

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках  $M_0(\sqrt{3}; 3)$  и  $N_0(6; -2\sqrt{3})$  соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.
- ✓ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров  $a$  и  $b$ , при каждой из которых система уравнений
- $$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$
- имеет бесконечно много решений.
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение  $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$ .
- ✓ 4. [6 баллов] Решите неравенство  $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$ .
- ✓ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(3) \quad \frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$\frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x(x-4)(x+4) + 25} = (x-2)(x+5)$$

$$(x+5) \left( \frac{1}{2} \sqrt{x(x-4)(x+4) + 25} - (x-2) \right) = 0$$

$$x+5=0$$

$x = -5$   
не подходит  
по ОДЗ

$$\text{или} \quad \frac{1}{2} \sqrt{x(x-4)(x+4) + 25} - (x-2) = 0$$

$$\sqrt{x(x-4)(x+4) + 25} = 2x - 4$$

$$x(x-4)(x+4) + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x = 3 \quad (x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -x^2 + 9 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -3x + 9 \\ -3x + 9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ x-3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 3 \\ x^2 - x - 3 \end{array}$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Ответ:  $x \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 3 \right\}$

ОДЗ:

$$x^3 - 16x + 25 \geq 0$$

$$\Downarrow \\ x \geq -4$$

$$\begin{array}{c} x(x-4)(x+4) \\ -4 \quad + \quad 0 \quad -4 \quad + \\ \hline x \end{array}$$

т.к. обе части  
неотрицательны  
возведем в квадрат

$$(4) \quad 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | + 1 \geq 0$$

(1) 1 случай  $x \geq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(x+0,5) 2 \left( x - \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right) \left( x - \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right) \geq 0$$

$$+ \frac{1-\sqrt{13}}{6} - 0,5 + \frac{1+\sqrt{13}}{6} - 1 +$$

$$x \in \left( -\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right] \cup \left[ -0,5; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$

~~$$x \in \left( -\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right] \cup \left[ -0,5; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$~~

но т.к. в этом случае

$x \geq -1$ , то

~~(2) 2 случай~~

~~$$x \in \left[ -1; \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right] \cup \left[ -0,5; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$~~

(2) 2 случай  $x < -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 (6x^2 + 5x + 5) + (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \text{всегда} \geq 0 & D < 0 & \text{всегда} \geq 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 6x^2 + 5x + 5 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1)$$

~~Ответ:  $x \in (-\infty; -1)$~~

$$\text{Ответ: } x \in \left( -\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right] \cup \left[ -0,5; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ 6x^4 - 6x^3 \\ \hline x^3 - 4x^2 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline -3x^2 + 2x \\ -3x^2 + 3x \\ \hline -x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ 6x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 - 3x \\ -2x^2 - x \\ \hline -2x - 1 \\ -2x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+0,5 \\ 6x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 3x \\ -2x^2 - x \\ \hline -2x - 1 \\ -2x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x - 1 \\ -2x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

|      |   |
|------|---|
| 7000 | 4 |
| 1000 | 5 |
| 200  | 5 |
| 40   | 5 |
| 8    | 2 |
| 4    | 2 |
| 2    | 2 |
| 1    | 1 |

у расхождения 7000 на множителе  
заменим, что восьмизначное число  
содержит ~~из~~ ~~из~~ состоит из  
цифр 1; 2; 2; 2; 5; 5; 5; 4

На первом месте могут стоять 4 варианта  
цифры

Если 800 8000 шестизначное число из 5 и 2  
(без 1 и 4) тогда 800 8000

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 вариантов, но т.к. 5 и 2 повторяются,  
(если цифра разная)

$$n = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6} = 20 \text{ вариантов}$$

С учетом таких вариантов  
будет

$$4 \cdot 20 = 140 \text{ вариантов}$$

если мест где  
можем ставить  
цифра 4 варианты  
расстановки  
5 и 2

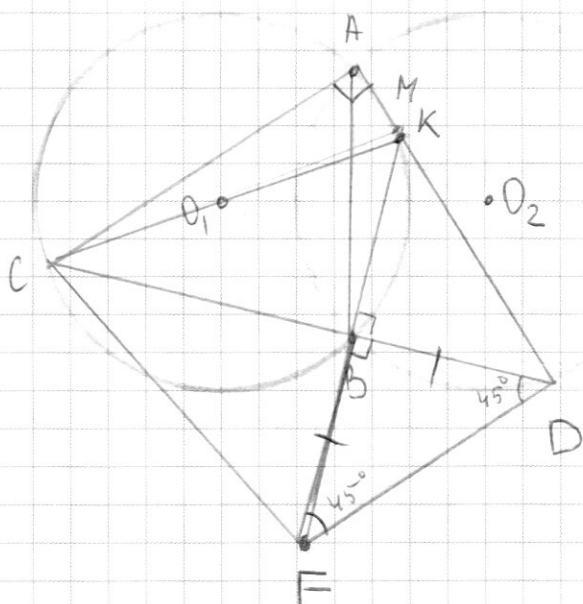
Тогда еще с единицей будет  $8 \cdot 140 = 1120$

восемь мест,  
где можем стоять  
1 варианты  
расстановки  
2; 5 и 4

Ответ: 1120 вариантов



6



Дано:  
 $\omega_1(O_1, R=4) \cap \omega_2(O_2, R=4) = \{A, B\}$

Дано:  
 $\omega_1(O_1, R=4) \cap \omega_2(O_2, R=4) = \{A, B\}$

$B \in CD$   
 $C \in \omega_1(O_1, R=4)$   
 $D \in \omega_2(O_2, R=4)$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

Найти:  $CF$ ?

Решение

1) Проведем  $BF$   ~~$BF$~~   $[FB] \cap [AD] = K \Rightarrow \angle KBD = 90^\circ$

2) Т.к.  $\angle ACB$  опирается на хорду  $AB$  и  $\angle BDA$  опирается на хорду  $AB$  и у  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаковые радиусы  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$  а т.к.  $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$

3)  $\triangle FBD$   $BF = BD \Rightarrow \triangle FBD$  - равнобедренный  $\Rightarrow$   
 $\angle FBD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

4)  $\triangle KBD$  и  $\triangle DBF$

$BD$  - общая

$\angle KDB = \angle ADB = \angle BDF = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle KBD = \triangle DBF \Rightarrow$   
 (по катету и прилежащему углу)

$\Rightarrow KB = BD = BF$

~~5) Т.к.  $\triangle CBK$   $\angle CBK = 180^\circ - \angle KBD = 90^\circ$ , но  $\triangle CBK$  прямоугольный  $\Rightarrow$  опирается на диаметр  $\Rightarrow CK = D = 2R$~~

5) Проведем  $[CO_1] \cap \omega_1(O_1, R) = \{M\}$

Тогда  $\triangle CMB$  - прямоугольный (т.к. треугольник опирается на диаметр)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM \perp CB \Rightarrow BM \perp CD$

Обозначим  $\angle ACM$  за  $\alpha$ , тогда  $\angle MCB = 45^\circ - \alpha$

$\angle AMC = 90^\circ - \alpha$ ;  $\angle CMB = 90^\circ - (45^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$

~~Продолжение~~

Продолжение на следующей

5

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Продолжение задачи 6

Тогда т.к.  $\angle AMC = 90 - \alpha$ ;  $\angle CMB = 90 - (45 - \alpha) = 45 + \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC + \angle CMB = 90 - \alpha + 45 + \alpha = 135^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BMD = \frac{180 - 135}{2} = 45^\circ \Rightarrow BM = BD \text{ (т.к. } \triangle MBD \text{ - равнобедр.)}$$

$$\begin{array}{l} \text{Т.к. } KB \perp CD \quad KB = BD \\ \text{а } MB \perp CD \quad MB = BD \end{array} \Rightarrow K \equiv M \Rightarrow K \in \omega, (O, R)$$

Тогда  $\triangle CBK$  описывается на диаметр  $\Rightarrow CK = 2R$   
(т.к. он диаметр, а  $K \in \omega$ )

4)  $\triangle KCB$  и  $\triangle FCB$

$$\angle CBK = \angle CBF = 180^\circ - \angle FBD = 90^\circ$$

$CB$  - общая  
 $FB = KB$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{(по двум катетам)} \\ \triangle KCB = \triangle FCB \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = CK = 2R = 14$$

Ответ:  $CF = 14$

2) Чтобы решений было бесконечное множество графики  
1 и 2 уравнений должны совпадать

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} = \frac{a}{6} - \frac{2(a-b)}{6}x = kx + d(1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} = \frac{1}{(a-b)b} - \frac{3x}{a-b} = kx + d(2)$$

$$\text{из (1)} \quad k = -\frac{2(a-b)}{6} \quad \text{из (2)} \quad k = -\frac{3}{a-b}$$

$$\text{из (2)} \quad d = \frac{1}{(a-b)b} \quad \text{из (1)} \quad d = \frac{a}{6}$$

Продолжение на следующей

6

~~1/2/17~~ Прогнозирование задачи 2

$$-\frac{2(a-b)}{6} = -\frac{3}{a-b} \Rightarrow \frac{1}{3}(a-b) = \frac{3}{a-b} \Rightarrow \begin{cases} a-b=3 & (3) \\ a-b=-3 & (4) \end{cases}$$

$$\frac{1}{(a-b)b} = \frac{a}{6} \Rightarrow a \cdot b(a-b) = 6 \Rightarrow a \cdot b = \frac{6}{a-b}$$

$$\text{из (3)} \quad a-b=3 \Rightarrow a \cdot b = \frac{6}{a-b} = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{b}$$

$$\frac{2}{b} - b = 3 \quad | \cdot b$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$b_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{-3 + \sqrt{17}}$$

$$b_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{-3 - \sqrt{17}}$$

$$\text{из (4)} \quad a-b=-3 \Rightarrow a \cdot b = \frac{6}{a-b} = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{b}$$

$$-\frac{2}{b} - b = -3 \quad | \cdot b$$

$$2 + b^2 = 3b$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$b_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$b_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Ответ: } (-1; 2); (-2; 1); \left( \frac{4}{-3+\sqrt{17}}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \right); \left( \frac{4}{-3-\sqrt{17}}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \right)$$

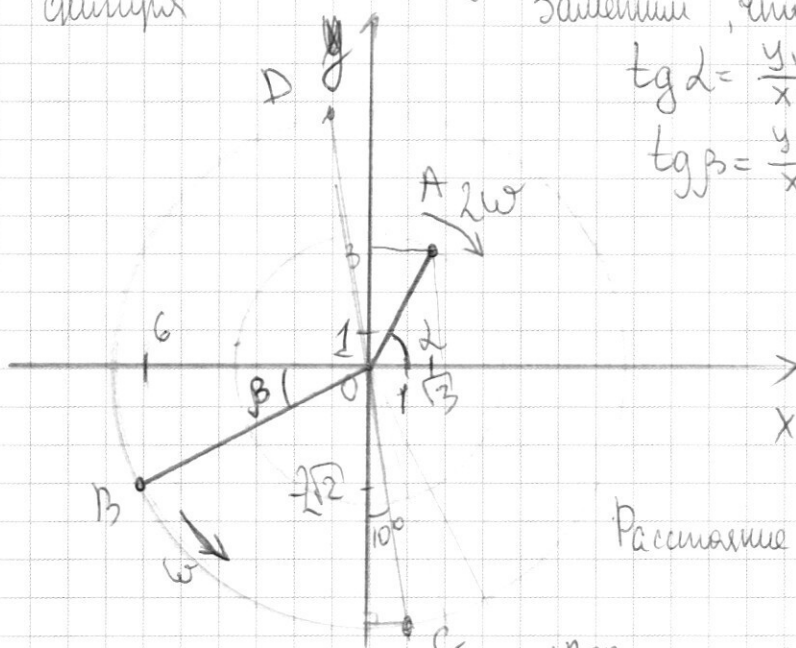


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- ① Найдём радиусы окружностей, по которым летают шипы
- Синица  $r = \sqrt{13^2 + 3^2} = 2\sqrt{13}$
- Скворец  $R = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$   $\Rightarrow$  когда синица пройдёт  
круг, скворец пройдёт полукруга  $\Rightarrow$  уловая скорость  
синицы по модулю в 2 раза больше уловая скорость  
скворца
- Заметим, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_2}{x_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$



Расстояние минимальное, когда

~~Найдём минимальное расстояние между ними~~  $\angle AOB = 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 210^\circ$

притом за одинаковое время B пройдёт в 2 раза меньше  
углов  $\Rightarrow$  синица пройдёт  $140^\circ$   
скворец  $70^\circ$

Тогда положение скворца

$$x = 1$$

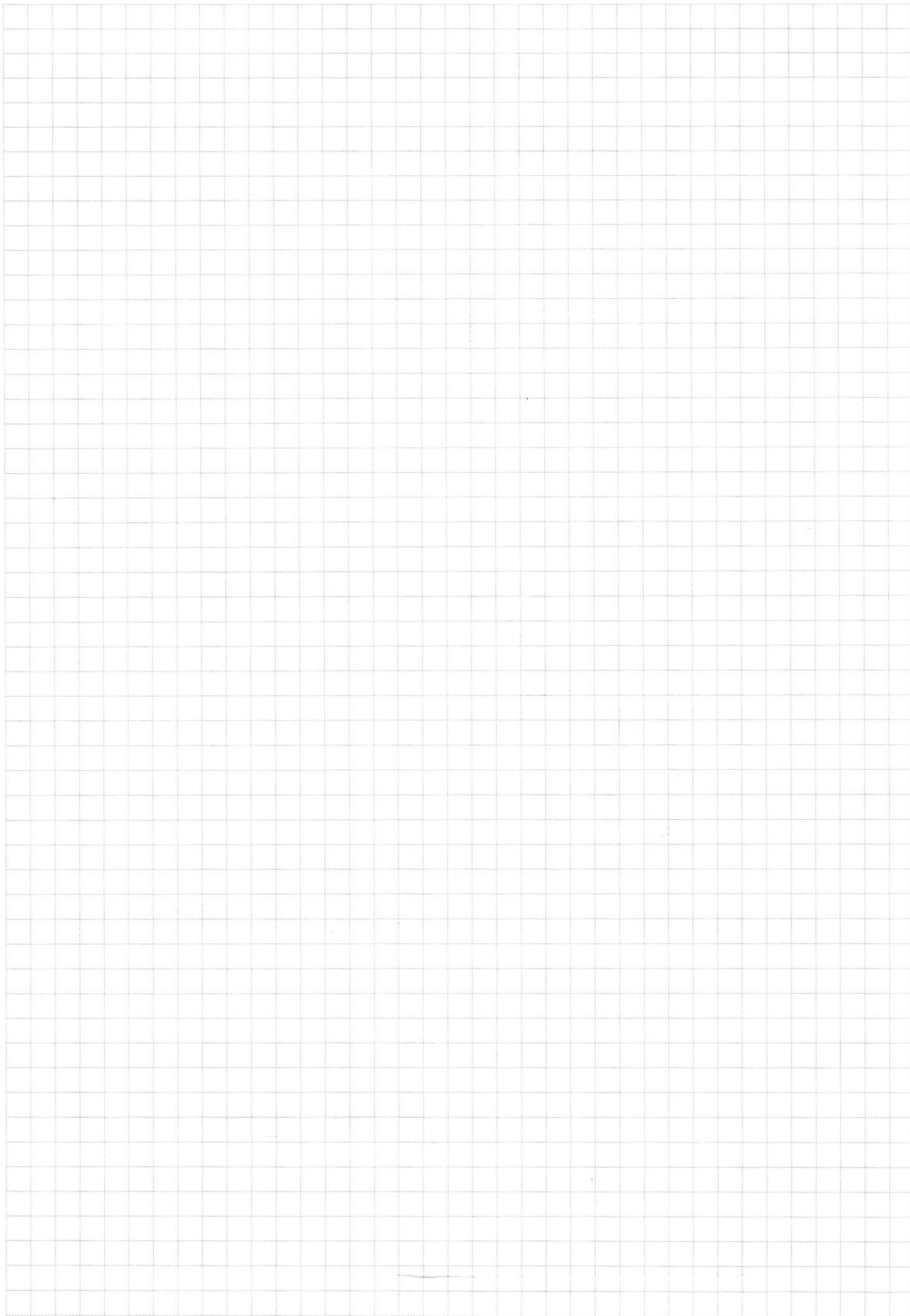
$$y = \sqrt{(4 \cdot \sqrt{13})^2 - 1} = \sqrt{44} \Rightarrow C(1, -\sqrt{44})$$

В следующий раз они

встретятся пройдя 360 и встретятся в месте  
с противоположными координатами

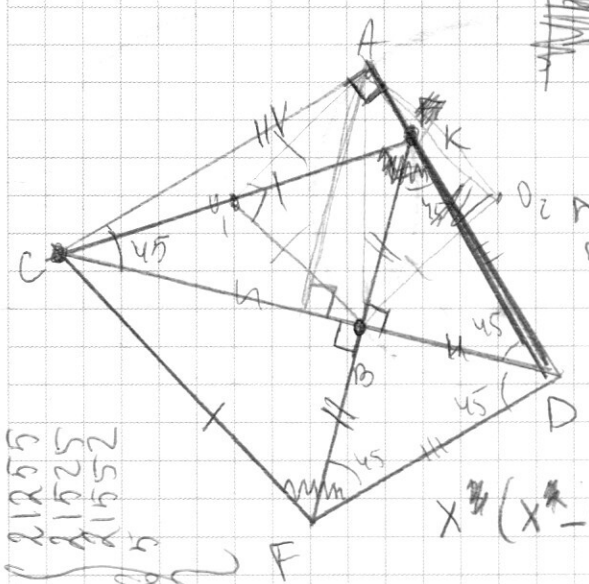
Ответ:  $C(1, -\sqrt{44})$   ~~$D(-1, \sqrt{44})$~~

$D(-1, \sqrt{44})$





$$0.6 \cdot 999 = 9.09$$



$$6x^4 + 5x^3 + x^2$$

Dano:  
 $W(O_1; R=7) \cap W(O_2; R=7) = \{A, B\}$   
 $B \in CD$   
 $CE \in W(O_1; R)$   
 $DE \in W(O_2; R)$   
 $FB \perp CD$   
 $BF = BD$

(14)

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ -6x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 - 3x - 1 \\ -2x^2 - 3x \\ \hline -1x - 1 \\ -1x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16 \\ \frac{x+0.5}{6x^2 - 2x - 2} \end{array}$$

$$x^2(x^2 - 4)(x + 4) + 25$$

$$(x-2)(x+5) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3x - 10$$

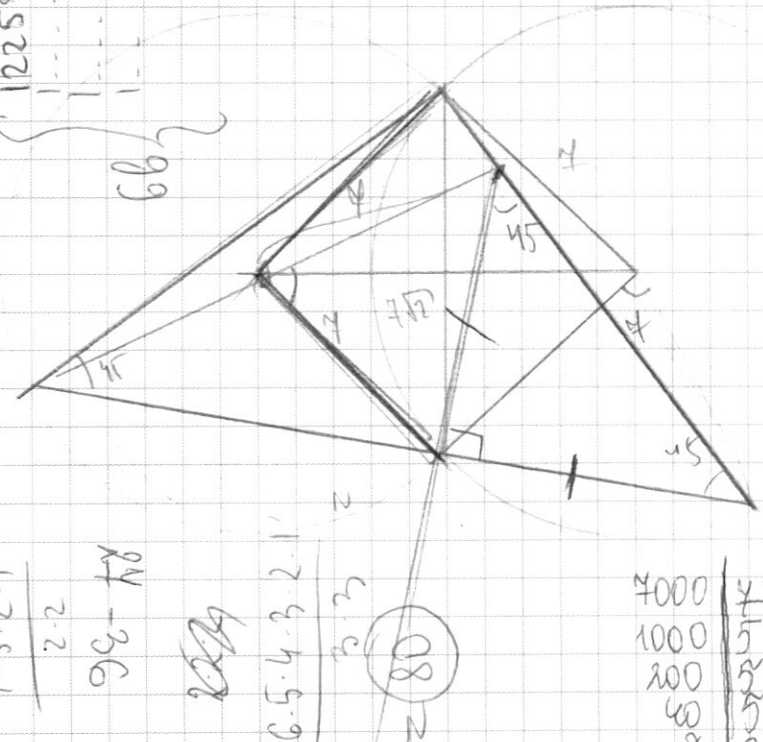
$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$x^3 - x^2 - 3x - 3x^2 + 3x + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ -6x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 - 3x - 1 \\ -2x^2 - 3x \\ \hline -1x - 1 \\ -1x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12255 \\ 21255 \\ 21521 \\ 21552 \\ \hline 55221 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 4321 \\ 22 \\ \hline 96 \end{array}$$

222

$$\begin{array}{r} 654321 \\ 33 \\ \hline 21552 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 1000 \\ 200 \\ 60 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

abcd efgh

Заметим, что  $400 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$

На первое место можно поставить 4 варианта

4.

Если число начинаем с цифры

$$1 \cdot \frac{1}{10}$$

$$+ 8 = 9$$

$$8 + 9 = 17$$

$$0 = 2 - 9 + 2 \cdot 9 = 2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 12$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$6x^2 - 2x - 2 \geq 0$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2(a-b)x + by = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$by = a - 2(a-b)x$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{b}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b}$$

$$\frac{3bx + b(a-b)(a - 2(a-b)x)}{b} = 1$$

$$b(18x + a^2 - ab - 2(a-b)^2x) = 6$$

$$b(18x + a^2 - ab - 2a^2x + 4abx - 2b^2x) = 6$$

$$17 \begin{array}{r} 22555 \\ 17 \end{array}$$

$$2^6 = 2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \text{ Варманта}$$

Если 1 и 2 4 не выходи  
выходи

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$x + y + 5 + x - y + 5 < 10$$

$$x + 10 < 10$$

$$x < 0$$

$$x + y + 5 -$$

$$\sqrt{13^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 4 \cdot 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{36 + 9} =$$

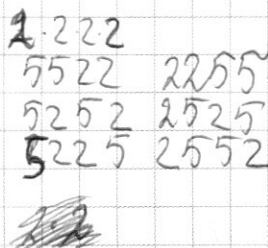
$$17 \begin{array}{r} 173 \\ 17 \end{array}$$

$$6,92$$



$(x-1)$

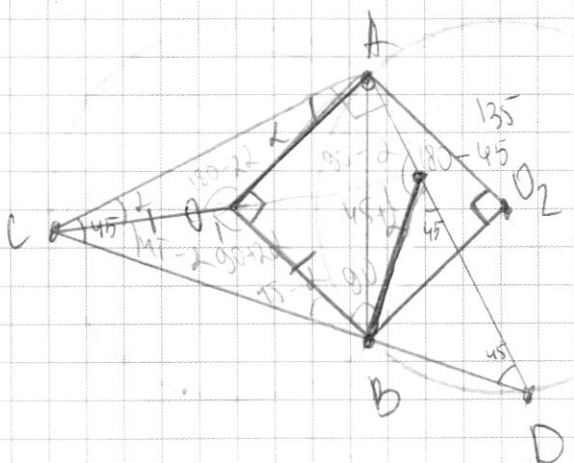
19.2



2.222

|      |      |
|------|------|
| 5522 | 2255 |
| 5252 | 2525 |
| 5225 | 2552 |

~~2.2~~



$$180 - 2(60 - 2) =$$
  
 ~~$180 - 90$~~   
 $90 - 40$

252255  
252525  
252552

|        |        |
|--------|--------|
| 222555 | 252255 |
| 225255 | 252525 |
| 225525 | 252552 |
| 225552 | 255225 |
|        | 255252 |
|        | 255522 |

$$5 \quad 106 \quad + 106$$

555922  
552522  
552252  
552225  
525225  
522552  
522525

$$y = \frac{g(2-g)}{1-3gx} - \frac{g(g-1)}{1-3gx} = \frac{g(2-g)}{1-3gx}$$

$$= \frac{g}{x(g-v)x-v} = h$$