

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

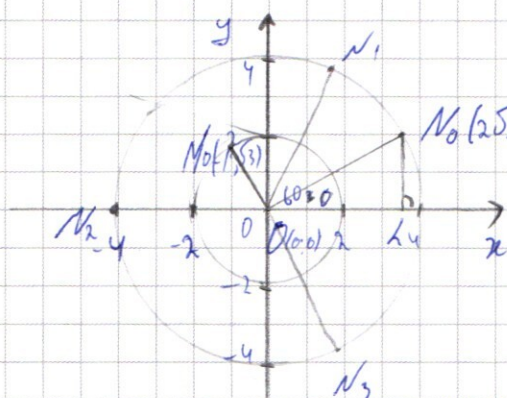
3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

по ур-ю окружности:



$$1) M: x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{4} = 2$$

$$2) M: x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{16} = 4$$

↓
угловая скорость муравья (ω_m)
в 2 раза больше угл. скорости
жука. (ω_n)

• запишем ур-е прямой M_0O : $y = a_m x + b$, $b = 0$ т.к.
прямая проходит через $(0; 0)$ $\Rightarrow \sqrt{3} = -1 a_m \Rightarrow a_m = -\sqrt{3}$

• аналогично: $a_m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, заметим, что a_m и a_n
противоположны и обратны $\Rightarrow \angle M_0 O M_n = 90^\circ$.

• Заметим, что кратчайшее расстояние между M и M
достигается $\Leftrightarrow$ точка касания $M(M) \in ON$ (точка кас. туг
отрезку O и точка кас. жука), т.к. при ускорении
прямой a : $N \in a$, кратчайш. раст $\in m$, $m \perp a$, а
радиус $\perp$ касат.

• т.к. $\omega_m = 2 \omega_n \Rightarrow$ муравей пройдет угол в
2р, чем жука до встречи, т.к. $\angle$ начальный $= 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ муравей пройдет 60° , а жук 30° .

• $N_0 L \perp OX$; $N_0 L \cap OX = L$, $\angle N_0 = 2$, $OL = 2\sqrt{3} \Rightarrow \angle N_0 O L = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle N_0 O L = 30^\circ \Rightarrow \angle N_1 O L = 60^\circ$, N_1 - кон. жука чм 1 вст.

$$\arg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow M_1(2; 2\sqrt{3}) \text{ + к. координат } 4+12=16-11.$$

• аналогично шаг шаг от 1-го до 2-го и пройдет 120° , а $\times 120^\circ \Rightarrow 180+60=240 \Rightarrow$ они вст. на ос OX , в отриц. $M_2(-4; 0)$ (т.к. $R=4$).

• аналог. шаг шаг от 2-го до 3-го. M пройдет 240° , а $\times 120^\circ \Rightarrow M_3 OX=60^\circ$, так. что углы - отриц. $\Rightarrow M_3$ имеет координату $y = -\text{координ. } y M_1 = -2\sqrt{3}$, а $x = x M_3 = 2$, $M_3(2; -2\sqrt{3})$, а M_4 по сути совпадает с M_1 , $\Rightarrow$ круг замкнулся, и след. положения совпадают с предыдущими.

Ответ: $M_1(2; 2\sqrt{3})$, $M_2(-4; 0)$, $M_3(2; -2\sqrt{3})$

✓ 5.

1 4 0 0 2
7 0 0 2
3 5 0 2
1 2 5 5
3 5 5
7 2
1

— простые множители, которые ~~должны~~ обязательно должны встречаться в разложении цифр восьмиза. числа.

замети, что цифры, не вст. в разложении или добавит не можем, т.к. на них падает дешифр (кроме сост. чисел получающих множителями простых множителей 1400).

Т. мы используем только прост. мн-ли и единица, т.е.

$$2, 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, \text{ кол-во} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Замети, что перебирать в сот. чисел мы можем только двойки, т.к. иначе перебрать за день.

$$1) \text{ набор: } 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, \text{ кол-во} = \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) набор: 8, 5, 5, 1, 1, 1, 7, кол-во = $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$

и) других наборов не может быть по пункту II.

Всего: $\frac{8!}{3! \cdot 4} + \frac{8!}{3! \cdot 2} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$

$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 (1 + 2 + \frac{1}{2}) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3,5 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 5880.$

Ответ: 5880.

3.

$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6.$

$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$

• $x = -3$, ТО: $0 = 0 - \text{У.}$

• $x \neq -3$, ТО: $\sqrt{x^3 - x + 10} = x+2$, $\sqrt{\quad} \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.$

$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4.$

~~$x^3 - x^2 + x + 6$~~ $x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0.$

$2 \geq -2 - \text{У.}$

при $x = 2$ Ур. не - У $\rightarrow x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 / : x - 2.$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 - 5x + 6 & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -3x + 6 & \\ +3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2 + x - 3 = 0.$

$D = 1 + 12 = 13.$

$x_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} > -2 - \text{У}$

$x_2 = \frac{-\sqrt{13} - 1}{2} < -2 - \text{У.}$

Ответ: $x = \left\{ -3; \frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2 \right\}$

✓ 2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, & 1) \\ 4bx + (a+b)by = 1/b, & b \neq 0, \text{ т.к. } 0 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(a+b)x - 4x + 4y - (a+b)y = \frac{a}{3} - \frac{1}{b}$$

$$x(a+b-4) + y(a+b-4) = \frac{ab-3}{3b}$$

$$(a+b-4)(x-y) = \frac{ab-3}{3b}$$

Т. $a \neq -b$.

$$\bullet a+b-4=0, \text{ т.к. } 0 \text{ делит } 0 \Rightarrow \frac{ab-3}{3b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab-3=0 \\ a+b-4=0 \end{cases}$$

$$a=1, b=3 \quad (a; b) = (1; 3) \text{ и } (3; 1), \text{ т.к. } b \neq 0$$

$$\bullet a+b-4 \neq 0, \text{ т.к. } x-y = \frac{ab-3}{3b(a+b-4)} \Rightarrow x = y + \frac{ab-3}{3b(a+b-4)}$$

$$\text{так же из (1): } x = \frac{a-12y}{3(a+b)}, \quad a \neq -b$$

$$\begin{cases} x = \frac{a-12y}{3(a+b)} \\ x = y + \frac{ab-3}{3b(a+b-4)} \end{cases}$$

$$y + \frac{ab-3}{3b(a+b-4)} = \frac{a-12y}{3(a+b)} \quad \text{ч.к. } y - \text{кеб.м.} \Rightarrow x \text{ кеб.м.}$$

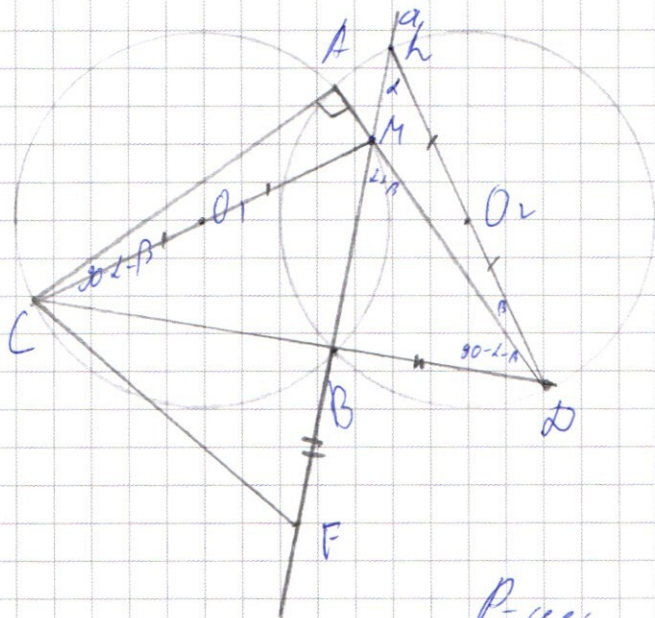
II. $a = -b$, т.к.

$$\begin{cases} 12y = a \\ 4bx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{12} \\ x = \frac{1}{4b} \end{cases} \quad - \text{1р.}$$

$$\text{Ответ: } (a; b) = \left\{ (1; 3); (3; 1) \right\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 6.



Dano: ~~5, a 5,~~

$$\omega_1(a_1; R), \omega_2(a_2; R)$$
$$R = 9 \quad W_1 \cap W_2 = A \cup B$$

$C \in U, D \in U: C-B-D_4$

 $\angle CAD = 90^\circ, a \perp CD:$

Бга Fca: Аи F- ноп. с. относ.

(CD), $BF = BD$.

Karvén: CF.

Р-м:

8.1) Bei $\sigma_1 = 14$ und $\sigma_2 = 1$.

2) по св. вис. улов: с СВ/4 = 90° и он на двох СГЧ,

т.к. $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD$ - острый ка. значит $AD \cap \Omega_1 = 14$.

3) Аналог. 2): L2-грав.

4) $\mu_{\text{гос}} \in B \wedge D = L, a \in M \wedge L = \beta, \text{ то: } \in B \wedge D = L + \beta, a \in$

$\angle BDM = 90^\circ - \beta$

5) заметая, что т.к. $R_1 = R_2 \Rightarrow G_1 = G_2 \Rightarrow \cup A/B(\text{опр } 1) = \cup A/B(\text{опр } 2) \Rightarrow$
по 22.6.ил. 2

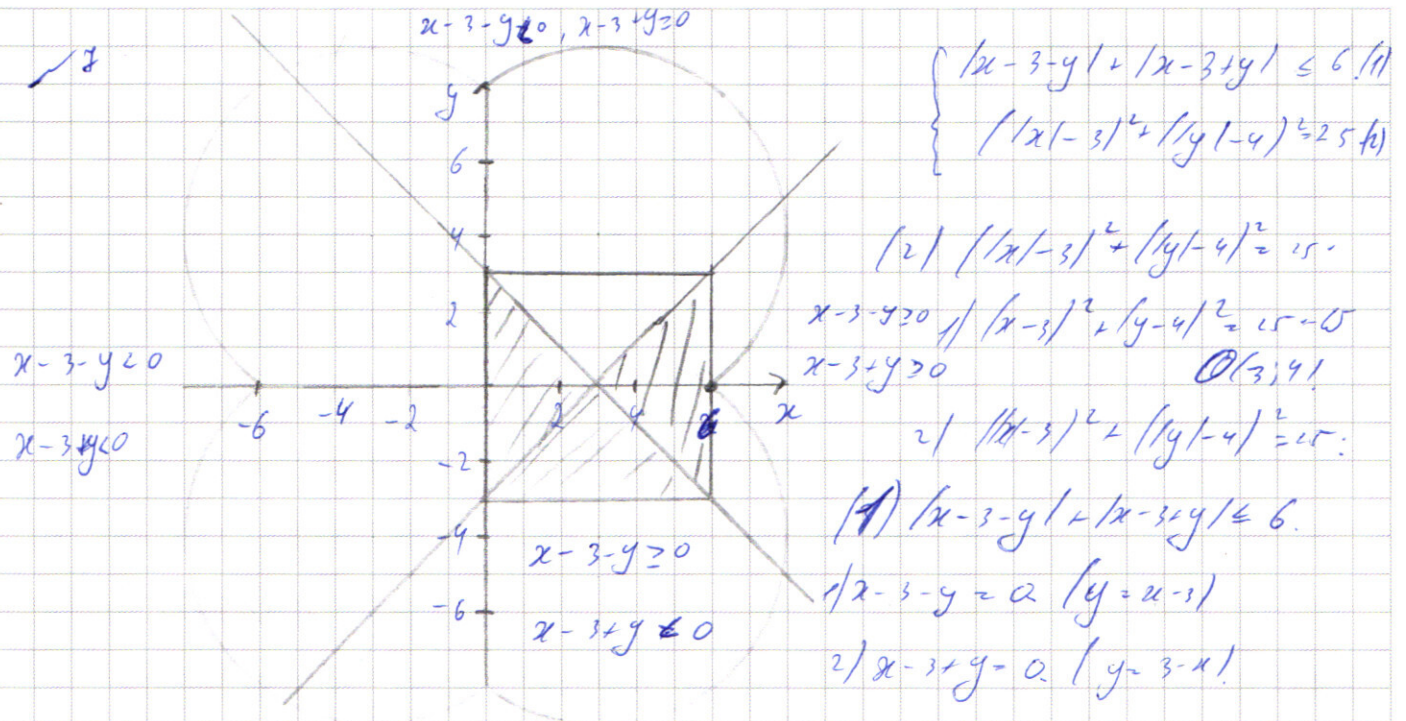
$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - \angle \beta$. $\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle ADB$ (по тр. углам, равноб.)

$\Rightarrow \alpha - 2\beta = 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ \Rightarrow$ по чр. равноб. Δ $\rightarrow$ $\angle BOD$ -равноб. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow MB = BD, BF \Rightarrow \text{CD-ср. } \perp \text{ к } [MF] \Rightarrow$$

2) $C/M = C/F = d = 2R = 18.$

Ответ: 18.



$$1) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3+y \\ x \geq 3-y \end{cases} \begin{matrix} 1) x-3-y + x-3+y \leq 6 \\ 2x \leq 12 \end{matrix}$$

Число: 1) $3+3 \leq 6-0$, 2) $9+16=25-0$. $x \leq 6$. $\Rightarrow$ ~~$x=6$~~ $x=6, y=0$.

$$2) \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3+y \\ x \leq 3-y \end{cases} \begin{matrix} 1) x-3-y - x+3-y \leq 6 \\ y \geq -3 \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \begin{matrix} 1) -x+3+y - x+3-y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{matrix}$$

$$4) \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \begin{matrix} 2y \leq 6 \\ y \leq 3 \end{matrix}$$

Ответ: $(6; 0)$

$$ab = 3$$

$$a+b = 4$$

$$3(a+b+xy) = a$$

так

$$a+b+xy = \frac{a}{3}$$

$$xy = \frac{a}{3} - a - b$$

$$b/a + a + xy =$$

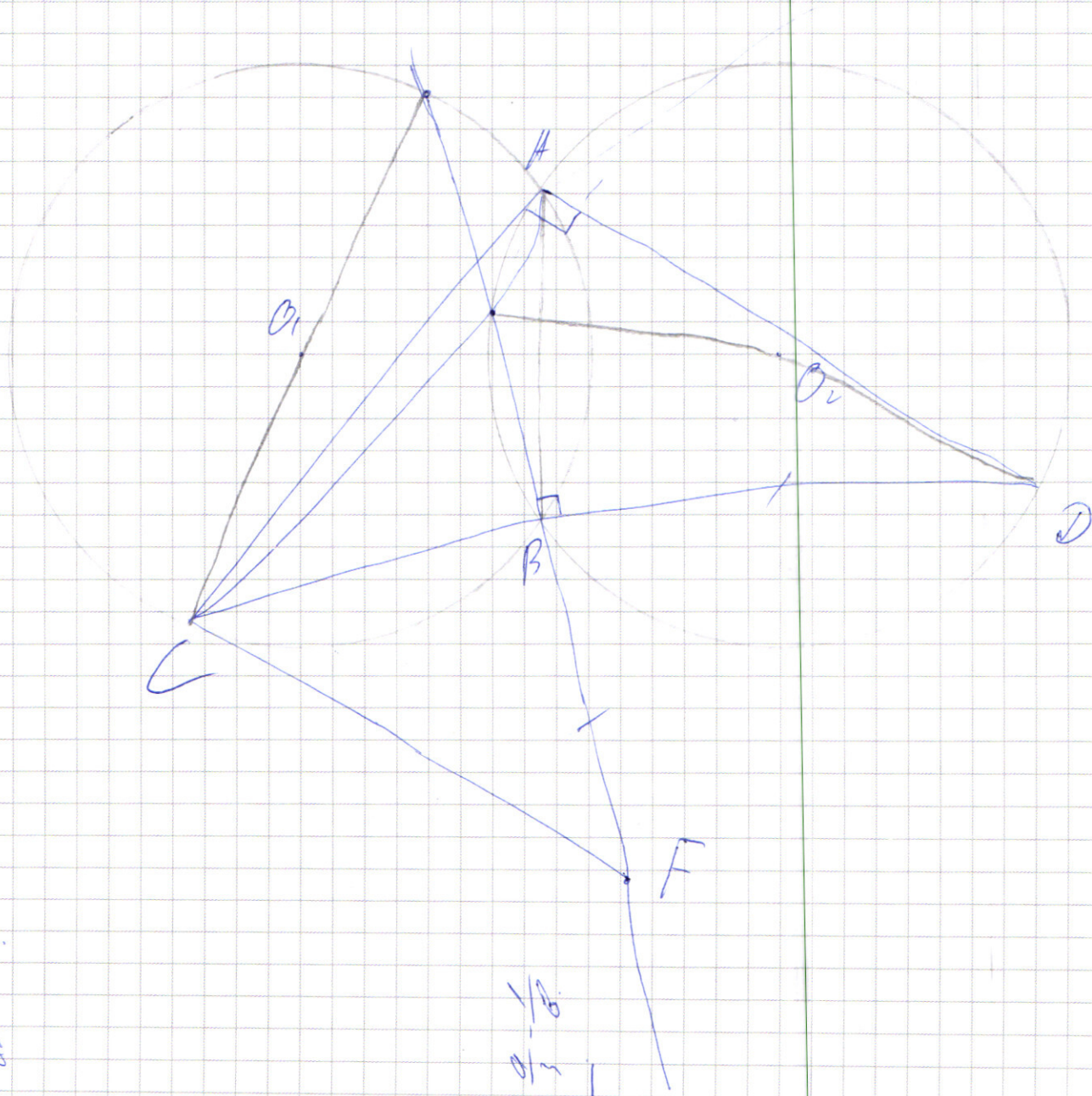
$$3(a+b+xy) = a$$

$$a+b+xy = \frac{a}{3}$$

$$-(xy + a + b) = \frac{1}{6}$$

$$x(a+b-4) = y/4 = a-b-4 = \frac{a}{3} - \frac{1}{6}$$

$$(a-b-4)/(xy) = \frac{a-b-3}{3b}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = -\sqrt{3}$

$\beta = -1$

$y = ax + b$

$y = ax$

$0 = 0$

$x^2 + y^2 = R^2$

$x^2 + y^2 = R^2$

$W = 2\%$

$W = 2\%$

$R = 1$

$R = 1$

$4\sqrt{3}$

$8\sqrt{3}$

$1400 \mid 2$

$700 \mid 2$

$350 \mid 2$

$175 \mid 5$

$35 \mid 5$

$7 \mid 7$

$1 \mid 1$

22255711

24557111

85571111

$49 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8$

$120 \cdot 49 = 120 \cdot 50 - 120 =$

$= 6000 - 120 = 5880$

3360

1680

840

5880

$8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5$

$32 \cdot 10$

320

$8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10 + 8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5$

40

3360

840

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 4x + 6. \quad D = 25 - 4 = 9$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3) \sqrt{(x+2)} \quad x = -3$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 6$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (2) \quad 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ - x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 - 5x + 6 & \\ x^2 - 2x & \\ \hline 3x + 6 & \end{array}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{13} > 3$$

$$13 > 9$$

$$3ax + 3bx + 12y = a$$

$$x = \frac{a - 12y}{3(a+b)}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & /4b \\ 4bx + (a+b)6y = 1 & /3(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)4bx = 4b6y - a \\ 3(a+b)4bx + 3(a+b)^2 6y = 3(a+b) \end{cases}$$

$$4b^2y = 3(a+b)^2 6y - 3(a+b)$$

$$\frac{4b(a-12y)}{3(a+b)} + (a+b)6y = 1$$

$$4ab - 48by + 3(a+b)^2 6y = 3(a+b)$$

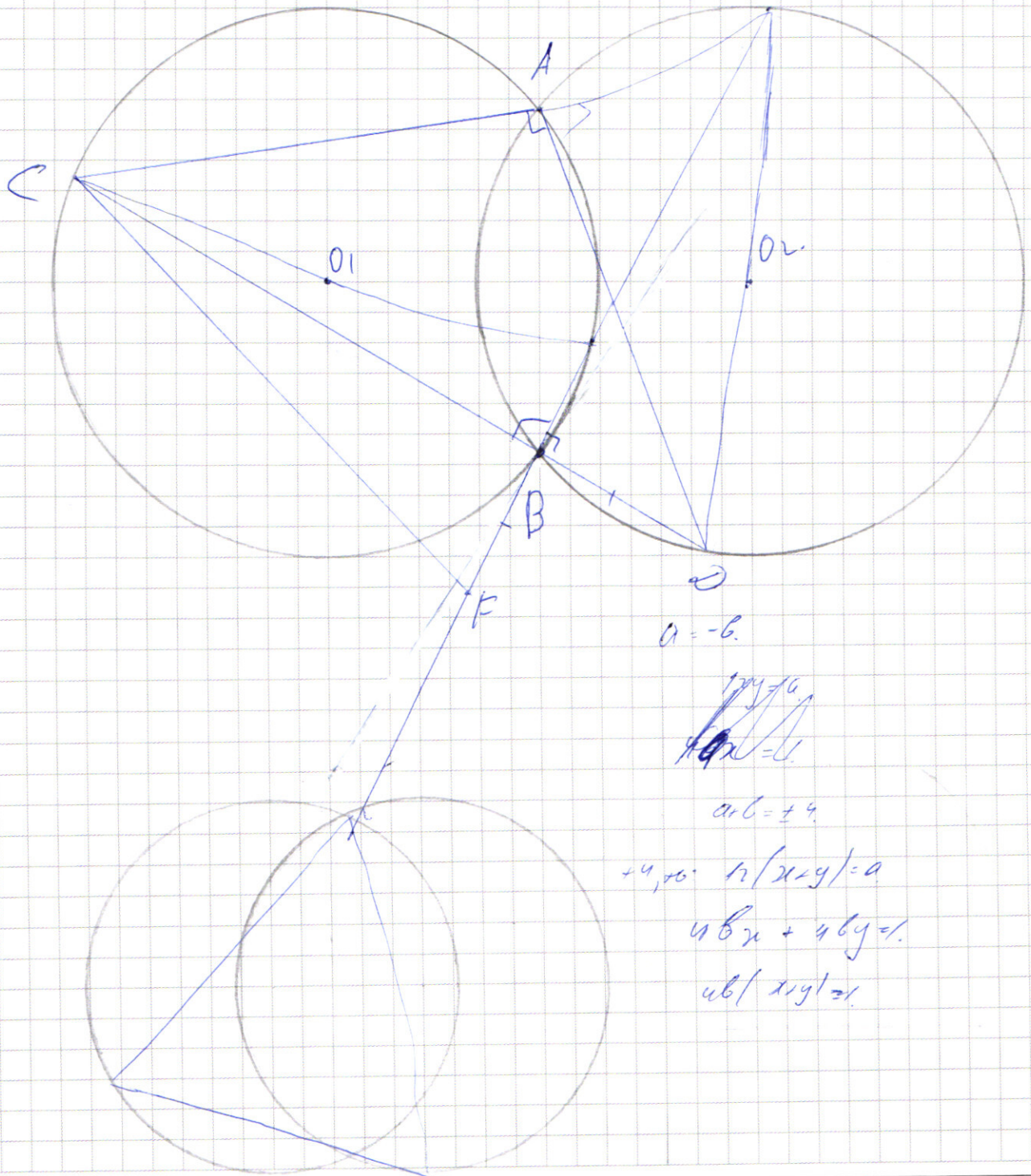
$x \geq 1$.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 \geq 0$$

$$2x^4 + 4x^2 - 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 - 2x + 1$$

$$\frac{2x^4}{3x^2} + \frac{4x^2}{3x^2} - \frac{3x^3}{3x^2} - \frac{2x}{3x^2} + \frac{1}{3x^2}$$



$$a = -b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$a, b = \pm 1$$

$$+1, +1: \frac{1}{x+y} = a$$

$$+1, -1: \frac{1}{x-y} = a$$

$$-1, +1: \frac{1}{x+y} = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

