, \quad ab \cdot (-4) = 12$$

$$\begin{cases} ab=-3 \\ a+b=-4 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=-2+\sqrt{7} \\ b=-2-\sqrt{7} \\ a=-2-\sqrt{7} \\ b=-2+\sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $(1; 3), (3; 1), (-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7}), (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7})$.
№3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 \quad \text{По смыслу задачи,}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2) \quad \begin{cases} x^3-x+10 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

При $x = -3$, $x^3-x+10 = -27+3+10 = -14 < 0$, это не удовлетворяет ограничению.

Разделим тогда обе части на $(x+3)$.

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2 \Rightarrow x+2 \geq 0$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+2$$

$$x^3-x^2-5x+8=0$$

Число 2 является решением этого уравнения. Попробуем теорему Безу, разделим многочлен на $x-2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+8 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ \underline{-x^2+5x} & \\ \underline{-x^2+2x} & \\ \underline{-3x+8} & \\ \underline{-3x+6} & \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$x^3-x^2-5x+8 = (x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Корень $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ не удовлетворяет ограничению $x+2 \geq 0$.
Значит уравнение имеет лишь 2 корня.

$$\begin{cases} x=2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5

$$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Восьмизначное число можно составить из цифр 2, 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1. Тогда произведение цифр равно 1400. Но некоторые цифры мы можем объединить, то есть заменить их их произведением, а лишние заменить на 1.

$$2 \cdot 5 = 10 > 9 \text{ - не является цифрой}$$

$$2 \cdot 7 = 14 > 9$$

$$5 \cdot 5 = 25 > 9$$

$$5 \cdot 7 = 35 > 9$$

$$2 \cdot 2 = 4 \text{ - является цифрой}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ - является цифрой.}$$

Значит объединять между собой можно только двойки. Тогда имеем 3 набора цифр, из которых будем составлять числа:

$$1) 1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7$$

$$2) 1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 7$$

$$3) 1, 1, 1, 1, 5, 5, 7, 8$$

1) Выбрать 2 места для единиц можно C_8^2 способами. Выбрать 3 места из оставшихся 6 для двоек можно C_6^3 способами.

Выбрать 2 места из оставшихся 3 для четвёрок можно C_3^2 способами.

На оставшееся 1 место поставим 7. Итого, способов составить число

$$C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 = 28 \cdot 20 \cdot 3 = \cancel{2080}^{1680} \text{ способов}$$

2) Рассуждаем аналогично.

$$C_8^3 \text{ - для единиц}$$

$$C_5^1 \text{ - для двойки}$$

$$C_4^1 \text{ - для четвёрки}$$

$$C_3^2 \text{ - для пятёрки}$$

$$C_1^1 \text{ - для семерки}$$

Всего способов $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 56 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3360$

3) C_8^4 - где единицы C_2^1 - где единицы
 C_4^2 - где четвёрки C_1^1 - где восьмёрки

Всего способов $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$

Суммарное количество способов $1680 + 3360 + 840 =$
 $= 5880$

Ответ: 5880

✓

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | +1 \geq 0$$

1) Если $x-1 \geq 0$
 $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

Заметим, что $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1) \cdot$

$\cdot (2x^2 - x + 1)$.

Действительно, $(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x^3 +$
 $+ x^2 - x + x^2 - x + 1 = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$.

$x^2 - x + 1$ - парабола ветками вверх $\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x$
 $D = -4 + 1 = -3 < 0$

$2x^2 - x + 1$ - парабола с ветками вверх $\Rightarrow 2x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x$
 $D = -4 \cdot 2 + 1 = -7 < 0$

Значит $(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1) > 0$ для любого x .

Т.о., все $x \geq 1$ являются решениями неравенства

2) Если $x-1 < 0$
 $x < 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

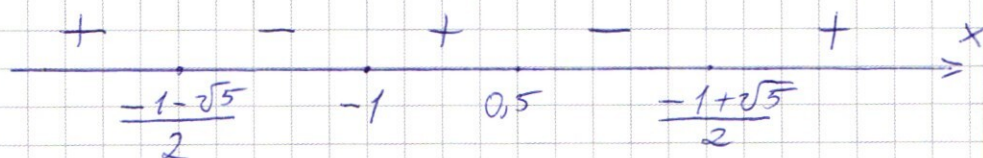
Заметим, что $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1)$.

$$(x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) = 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

$$(x^2 + x - 1) = \left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$(2x^2 + x - 1) = (2x - 1)(x + 1)$$

Тогда применим метод интервалов



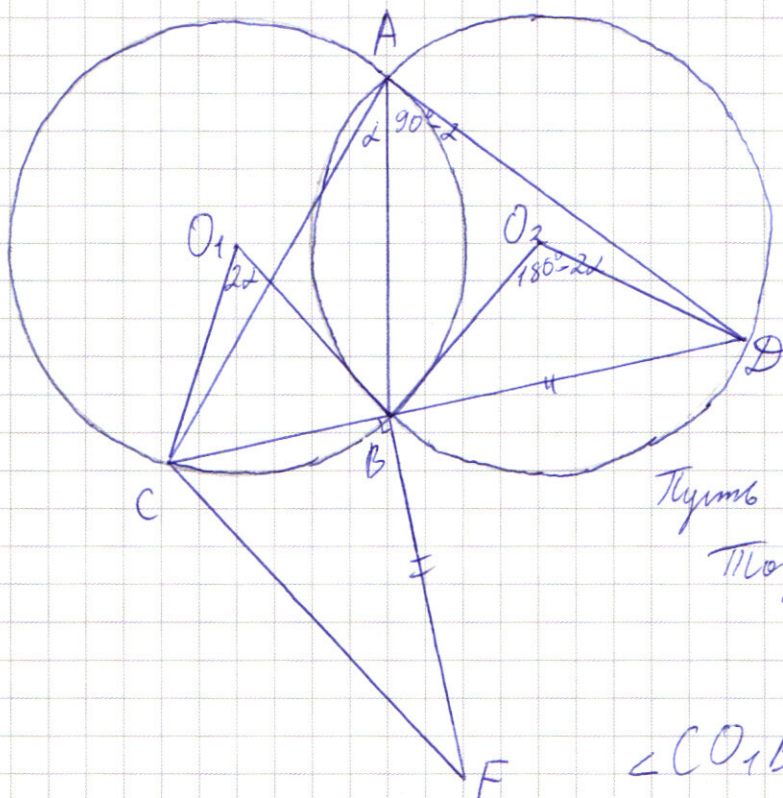
$$\left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) (2x - 1)(x + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 0.5] \cup [\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty)$$

Запишем ответ с учётом 1 и 2 случаев.

$$\text{Ответ: } (-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 0.5] \cup [\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty)$$

№6



Дано:

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$\angle CBF = 90^\circ$$

$$R_1 = R_2 = 9 = R$$

$$CF = ?$$

Решение:

Пусть $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle CB = 2\alpha$

Тогда $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$

$$\Downarrow$$

$$\angle BOD = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle CO_1B = 2\alpha$$

$$\angle BO_2D = 180^\circ - 2\alpha$$

как центральные углы

Теорема косинусов для $\triangle CO_1B$:

$$BC^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\alpha = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$$

Теорема косинусов для $\triangle BO_2D$:

$$BD^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos (180^\circ - 2\alpha) =$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos (180 - 2\alpha) = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha$$

По теореме Пифагора в $\triangle CBF$:

$$CB^2 + BF^2 = CF^2, \text{ но } BF = BD$$

$$CB^2 + BD^2 = CF^2$$

$$CF^2 = (2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha) + (2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha) =$$

$$= 4R^2$$

$$CF = 2R = 18$$

Ответ: 18

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Решите задачу графически. Постройте график
2 уравнение. (График m)

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

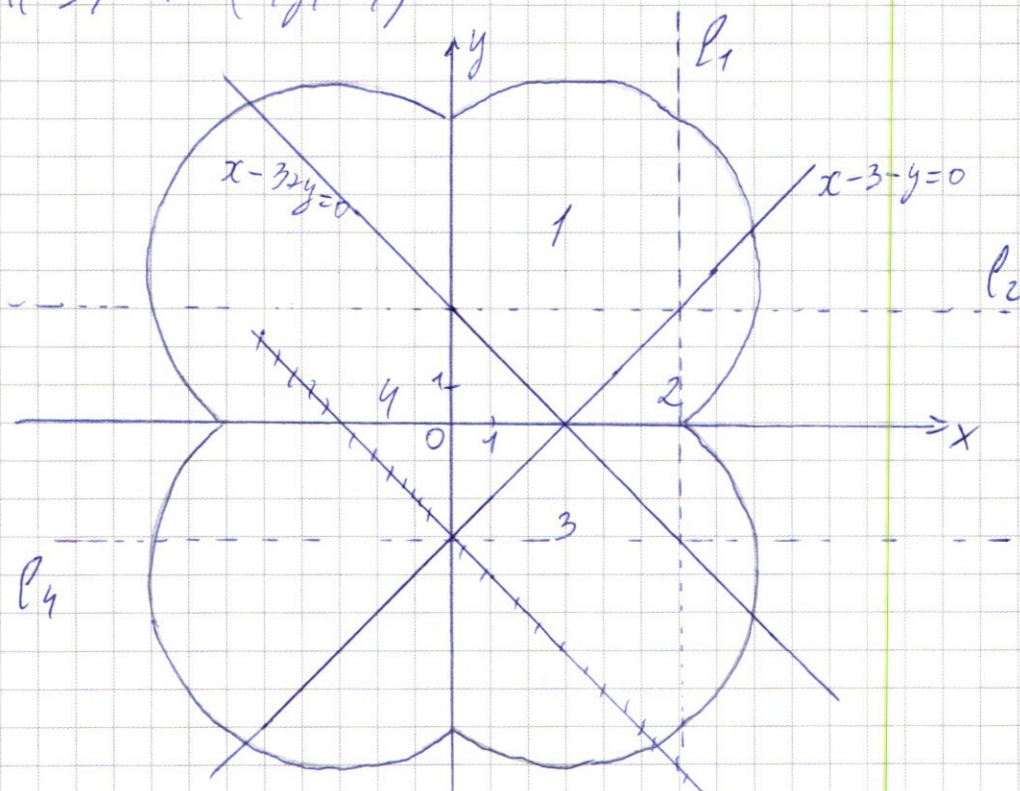


График построили отрезками окружности $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ из 1 четверти во все остальные относительно координатных осей.

В той же системе координат построим график

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y=0 \text{ и } x-3+y=0$$

Эти две прямые разбивают плоскость на части 1, 2, 3, 4.

Для области 1: $2x - 6 \leq 6$

$$x \leq 6$$

Значит решением в этой области будет часть графика m , лежащая в области 1 левее прямой l_1 ^{тогда} (включая ~~при~~ на прямой l_1)

Для области 2: $x - 3 + y - x + 3 + y \leq 6$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

Решением системы в этой области будет часть графика m , лежащая в области 2 ниже прямой l_2 , включая точки на прямой l_2

Для области 3: $-x + 3 + y - x + 3 - y \leq 6$

$$-2x + 6 \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

~~Из области 3 нет ни одного решения системы~~ $x \geq 0$

Для области 4: $-x + 3 - y + x - 3 - y \leq 6$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

Решением системы в этой области будет часть графика m , лежащая в области 4 выше прямой l_4

В области 3 решением системы является часть графика m ~~выше~~ ~~она~~ правее оси y .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$12y = a - 3(a+b)x$$

$$y = -\frac{a+b}{4}x + \frac{a}{12}$$

$$(a+b)by = 1 - 4bx$$

$$y = -\frac{4bx}{(a+b)b} + \frac{1}{(a+b)b} = -\frac{4}{(a+b)}x + \frac{1}{(a+b)b}$$

$$1) \quad 12 = ab \cdot 4$$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 1 \\ 12x + 12y = 1 \end{cases}$$

$$12x + 12y = 3$$

$$4x + 4y = 1$$

$$2) \quad 12 = -4ab$$

$$\begin{cases} ab = -3 \\ a+b = -4 \end{cases}$$

$$a = -4 - b$$

$$(-4-b)b = -3$$

$$-b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$D = -4 \cdot (-3) + 16 = 12 + 16 = 28 = 4 \cdot 7$$

$$b = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$a = -2 - \sqrt{7}$$

$$\frac{4}{a+b} = \frac{a+b}{4}$$

$$16 = (a+b)^2$$

$$a+b = \pm 4$$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b}$$

$$12 = ab(a+b)$$

или наоборот

1) $a+b=0 \Rightarrow$ 2-е уравнение дает x , первое уравнение дает y .

2) $b=0 \Rightarrow$ 2-е уравнение дает x , $3ax + 12y = a$

$$1) x \geq 1$$

$$\frac{8!}{5!} = 56$$

$$\frac{8!}{2!6!} = 28$$

$$\frac{4! \cdot 5!}{3!} = 20$$

$$y = 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$y' = 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 2 = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$

$$y' = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$

$$(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 > 0$$

$$2x^4 > 3x^3$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 > 3x^3 + 2x$$

$$2x^4 + 4x^2 > 3x^3 + 2x$$

$$2x^3 + 4x > 3x^2 + 2$$

$$2x^3 + 4x - 3x^2 - 2 > 0$$

$$16 + 8 - 12 - 2$$

$$16 + 8 - 12 - 2$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$2x^3 - x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1)(2x^2 + x + 1) =$$

$$= 2x^4 + 4x^3 + x^3 + 4x^2 - x + x^2 + 2x + 1$$

$$= 2x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x^3 + 2x^2 - x +$$

$$+ x^2 - 2x + 1 = 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 3x + 1$$

$$2x^3 - x^2 + x > 0$$

$$2x^2 - x + 1 > 0$$

$$-6x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$-3x^2 - 3x =$$

$$= -3x(x+1)$$

$$(x^2 - 2x + 1)(2x^2 - x + 1) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x^3 + x^2 - x + x^2 - x + 1$$

$$= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0 \quad x < 1 \quad -\frac{729}{64} - \frac{9}{4}$$

$$y = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)^2(2x-x+1) - 3x(x+1) =$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 : x + p \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ x^3 + x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

$$(-8 - 4\sqrt{7})x + 4(8 + 4\sqrt{7})y = 1$$

$$8 - 4 - 10 + 8 = -6 \quad -64 - 16 + 20 + 8 = -52 \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad 6 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 3 = -3 \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (2 + \sqrt{5}) \\ & - \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x^3 - x^2} \Big| \frac{x-0,5}{2x^2 + 2x - 2} \quad -16 + 4 + 6 + 1 = -5 = -3 \\ & \quad \frac{2x^2 - 3x}{2x^2 - x} \quad + 4 \cdot (2 + \sqrt{5}) \cdot 2 + 1 = 1,5 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 \right) = -8 + 8 \\ & \quad \quad -2x + 1 \quad = 12 = 4 \cdot 3 = 4 \sqrt{3} \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ & \quad \quad - -2x + 1 \end{aligned}$$

$$D = 5 - \frac{1+5\sqrt{3}}{2} - 8 - 4 + 16 \frac{123}{+8} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + 1$$

$$64 - 16 - 20 \quad 2(x^2 + x - 1) \quad \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} \quad D = 4 + 1 = 5 \quad 0,5, -1$$

$$(x^2 + x - 1)(2x^2 + 2x + 1) \geq 0 \quad -64 - 16 + 208x = \frac{8}{5} \quad \frac{512}{125} - \frac{64}{25} - 8 + 8$$

$$(x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) \geq 0 \quad \frac{1}{2} \quad (2x - 0,5)(x + 1) =$$

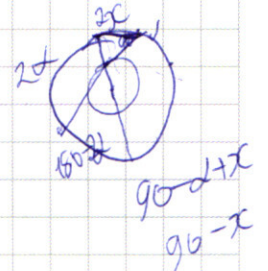
$$512 - 64 - 40 + 8 = x^2 + 0,5x + 0,5$$

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \div 5 \\ 35 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{y}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = 2\sqrt{3}$$

$$1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$



$$1) C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1$$

$$2) C_4$$

$$BC^2 = 81 + 81 - 81 \cos 2$$

$$BD^2 =$$

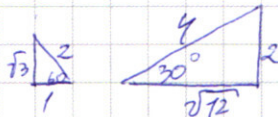
$$1400 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$$

$$D = 4 \cdot 3 + 16 = 28 = 4 \cdot 7$$

$$1400 = 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$$



$$y = 180 + 2x - 2$$

$$z = 2x + 2$$

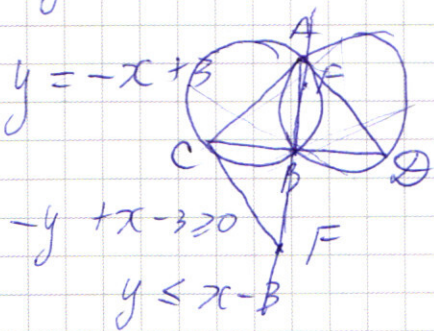
$$R_M = 2$$

$$R_M = 4$$

$$\omega_M = \frac{v^2}{2} = 2\omega$$

$$\omega_M = \frac{v^2}{4} = \omega$$

$$y + x - 3 \geq 0$$



$$2x - 6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

