

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✕ 1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

- ✕ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- ✕ 3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

- ♥ 4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

- ✕ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✕ 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- 7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Откуда получили пары 3, 1 и 1, 3 (т.к. $b=1$ или $b=3$ и $a+b=4$)

2 случая. $a+b=-4 \Rightarrow a=-b-4$

поставил $a=-b-4$ в равенство $\frac{12}{(a+b)b} = \frac{9}{1}$,

получил до
раздела 1 случай

$$\left(\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{9}{1} \right)$$

получил, что $\frac{12}{-4b} = \frac{-4-b}{1}$

$$12 = +16b + 4b^2$$

$$3 = 4b + b^2$$

$$b^2 + 4b - 3 = 0 \Rightarrow D = 16 + 4 \cdot 3 = 28$$

$$b_1 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2}, b_2 = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2}$$

Откуда получили пары

$$(a, b) = \left(-4 - \left(\frac{-4 + \sqrt{28}}{2} \right), \frac{-4 + \sqrt{28}}{2} \right) \text{ и } (a, b) = \left(-4 - \left(\frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \right), \frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \right)$$

В 3 решении мы доказали такой факт: система уравнений $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ty=k \end{cases}$ имеет бесконечно много решений

равно тогда, что $\frac{a}{d} = \frac{b}{t} = \frac{c}{k}$ ($a, b, c, d, t, k \neq 0$) а значит

Если мы найдем числа x, y дающие $(x, y) \rightarrow$ то они подходят, а значит проверку делать не надо. Ответ:

$$(a, b) = (1, 3), (a, b) = (3, 1), (a, b) = \left(-4 - \left(\frac{-4 + \sqrt{28}}{2} \right), \frac{-4 + \sqrt{28}}{2} \right) \text{ и } (a, b) = \left(-4 - \left(\frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \right), \frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \right)$$

Задача № 5

Заметим, что $1400 = 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ т.е. представляется в виде произведения ровно 6 простых множителей. ■

~~Тогда~~ Тогда одна из цифр делится на 7, а т.к. она < 9 , то одна из цифр = 7. Аналогично рассуждая, получаем, что одна из цифр = 5, т.к. пятерок - штук, то у этого числа ровно две цифры равные "5". Т.е. у этого числа есть две "5" и одна "7". ~~Решая~~ осталось 3 цифры - рассмотрим 3 случая: ① Если цифра = 8, а остальные - единицы (т.к. только третья степень двойки) ② Если "4" и "2", а все остальные - единицы. ③ Если три двойки по отдельности, а все остальные - единицы.

В первом случае - у нас число состоит из одной семерки, двух пятерок, одной четверки и 4 единиц.

Очевидно, т.к. цифр 8, то число таких способов = $\frac{8!}{2! \cdot 4!}$

↑
переставили
между
пятерками.
↑
т.к. переставили
между
единицами

Во втором случае это число равно

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

↑ ↑
3 единицы две пятерки

В 3 случае - $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$

↑ ↑ ↑
2 пятерки 3 двойки две единицы.

Итого ответ: Это число = $\frac{8!}{4! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 840 + 3360 + 1680 = 840(1 + 4 + 2) = 5680$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$(x+3)(\sqrt{x^2-x+10}) = x^2+5x+6$$

Заметим, что $x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

Тогда уравнение можно переписать так:

$$(x+3)(\sqrt{x^2-x+10} - x - 2) = 0$$

Откуда либо $x = -3$; либо $\sqrt{x^2-x+10} = x+2$.

Возведем обе части в квадрат.

$$x^2-x+10 = x^2+4x+4$$

$$6 = 5x$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Если t - корень уравнения

$$\sqrt{x^2-x+10} = x+2 \text{ т.е.}$$

$\sqrt{t^2-t+10} = t+2$, то
возведе в квадрат обе
части и получим
равенство. Тогда

Если мы решим уравнение

$$x^2-x+10 = (x+2)^2 \text{ и}$$

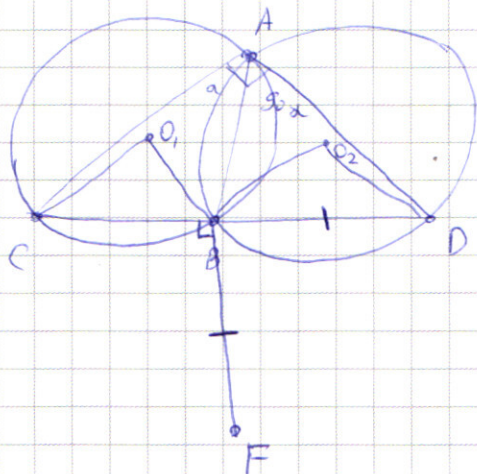
найдем все решения такие,
что $x^2-x+10 > 0$ (чтобы корни
извлекались),
то эти решения - решение
уравнения $\sqrt{x^2-x+10} = x+2$

Осталось показать, что
 $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{6}{5}\right) + 10$ - положительное,
а это очевидно верно.

Итак корни $= (x_1 = -3) \text{ и } (x_2 = \frac{6}{5})$

Ответ: $(-3; \frac{6}{5})$

Задача 15



Пусть $\angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha$
 Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей.
 (как показано на рисунке)
 Тогда $\angle CO_1B = 2\alpha$; $\angle BO_2D = 180 - 2\alpha$
 Тогда $CF^2 = BF^2 + CB^2 = CB^2 + BD^2$
 (BF = BD по условию)

$$\rightarrow CF^2 = BF^2 + CB^2 = BD^2 + CB^2$$

по т. косинусов $\triangle CO_1B \Rightarrow CB^2 = 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cos 2\alpha$

по т. косинусов $\triangle BO_2D \Rightarrow BD^2 = 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$
 (по условию $O_1C = O_1B = 9$)
 (по условию $O_2B = O_2D = 9$)

тогда по

$$CF^2 = BF^2 + CB^2 = BD^2 + CB^2 = 4 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9^2 (\cos 2\alpha + \cos(180 - 2\alpha))$$

$$CF^2 = 4 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9^2 (\cos 2\alpha + \cos(180 - 2\alpha))$$

(можно было рассмотреть тригонометрическую окружность)

Известный факт: $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha) \Rightarrow \cos \alpha + \cos(180 - \alpha) = 0$

$$\text{тогда } CF^2 = BF^2 + CB^2 = BD^2 + CB^2 = 4 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9^2 (0) = 4 \cdot 9^2$$

⇓

$$CF^2 = 4 \cdot 9^2$$

⇓

$$CF = 2 \cdot 9 = 18$$

Ответ: $CF = 18$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

Сначала решим такую задачу: когда система уравнений $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ty=k \end{cases}$ имеет бесконечно много решений. (a, b, c, d, t, k - дано)

Также ясно, что $a, b, d, t \neq 0$ иначе пусть какая-то из них равна 0 тогда в одном из уравнений одно из слагаемых ~~в~~ до заглашювь и получилось бы уравнение типа $by=c$ (например) откуда y находится однозначно, а значит и в другом уравнении однозначно находится x . Пусть $a, b, d, t \neq 0$.

Решим систему. $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ty=k \end{cases}$

умножим первое уравнение на $\frac{d}{a}$ ($a \neq 0$), тогда получим систему $\begin{cases} dx + \frac{db}{a}y = \frac{dc}{a} \\ dx + ty = k \end{cases}$

Откуда вычитая из первого уравн. - второе получим, что $y(\frac{db}{a} - t) = \frac{dc}{a} - k$ т.е. система из одного неизвестного. (y)

Если $\frac{db}{a} - t \neq 0$, то $y = \frac{\frac{dc}{a} - k}{\frac{db}{a} - t}$ - находится однозначно, а значит и x тоже находится однозначно.

Отсюда значит $\frac{db}{a} - t = 0 \Rightarrow \frac{db}{a} = t$, или $\frac{d}{a} = \frac{t}{b}$

Посмотрим еще раз на уравнение $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ty=k \end{cases}$

Мы научились, что $\frac{d}{a} = \frac{t}{b}$ — те системы как-бы подходят. Отсюда следует, что $\frac{d}{a} = \frac{t}{b} = \frac{k}{c}$, если $k, c \neq 0$. Верно! Очевидно верно и обратное: система уравнений имеет бесконечно много решений, если $\frac{a}{d} = \frac{b}{t} = \frac{c}{k}$ ($a, d, b, t, c, k \neq 0$).

Перейдем к решению задачи.

$$3(a+b)x + 12y = a$$

$$4bx + (a+b)y = 1$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$$

$(a+b)$, и $b \neq 0$ т.к. иначе было бы одно решение или даже 0 решений. А доказывать это не надо.

Из равенства

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} \text{ получаем, что } (a+b)^2 = 16$$

• 1 случай $a+b=4 \Rightarrow a=4-b$, тогда подставим $a=4-b$

$$\text{в равенства } \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{12}{4b} = 4-b$$

$$\Rightarrow \frac{b}{4-b} = 3$$

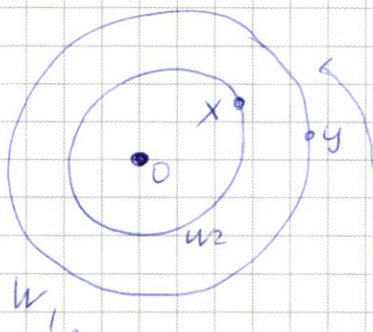
$$-b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$(b-3)(b-1) = 0 \Rightarrow b = 1 \text{ или } b = 3.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 11



Заметим, что раз точка $M(-1, \sqrt{3})$ принадлежит меньшей окружности, то ее радиус $= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Радиус большей окружности равен $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

Пусть даны точки X и Y на разных окружностях.

Докажем, что расстояние между X и Y $XY \geq 2$ верно.

т.к. Заметим, что $OX=2$, $OY=4$, то

по неравенству треугольника $OX + XY \geq OY$

$$\downarrow$$

$$2 + XY \geq 4$$

$$\downarrow$$

$$XY \geq 2$$

причем равенство

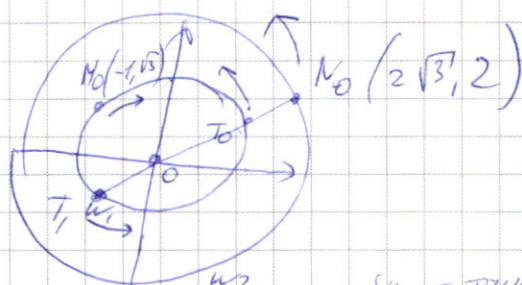
достигается тогда и только тогда, когда O, X, Y коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой.

С другой стороны диаметр первой окружности в 2 раза больше диаметра второй окружности (т.к. $\frac{r_1}{r_2} = 2$)

Тогда пока палочка входит в большой круг, то за это время муравей пробежит два маленьких круга u_2

И когда палочка пройдет 1 круг, а муравей - 2 круга u_2

то они встают в позиции, ~~координаты~~ ~~и~~ векторы
 стали перед началом движения $\Rightarrow$ их действие - упирается
 спирали в 1 большой круг т.е 2 маленьких
 круга муравьи. Вертикаль к решению задачи
 Вертикаль к задаче



Замечает, что
 после того, как
 муравей прошел 1 круг
 т.е. прошел 1 круг, а
 т.е. он стоит в
 точке диаметрально
 противоположной начальной
 точке. Если мы имеем 1
 виток по второму витку
 T_0X , где X - виток $= T_1X$.

будет точки, такие, что

Зададим точку T_0 - такую, что O, T_0, M_0 лежат на
 одной прямой (как нарисован на отрезке O, M_0), а точку
 T_1 - точку, лежащую на u , такую, что T_1, O, M_0 лежат
 на одной прямой и O лежит на T_1, M_0 . Итого в
 точки T_0 и T_1 точка такого же как в M_0 (стало
 те скоростью и тем же направлением). Тогда нам
 надо найти места встречи M_0 и T_0 и M_0 и T_1 за
 2 круга M_0 (1 круг M_0) - чтобы найти продолжительность.

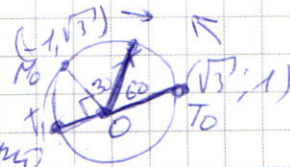
у точки T_0 - координата $(\sqrt{3}; 1)$ т.к. $\frac{OT_0}{OM_0} = 2$

у точки T_1 - координата $(-\sqrt{3}; -1)$

Сначала найдем встречу M_0 и T_0

т.к. T_0 бежит в два раза быстрее, то

надо найти такую точку X , что $\frac{\text{длина дуги } M_0X}{\text{длина дуги } XT_0} = \frac{1}{2}$



~~сразу~~ также заметим, что $\angle M_0OT_0$ где O - центр окружности.
 Докажем это скалярное произведение векторов OM_0 и OT_0
 $(\vec{OM_0}; \vec{OT_0}) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow OM_0 \perp OT_0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По условию Т.К точка X делит дугу M_0T_0 в отношении $\frac{1}{2}$ считая от вершины $M_0 \Rightarrow TO \angle XO T_0 = 60,9 \angle XO M_0 = 30,9$
откуда координаты ~~точки X~~ ~~$\frac{\sqrt{3}+1}{3} + (-1) = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$~~

~~$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3} + (-1) \right)$$~~

тогда скалярное произведение

~~$$(\vec{OX}, \vec{OT_0}) = 90^\circ$$~~
$$(\vec{OX}, \vec{OT_0}) = 90^\circ \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$= x_0 \sqrt{3} + y_0 \cdot 1 = 2, \text{ и с другой стороны } x_0^2 + y_0^2 = 4$$

(где x_0, y_0 - координаты точки X)

$$y_0 = \frac{x_0 \sqrt{3} + 2}{1 - x_0 \sqrt{3}} \Rightarrow x_0^2 + \left(\frac{x_0 \sqrt{3} + 2}{1 - x_0 \sqrt{3}} \right)^2 = 4$$

~~$$4x_0^2 - 4x_0 \sqrt{3} + 4 = 0$$~~
$$4x_0(x_0 + \sqrt{3}) = 0$$

~~$$x_0(x_0 - \sqrt{3}) = 0$$~~

$$x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 5 \text{ (невозможно)}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow$$

возможно.

1. Ответ ~~(0; 2)~~ (0; 2)

Аналогично рассуждая для точки T_0 получим, что они пересекаются
в точке T_0 ~~и что $\angle M_0 T_0 T_0 = 90^\circ$~~ $\angle M_0 O T_0 = 90^\circ \Rightarrow$

Точки пересечения дуг $M_0 O T_0$ $= 2 \neq 0$ и 3 равны $\Rightarrow$ точка пересечения (второе имеет на точке T_0)
" $(\sqrt{3}; 1)$

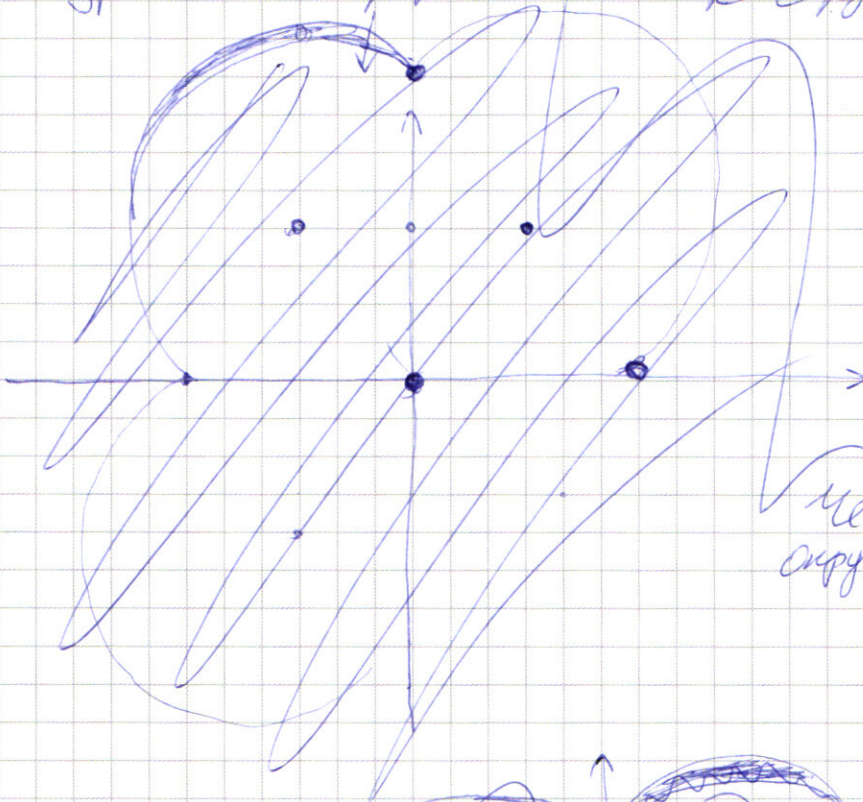
Ответ: ~~(0; 2)~~ (0; 2); $(\sqrt{3}; 1)$

Задача 7.

Переходим сначала в полярные координаты

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25$$

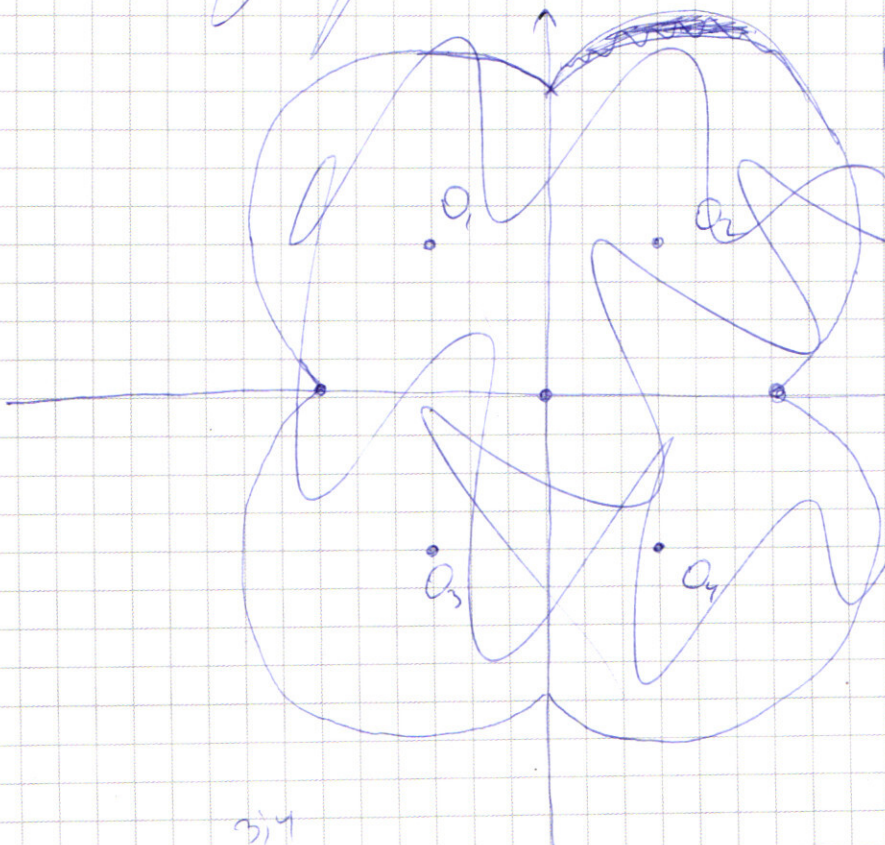
Это уравнение на графике - четыре окружности.



Четыре почти
окружности с центрами
в точках $(3, 4)$, $(-3, 4)$,
 $(3, -4)$, $(-3, -4)$

с радиусом 5
как показано на
рисунке

Тогда
в каждой
четверти - по две
(центр и середина
окружности с радиусом
5 в этой
четверти, причем
лежащие в этой
четверти будут
теснее от окружности
окажутся по
мере удаления
в этой данной
четверти.



3, 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

Решить первое ~~уравнение~~ неравенство.

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6.$$

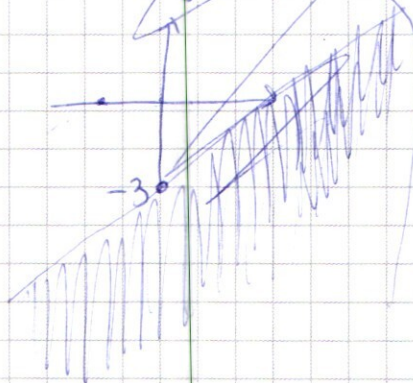
Рассмотрим 4 случая.

$$1) x-3-y \geq 0; x-3+y \geq 0$$

Тогда неравенство сверху равносильно $2x-6 \leq 6$

$$\begin{aligned} 2x &\leq 12 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-3-y &\geq 0 \\ y &\leq x-3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x-3+y &\geq 0 \\ y &\geq x-3 \end{aligned}$$



Задача №4.

~~Задача~~

Рассмотрим 2 случая.

① Случай: $x > 1$, тогда $|x-1| = x-1$ и нам надо доказать неравенство

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2/(x-1) + 1 \geq 0$$

||

$$x^2 - 2x + 1 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

||

$$(x-1)^2 + x^2/(2x^2 - 3x + 3)$$

↑
всегда положительное

положительное, а

$2x^2 - 3x + 3$ всегда-
положительное, тк.

$D = 9 - 24 < 0$, а старший,
член - положительный.

Следовательно при $x > 1$ неравенство
верно.

② Случай: $x \leq 1$

Тогда $|x-1| = -x+1$, и нам надо доказать неравенство

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

Заметим, что $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 = (x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1)$



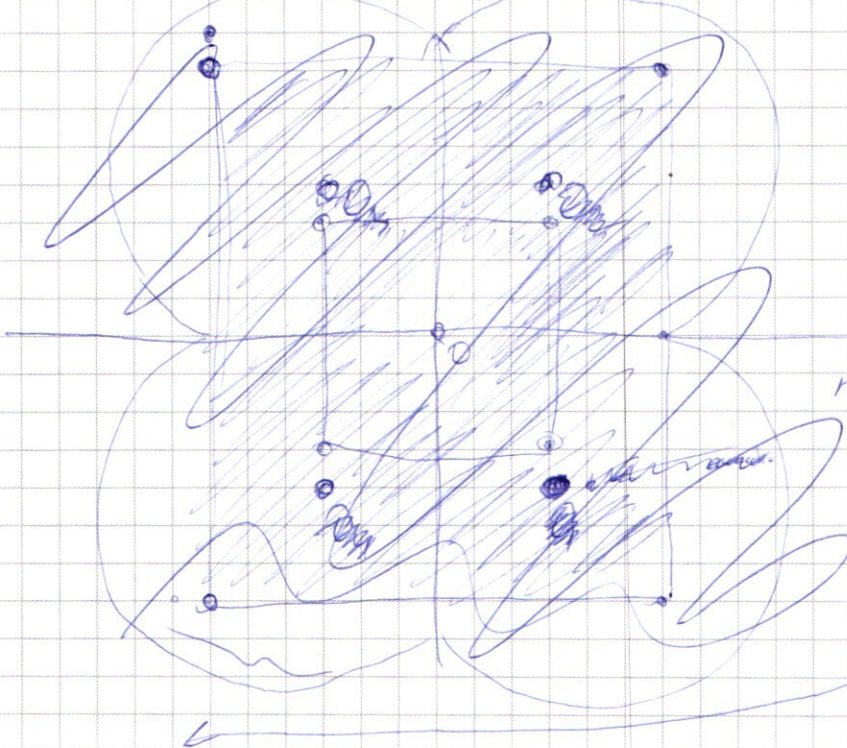
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

Функция скачка в поле радиомо

На рисунке это только —
и "почти" окружности

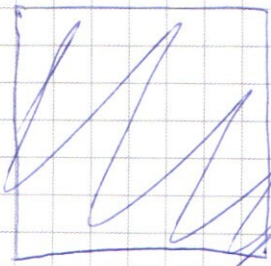
$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25$$



Четыре "почти"
окружности
с центрами
в точках
 $(3, 4)$; $(-3, 4)$;
 $(3, -4)$; $(-3, -4)$

Рисунок "радиусы 5"
на графике
как показано на
рисунке.

и есть в
каждой четверти
по центру и строится
окружность с этим
центром и
"вызывает" за
пределами этой
четверти



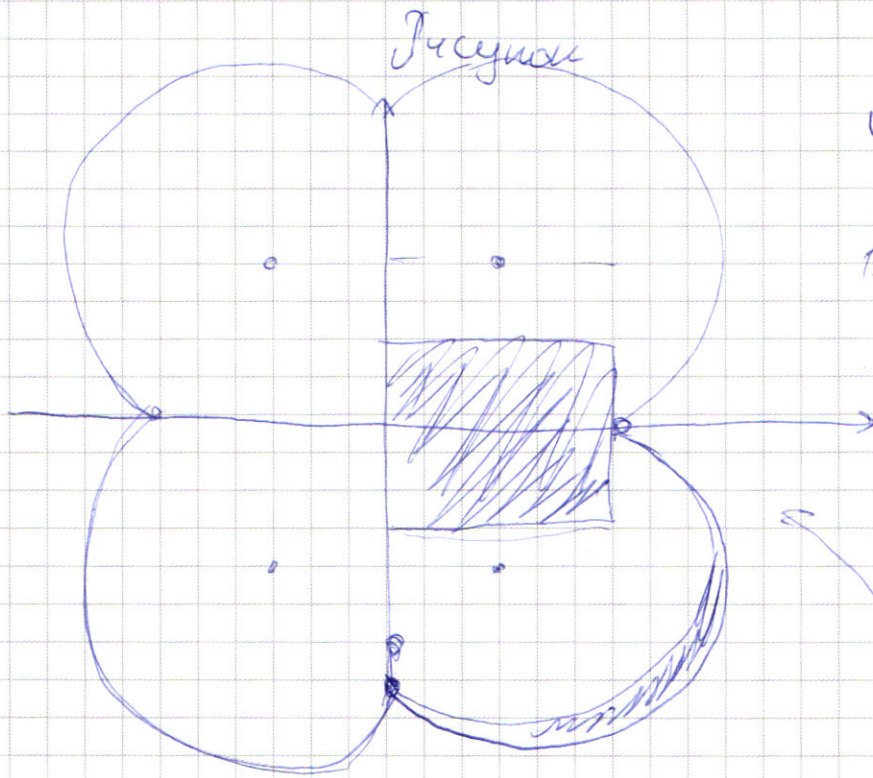
$$2 \text{ радиуса } (x-3)^2 + (x-3)^2$$

характеризует квадрат с вершинами

$$(6, 6); (6, -6); (-6, -6); (-6, 6)$$

и то, что квадрат не

$$\text{Итог: радиусы } (6, 0) \text{ и } (-6, 0)$$



4 окружности
с центрами в
 $(3, 4); (3, -4); (-3, 4);$
 $(-3, -4)$

Второе уравнение характеризует
принадлежность точек
к рисунку
затраченной.

Услов. 1 решение
 $(6; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / (x-1) + 1$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / (x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 1 - 3x^3 + 3x^2 =$$

$$(x-1)^2 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

$$0 = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

$$2x^2 - 3x + 3 \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / (1-x) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x^3 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + 2x^4 + 3x^2 - 3x^2 \geq 0$$

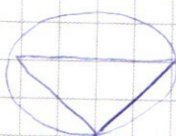
$$2x^4 + 3x^2 \geq 3x^2$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0$$

$$+b-c-x \quad a+b \leq x$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x^3 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 + 1 + 3x^3 \geq 2x + 3x^2$$



$$g \leq |b-c-x| + |b-c-x|$$

$$g \leq |b-c-x|$$



черновик



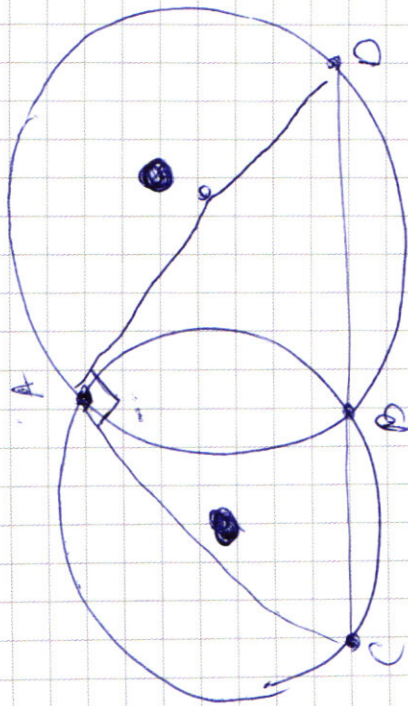
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$2x^2 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x + 1$$



$$\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{d} \right) = \frac{a}{d} - \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{d} \right)$$

$$\int \frac{a}{d} dx = \frac{a}{d} x + \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{d} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{d} \right) = \frac{a}{d} - \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{d} \right)$$



$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

$$56.5 = 280 \cdot 3 =$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

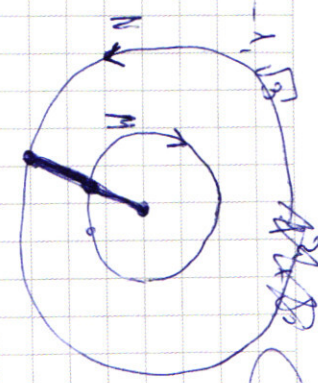
$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$

$$8 \cdot 46.5 = 372$$



$$2\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

