

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$

1) Числа состоящие только из 2, 5, 7, 1

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 2!}{3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{2 \cdot 3!} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

2) Числа состоящие только из 2, 4, 5, 7, 1.

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!}{3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = 560$$

3) Числа состоящие только из 8, 5, 7, 1

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = 560$$

Таким образом всего таких чисел $560 \cdot 3 = 1680$.

Ответ: 1680.

№3. $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$

1) $x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$

$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)(x+5)$, возведём обе части в квадрат.

$\frac{1}{4}(x+5)^2(x^3-16x+25) = (x-2)^2(x+5)^2$, разделим на $(x+5)^2$, но корень $x = -5$ запомнить.

$\frac{1}{4}(x^3-16x+25) = (x-2)^2$ | $\cdot 4$

$x^3-16x+25 = 4(x^2-4x+4)$

$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$ | $+16x$

$x^3+25 = 4x^2+16$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

Оценим x : 1) $x^3 + 9 = 4x^2$, тогда $x^3 \neq 2 \Rightarrow x \neq 2$

$$2) x^3 - 4x^2 < 0 \quad x^3 < 4x^2$$

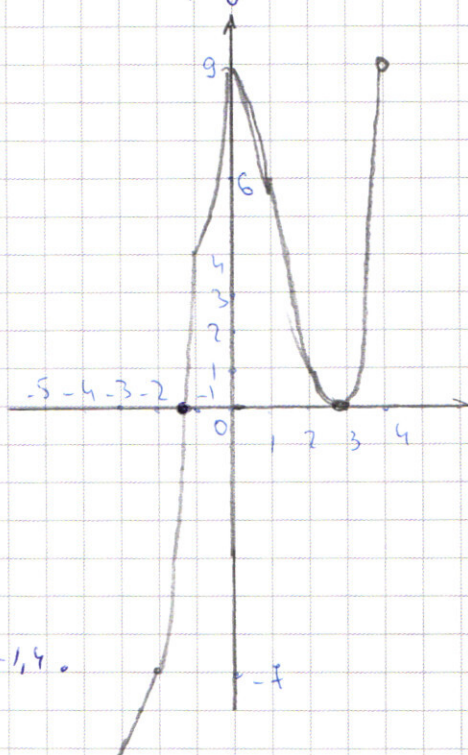
$$x < 4$$

$$3) x^3 - 16x + 25 \geq 0, \text{ т.к. } \sqrt{x^3 - 16x + 25} \geq 0$$

$$x > -5$$

Решим графически $x^3 - 4x^2 + 9$, где $-5 < x < 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	-4	-5
y	54	-7	4	9	6	1	0	9	-11	-16



Один из корней 3,
другой лежит между
числами -1,3 и -1,4

Ответ: 3, ~~число~~ на
промежутке от -1,3 до -1,4.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Найдём радиусы окружностей, по которым они движутся

Синицы: $r_1 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

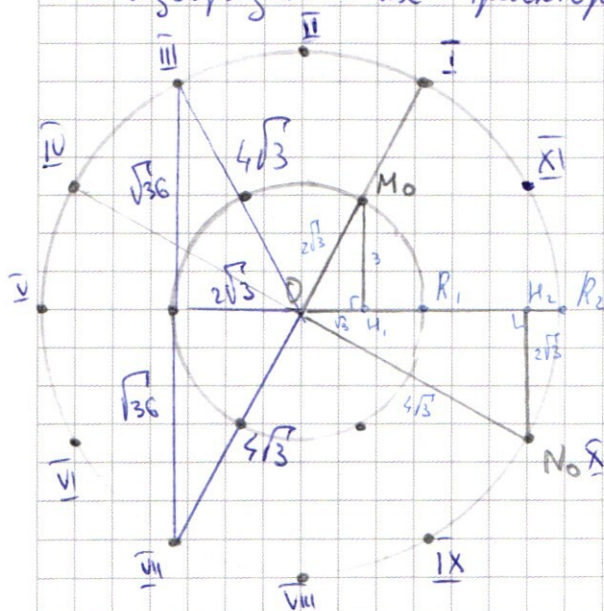
Скворец: $r_2 = \sqrt{6^2 + 2\sqrt{3}^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$r_1 = \frac{r_2}{2}$, так их скорости одинаковы, то скворец совершает полных оборот в два раза больше синицы. ($S_1 = 2\pi r_1$, $S_2 = 2\pi r_2$,

$$v_1 = v_2, 2r_1 = r_2$$

$$t_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}, t_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} \quad t_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \quad t_2 = \frac{4\pi r_1}{v_1}, t_1 = \frac{1}{2} t_2 \text{ и т.д.}$$

Изобразим их траектории.



1) $\triangle OM_0R_1$ - правильный, так OM_0 - высота $ON_1 = MR_1 = \sqrt{3}$ ($\sqrt{3} = \sqrt{12} : 2$) и медиана; $OM_0 = OR_1$ - как радиусы одной

окружностей, тогда $\angle M_0R_1 = \frac{1}{6} S_1$, так $\angle M_0OR_1 = 60^\circ$

2) в $\triangle ON_2ON_1$: $\angle N_1 = 90^\circ$, $ON_2 = \frac{1}{2} ON_1$, тогда $\sin \angle N_2ON_1 = \frac{1}{2}$, так $\angle N_2ON_1 = 30^\circ$, значит $\angle N_2OR_2 = \frac{1}{12} S_2$

3) Подставив во время прохождения

получим что когда синица будет в R_1 , скворец - в R_2 , докажем, что $2\sqrt{3}$ - кратчайшее между ними:



по кр-ву
треугольника

$$x > 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$x > 2\sqrt{3}, \text{ тогда}$$

точки не образуют

треугольник - лежат на одной прямой

4) будем смотреть за их дальнейшим движением: Пока скворец пролетает треть от четверти круга ($\frac{1}{12}$) угол между прямыми соединяющими

положение пилу и точку O изменяется на 90° (относительно
хода часовой стрелки увеличивается до 360° , потом обнуляется,
тогда получим, что ^{мин. дистанция} ветрилки произойдут в точках
III, VII и R_0 , значит ~~каждый~~ круг из круга в
круг ветрилки такие точки не будут меняться.

Док-во графика при уменьшение угла на 90° :

когда спутник переместился против часовой стрелки на 30° ,
 синуса по ψ на 60° , $60^\circ - (-30^\circ) = 90^\circ$, $360^\circ : 90^\circ = 4$, тогда
 между такими точками спутник пролетает $\frac{4}{12}$ круга, первая точка -
 K0, остальные III и VII

$$R_0(4\sqrt{3}, 0)$$

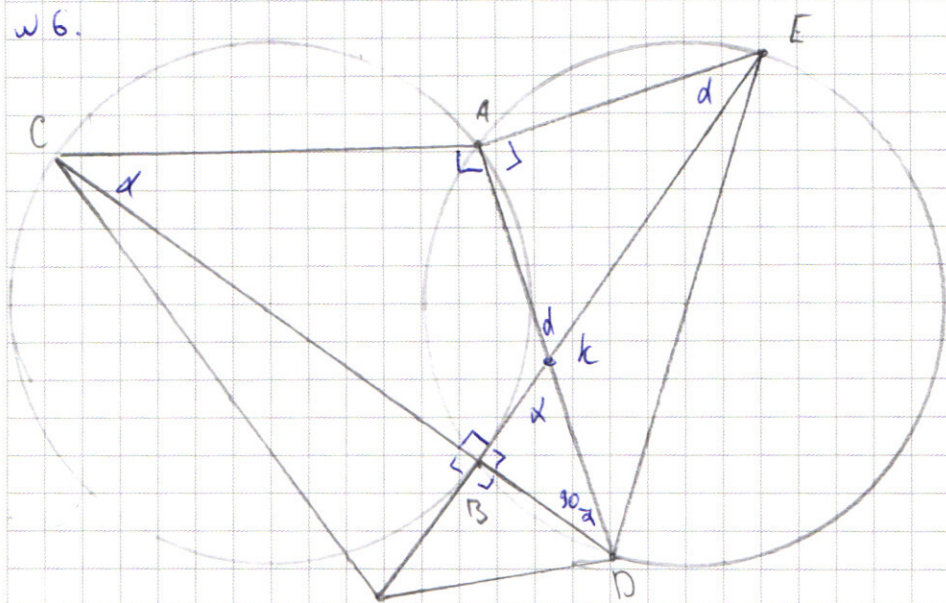
III $(-2\sqrt{3}; 6)$

VII $(-2\sqrt{3} - 6)$

расчитывается по т. Пифагора (4 длины показаны на рис)

Other: $(4\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 6), (-2\sqrt{3}, -6)$

w 6.



Дано: две окр
радиуса r , пересекаются
в точках A и B ,
 C и D лежат на
этих окр., $\angle CAB = 90^\circ$,
 $BE \perp CD$, $BE = BD$,
 $r_1 = r_2 = r$
Найти: CF .

Решение: 1) продлим BF до пересечения с окружностью, пусть эта точка E

2) $\angle ACD = d$, тогда т.к. $\angle CAD = \angle CBE = 90^\circ$, то $\angle AKB = 180^\circ - d$, где k - точка пересечения AD и BE , по свойству смежных углов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle FKD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \angle AKE,$$

$$3) \text{ в } \triangle KBD : \angle KBD = 90^\circ, \angle KDB = 90^\circ - \alpha$$

4) так окружности одинаковые, то вписанные углы опирающиеся на равные дуги тоже одинаковые, ~~значит~~ ($\angle AB = \angle AB$, так $r_1 = r_2$), значит $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \alpha$, отсюда,

$$\alpha = 90^\circ - \alpha$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

5) так в $\triangle KAE$ два угла равны α , $\alpha = 45^\circ$, то $\angle EAK = 90^\circ$, тогда $\angle CAE$ - развёрнутый, и $\triangle CBE$ - треугольник в котором углы при основании равны, значит он - р/б, $CB = BE$

6) точки B, E и D - лежат на одной окружности и из точки B отрезок DE виден под углом 90° , значит этот отрезок - диаметр окружности

7) Рассмотрим $\triangle CBF$ и $\triangle EBD$:

$$1) \angle CBF = \angle EBD = 90^\circ$$

$$2) CB = EB, \text{ по доказанному в п. 5.}$$

$$3) BF = BD, \text{ по условию задачи}$$

тогда по двум катетам $\triangle CBF = \triangle EBD \Rightarrow CF = DE$, DE - по доказанному в п. 6 - диаметр, $CF = DE = 2 \cdot 7 = 14$

Ответ: 14

$$w 2 \begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$6y = a + 2(b-a)x$$

$$y = \frac{a + 2(b-a)x}{6}, \text{ подставим во второе}$$

$$3bx + (a-b)b \left(\frac{a + 2(b-a)x}{6} \right) = 1 \quad | \cdot 6$$

$$18bx + (a-b)b(a + 2(b-a)x) = 6$$

$$18bx + (ab - b^2)(a + 2(b-a)x) = 6$$

$$18bx + a^2b + 2ab(b-a)x - ab^2 - 2b^2(b-a)x = 6$$

$$18bx + a^2b + 2ab^2x - 2a^2bx - a^2b^2 - 2b^3x + 2ab^2x = 6$$

$$18bx + 2ab^2x - 2a^2bx - 2b^3x + 2ab^2x + ab(a-b) = 6, \text{ не зависит от } x$$

$$\begin{cases} 18b + 2ab^2 - 2a^2b - 2b^3 + 2ab^2 = 0 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^3 + ab^2 - 2b^2a - 9b = 0 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} (b-a)^3 - 2a^2b + ab^2 + 9b + a^3 = 0 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-125 - 80 - 125 (1?)$$

540

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -5 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{4}(x+5)^2(x^3-16x+25) = (x+5)^2(x-2)^2$$

QD3: $x \neq 5$

$$\frac{1}{4} (x^3 - 16x + 25) = \cancel{x} (x \cdot 2)^2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 4$$

$$x^2 + 4x + 21 = 0$$

~~$x = 1$~~ , $x = \frac{1}{2}$

$x > 3$

$$x^3 + 4x^2 + 21 = 0$$

$x \in \mathbb{D}$

$\times 2$

$$\} x < -7$$

$$x^3 \leq 343$$

$$-16x \geq 112$$

$$x^3 - 16x + 125 \geq 0$$

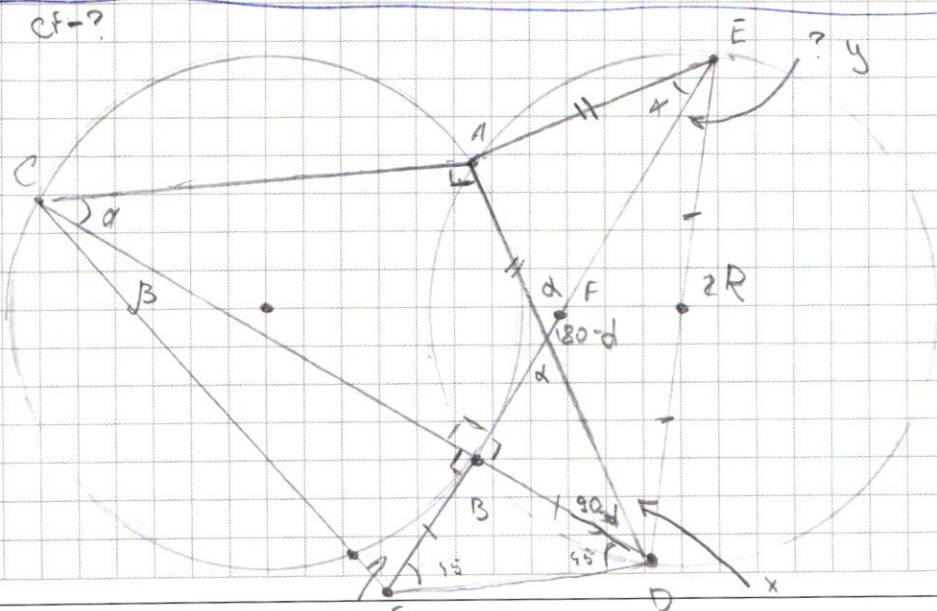
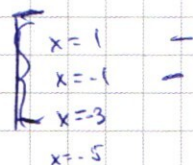
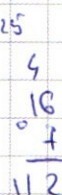
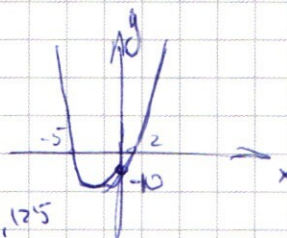
~~$x^2 + 16x + 7$~~

$$-27 + 21$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$\times 2$

$$\begin{array}{r} -125 + 80 + 25 \\ -64 \end{array}$$



(!) $y = \sqrt{z}$

$$x + y = d$$
$$X_{12} = 1.2$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{3}$

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{3}{48}$$

$$27 - 48 + 25$$

$$\begin{aligned} -27 - 36 \cdot 9 &= -54 \\ 64 - 36 \cdot 9 &= -259 \\ -125 - 100 \cdot 9 &= -216 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x^2 - x^3} \\ y &= \sqrt[3]{x^2 + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 16 \\ + 4 + 7 \end{aligned}$$

$$y = x^3$$

$$-3 \Rightarrow +1$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2,25 \\ 15 \\ \hline 11,25 \\ 22,5 \\ \hline 3,375 \end{array}$$

$$900 + 3,375$$

$$\sqrt{2}$$

$$8 + 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{16}$$

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ 4 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$4 \cdot 1,6 + 1,6 \cdot 1,6$$

$$1,6(4 + 0,4)$$

$$4 \cdot 1,96 + 1,96 \cdot 1,4$$

$$6,4 + 1,6 \cdot 1,6$$

$$1,96(5,4)$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ \hline 0,16 \end{array}$$

$$5'$$

$$1,3 < 1,4$$

$$\sqrt{1,96}$$

$$2 \rightarrow x > 1$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ 6,4 \end{array}$$

$$\sim 1,3$$

$$6 + 8 - 8 =$$

$$6 + 96 - 12$$

$$\begin{array}{r} 6 + 8 - 8 \\ 21 \end{array}$$

$$1 -$$

$$\begin{array}{r} 1-60696 \\ 2-4821-10x \end{array}$$

$$0 = 6 + x^2 - x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7000 | 2
3500 | 2
1750 | 2
875 | 5
175 | 5
35 | 5
7 | 1
1 | 1

875 | 5
35 | 5
7 | 1
1 | 1

$2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_2^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

$2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$

$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 560$

$C_8^3 = C_5^3 = C_2^3 =$

$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 2 = 1$

$S = 2\pi R$

$S_1 = 4\sqrt{3} \cdot 17$

$S_2 = 8\sqrt{3} \cdot 17$

$3 + 9 = x^2$

$36 + 4 \cdot 3 = y^2$

$y = 4\sqrt{3}$

$x = 2\sqrt{3}$

$t_1 = -t_2 \cdot \frac{1}{2}$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

560

3

1680

$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$

$2ax - 2bx + 6y = a$

$3bx + aby - b^2y = 1$

$x = \frac{a - 6y}{2a - 2b}$

$y = \frac{a + 2(b-a)x}{6}$

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{6}$

$3bx + ab \frac{a + 2(b-a)x}{6} - b^2 \frac{a + 2(b-a)x}{6} = 1$

$18bx + ab(a + 2(b-a)x) - b^2(a + 2(b-a)x) = 6$

$18bx + a^2b + 2ab(b-a)x - b^2a - 2b^2(b-a)x = 6$

$18bx + a^2b + 2ab^2x - 2a^2bx - b^2a - 2b^3x + 2b^2ax = 6$

$$y = kx + b$$

$$6 = 18bx + 4ab^2x - 2a^2bx - 2b^3x + a^3b - b^2a$$

$$6 =$$

$$6 = -2(b^3 + a^2b - 2ab^2 - 9b)x + ab(a-b)$$

He zabveni o x

$$\begin{cases} b^3 + a^2b - 2ab^2 - 9b = 0 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

$$a \neq b$$

$$a^3b - b^3a = 6$$

$$y = \frac{a + 2(b-a)x}{6}$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b}$$

$$\frac{1 - 3bx}{(a-b)b} = \frac{a + 2(b-a)x}{6}$$

$$\text{I } a=b \Rightarrow y = \frac{a}{6} \quad x = \frac{1}{3b}$$

$$(b-a)^3 = (b^2 - 2ab + a^2)(b-a)$$

$$b^3 - ab^2 - 2ab^2 + 2a^2b - a^3 + a^2b$$

$$(b-a)^3 = b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3$$

$$b^3 + a^2b - 2ab^2 - 9b = 0$$

$$(b-a)^3 - 2a^2b + a^2b^2 + 9b + a^3 = 0$$

$$(b-a)^3 + (a-b)^3 + ab - 2ab^2 + b^3 - 9b = 0$$

$$(b-a)^3 - (a-b)^3 = 0$$