МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

ОДЗ: $x^3-64x+200>0$

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{10\sqrt{2}}{4}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$

$\frac{\sqrt{2}}{4}\cancel{(x+10)}\sqrt{x^3-64x+200}=\cancel{(x+10)}(x-4)$ $(x+10=0$ − корень)

$x=-10$

$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)$ $|()^2$

$x^3-\cancel{64x}+200=8x^2-\cancel{64x}+128$

$x^3-8x^2+72=0$

$(x-6)(x^2-2x-12)=0$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{1}=1\pm\sqrt{13}$

$(x-6)(x-1-\sqrt{13})(x-1+\sqrt{13})=0$

$\left[\begin{array}{l} x=6 \text{ − подходит под ОДЗ} \\ x=1+\sqrt{13} \\ x=-10 \text{ − не подх.} \\ x=1-\sqrt{13} \end{array}\right.$

$(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200 \overset{?}{\geq} 0$ − подходит.

$1-1000+640+200<0$

$\cancel{1}+3\sqrt{13}+39+\cancel{13\sqrt{13}}-\cancel{64}-\cancel{64\sqrt{13}}+\cancel{200}\overset{?}{\geq}0$ $+176$, $-48\sqrt{13}$

$(1-\sqrt{13})^3-64(1-\sqrt{13})+200\overset{?}{\geq}0$

$\cancel{1}-3\sqrt{13}+\cancel{39}-13\sqrt{13}-\cancel{64}+64\sqrt{13}+\cancel{200}\overset{?}{\geq}0$

$48\sqrt{13}+176\geq0 \Rightarrow$ подходит

$-48\sqrt{13}+176\overset{?}{\geq}0$ $|:8$

$\cancel{-6\sqrt{13}+22}$ $-6\sqrt{13}+22\overset{?}{\geq}0$

$22\overset{?}{\geq}3\sqrt{13}$ $|()^2$ $11\overset{?}{\geq}3\sqrt{13}$

$121>117$

Итого: $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \\ x=1-\sqrt{13}. \end{array}\right.$

2

? почему

Ответ: $x\in\{\cancel{1-\sqrt{13}};1+\sqrt{13};6\}$.

№2.

$S_0 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}$ q - знаменатель прогрессии. $\boxed{q \neq 1}$ $\boxed{b_1 \neq 0}$

$S_1 = b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + 40b_6 + \dots + 40b_{3000} = 5S_0$

$S_2 = b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = xS_0$ $x - ?$

$b_1 \to b_2 \to b_3 \to b_4 \to b_5 \to b_6 \to \dots$ ($\cdot q^3$)

$qb_1\ q^2b_1\ q^3b_1\ q^4b_1\ q^5b_1$

S_n геом $= \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_0 = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$; $S_1 = S_0 + 39\underbrace{(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000})}_{\frac{b_3(1-(q^3)^{1000})}{1-q^3}} = S_0 + \frac{39b_3(1-q^{3000})}{1-q^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_0 + \frac{39b_3(1-q^{3000})}{1-q^3} = 5S_0 = \cancel{5} 4 \cdot \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} + \frac{39b_3(1-q^3)}{\frac{1-q^3}{1+q+q^2}}$ ($b_3 = b_1q^2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = \frac{39q^2}{1+q+q^2} \Rightarrow 39q^2 = 4q^2 + 4q + 4 \Rightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0$

$q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{35} = \frac{2}{5} \,|\, -\cancel{\frac{2}{7}}$ (все положит)

$\boxed{q = \frac{2}{5}}$

$S_2 = S_0 + 2\underbrace{(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000})}_{\frac{b_2(1-(q^2)^{1500})}{1-q^2}}$ $=$ $q_2 = q^2$ (через 1-ш) ($b_2 = b_1q$)

$= \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} + 2 \cdot \frac{b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2}$

$\frac{S_2}{S_0} = \frac{\frac{b_1(1-q^{3000})(1+q) + 2b_1q(1-q^{3000})}{1-q^2}}{\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}} = \frac{\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}\left(\frac{1+q}{1+q} + \frac{2q}{1+q}\right)}{\frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}} =$

$= 1 + \frac{2q}{1+q} = 1 + \frac{2 \cdot 0{,}4}{1{,}4} = \frac{1{,}4 + 0{,}8}{1{,}4} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$.

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

4

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

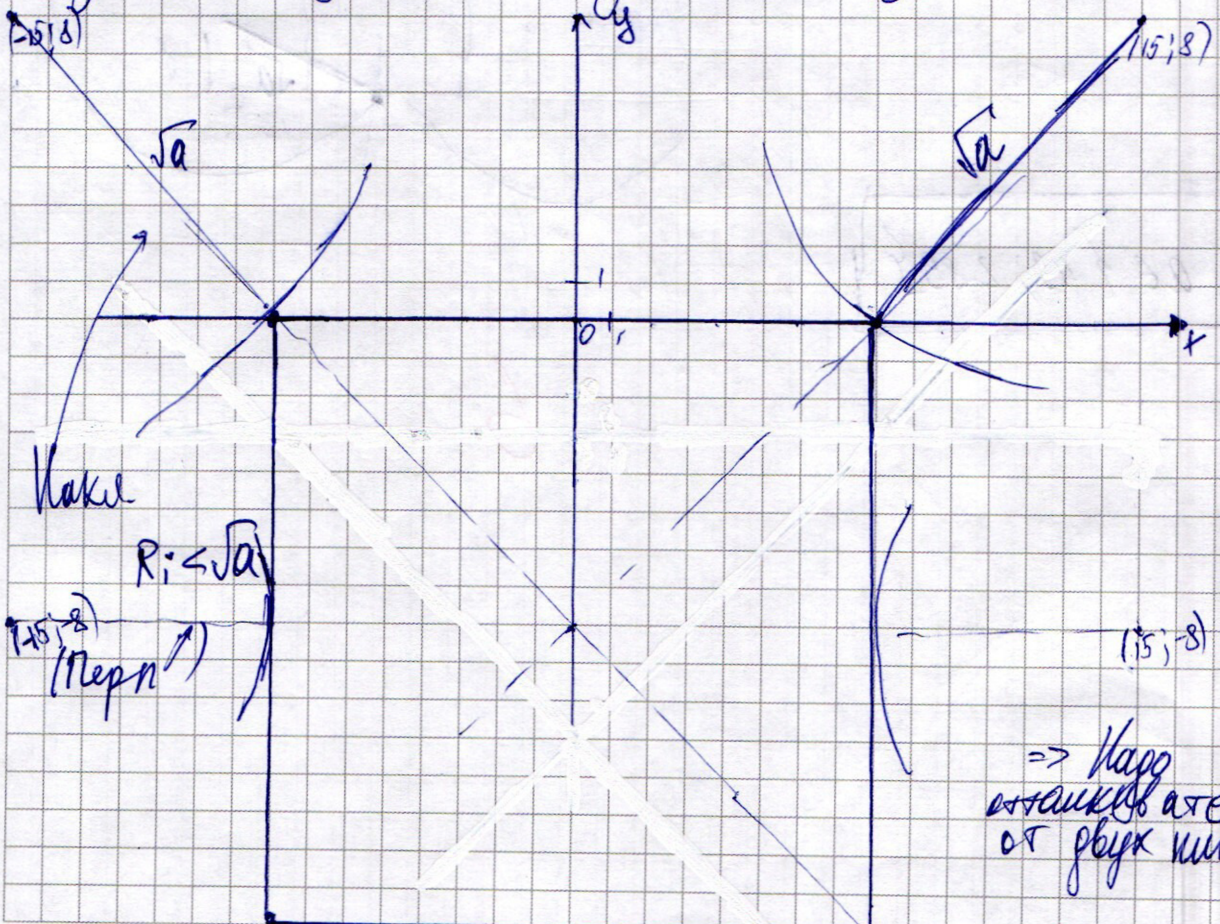
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 & - I \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a & - II. \end{cases}$

Построим график $I^{ой}$ функции:

① $\begin{cases} y+x+8+y-x+8=16 \Rightarrow y=0 \\ y+x+8\geq 0 \Rightarrow y\geq -x-8 \\ y-x+8\geq 0 \Rightarrow y\geq x-8 \end{cases}$ ② $\begin{cases} y+x+8-y+x-8=16 \Rightarrow x=8 \\ y+x+8\geq 0 \Rightarrow y> -x-8 \\ y-x+8<0 \Rightarrow y<x-8 \end{cases}$

③ $\begin{cases} -y-x-8+y-x+8=16 \Rightarrow x=-8 \\ y+x+8<0 \Rightarrow y<-x-8 \\ y-x+8\geq 0 \Rightarrow y\geq x-8 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} -y-x-8-y+x-8=16 \Rightarrow y=-16. \\ y+x+8<0 \Rightarrow y<-x-8 \\ y-x+8<0 \Rightarrow y<x-8 \end{cases}$



$\Rightarrow$ Надо отталкиваться от двух нижн (.).

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

II $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

I. $x\geq 0$ $y\geq 0$ I четв.

$(x-15)^2+(y-8)^2=a$

III $x<0$ $y\geq 0$ II четв

$(x+15)^2+(y-8)^2=a$

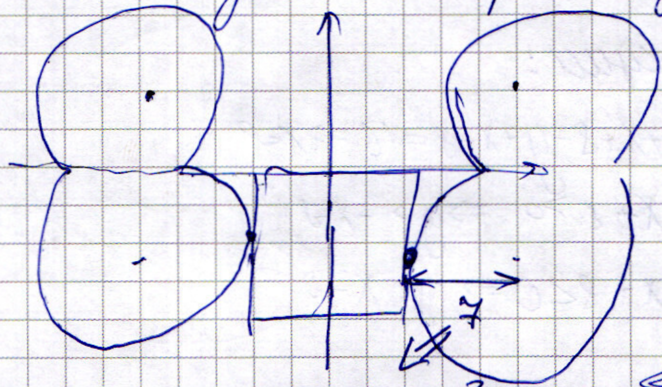
II $x\geq 0$ $y\leq 0$ IV четв.

$(x-15)^2+(y+8)^2=a$

IV $x\leq 0$ $y\leq 0$ III четв

$(x+15)^2+(y+8)^2=a$

Итого единств вар-т, где ровно два решения:

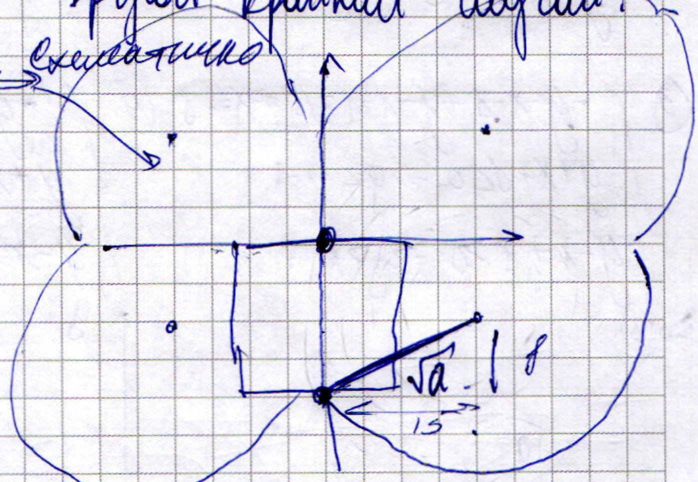


$\underline{a=49}=7^2$

Если а чуть больше $\Rightarrow$ не два решения.

Другой крайний случай:

схематично



$a=64+225=289=17^2$

$\boxed{\text{Ответ: } a\in\{49;\,289\}.}$

6

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

$(|x+2|)^2-5x^2|x+2|+4x^4\geq 0$

$(|x+2|-x^2)(|x+2|-4x^2)\geq 0$

I. $x\geq -2$

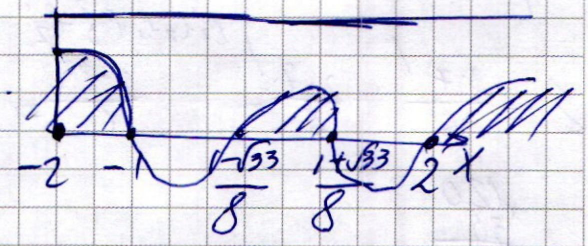
$(x+2-x^2)(x+2-4x^2)\geq 0$ $\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$(x^2-x-2)(4x^2-x-2)\geq 0$

$(x-2)(x+1)\cdot\cancel{4}\cdot\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\geq 0 \quad |:4.$

$-1<\frac{1-\sqrt{33}}{8}<0$ $\quad 1-\sqrt{33}<0$ $\quad 0<\frac{1+\sqrt{33}}{8}<1$

т.к. $\sqrt{33}<9$ $\quad$ т.к. $\quad 1+\sqrt{33}>0$ $\quad \sqrt{33}<7.$



Итого: $x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup$
$\cup[2;+\infty)$.

II. $x<-2.$

$(-2-x-x^2)(-x-2-4x^2)\geq 0$

$(\underbrace{x^2+x+2}_{D<0})(\underbrace{4x^2+x+2}_{D<0})\geq 0 \Rightarrow$ Итого: $x<-2.$

6

$$\boxed{\text{Ответ: } x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty).}$$

№1

$4900 = 7\cdot7\cdot10\cdot10 = 7\cdot7\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ восьмизначное должно быть из $2^{ух}$ $7^{ок}$, $2^{ек}$, $5^{ок}$ и $1^{ц}$.

или $2^{ух}$ $7^{ок}$, $5^{ок}$, $1^{ой}$ $4^{ки}$ и $3^{ёх}$ единиц.

7 7 2 2 5 5 11

I. □ □ □ □ □ □ □ □

~~7~~7 4 5 5 111

II. □ □ □ □ □ □ □ □

Можем представить себе генерацию числа так: На $1^{ое}$ место любая из 8, на $2^{ое}$ любая из 7 и т.д., только надо учесть повторы.

$\sum$ вар-ов I: $\frac{8!}{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1} = \frac{8!}{16} = \frac{7!}{2}$

$\sum$ вар-ов II: $\frac{8!}{2\cdot2\cdot2\cdot3} = \frac{7!}{3}$

$C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_3^2 C_2^1$

$\sum = \frac{3\cdot7!}{6} + \frac{2\cdot7!}{6} = \frac{5\cdot7!}{6} = 35\cdot5! = 35\cdot120 = 4200$

$\times\begin{array}{r}120\\35\\\hline 600\\36\\\hline 4200\end{array}$

$\boxed{\text{Ответ: 4200}}$

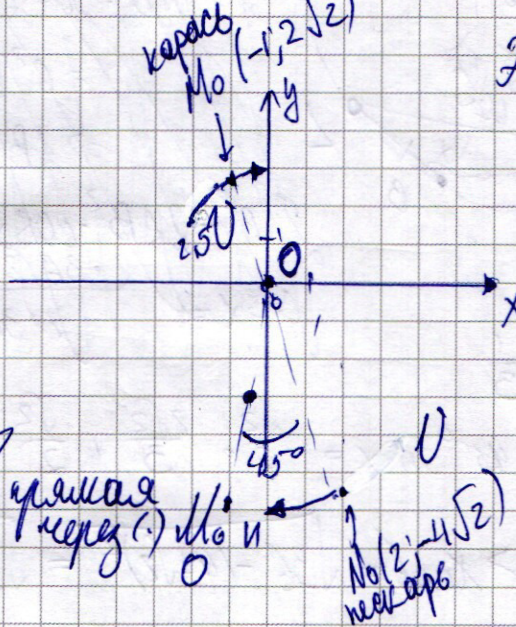
4

Страница № 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Коорд. пескаря, когда $R = min$



Это две концентрические окружности.

$R_{\text{движ карася}} = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$

$R_{\text{движ пескаря}} = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 6$

$y = kx + b$

$\left.\begin{matrix} 2\sqrt{2} = -k + b \\ 0 = b = 0 \end{matrix}\right\}$ прямая через (·) M_0 и O

$y = -2\sqrt{2}\,x$

Проверим, лежит ли (·) N_0 на этой прямой: $-4\sqrt{2} = -2\cdot\sqrt{2}\cdot 2$ – лежит. =>

$\Rightarrow \Delta\varphi_0$ рыб $= 180° = \pi$.

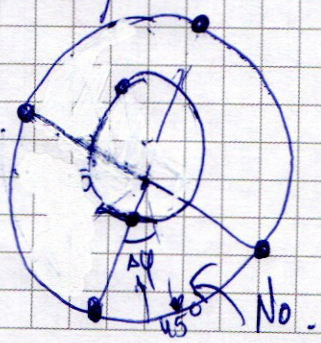
$\omega_{\text{карася}} = \frac{2{,}5U}{R_k} = \frac{5U}{6}$.

$\omega_{\text{пескаря}} = \frac{U}{R_n} = \frac{U}{6}$.

~~Введем параметр t => движение карася описывается так:~~

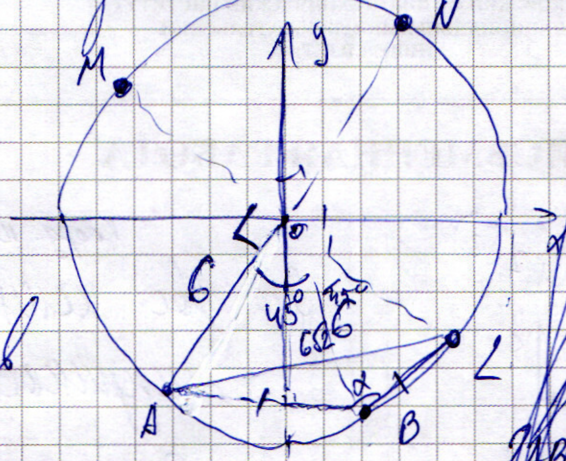
Э пескарь сместился на $\Delta\varphi_i$ => карась на $5\Delta\varphi_i$

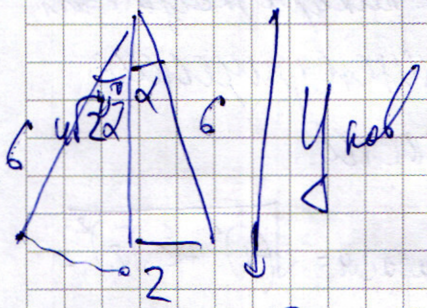
$4\Delta\varphi_i = 180° \Rightarrow \Delta\varphi_i = 45°$.



Когда пескарь проплывает $45°$, карась удаляется (приближается) на $180°$. Затем он встретится еще через $90°$

Это все 4-е возможных положения





$$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos(45^\circ-\alpha) = \cos 45 \cos\alpha + \sin 45^\circ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}.$$

$$y_{нов} = 6\cdot\cos(45-\alpha) = -(4+\sqrt{2}) \Rightarrow x_{нов} = \sqrt{36-(4+\sqrt{2})^2} = \sqrt{36-16-2-8\sqrt{2}} =$$

по модулю

$$= \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = (4-\sqrt{2}).$$

$x_A = -4+\sqrt{2}$ $\quad$ $x_N = 4-\sqrt{2}$

$y_A = -4-\sqrt{2}.$ $\Rightarrow$ $y_N = 4+\sqrt{2}.$

$x_M = y_A = -4-\sqrt{2}$ $\quad$ $y_L = -x_N = -4+\sqrt{2}.$

$y_M = -x_A = 4-\sqrt{2}$ $\quad$ $x_L = y_N = 4+\sqrt{2}$

Ответ: I. $(-4+\sqrt{2};\ -4-\sqrt{2})$

II. $(-4-\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2})$

III $(4-\sqrt{2};\ 4+\sqrt{2})$

IV $(4+\sqrt{2};\ -4+\sqrt{2})$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

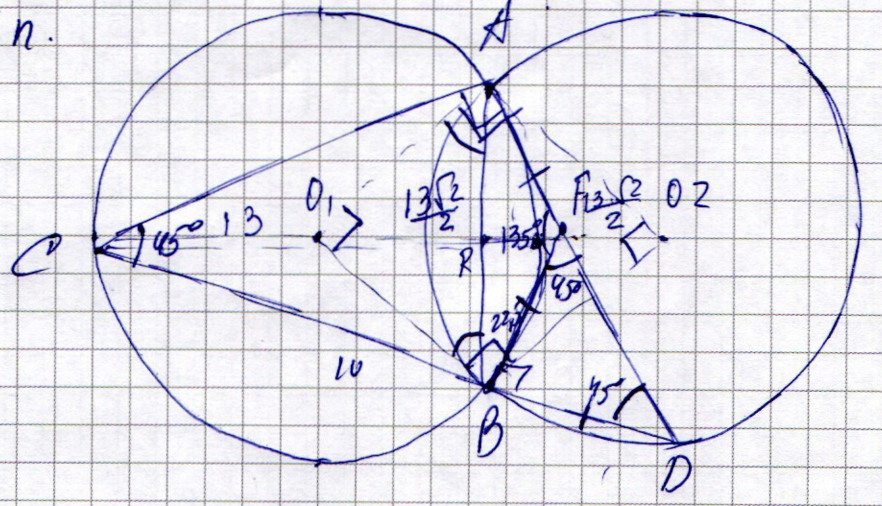
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

I п.



$R_1=R_2=13$

$\angle CAD=90^\circ$

I $\angle ACB=\alpha$ (впис)

$\Downarrow$

$\angle AO_1B=2\alpha$ (центр)

ΔAO_1B и ΔAO_2B:

$AB=AB$

$AO_2=AO_1 \Rightarrow \angle AO_2B=2\alpha$

$BO_2=BO_1$

$\Downarrow$

$\angle ADB=\alpha$ (впис)

$\alpha+90+\alpha=180 \Rightarrow \alpha=45^\circ$

Куда попадет (·)F?

$FB\perp CD \Rightarrow \angle FBD=90^\circ$

$\angle BFD = \angle BDF=45^\circ$ (через углы),

но если идти через стороны (т.е. $BF=BD \Rightarrow \Delta$-ик-р/б $\Rightarrow$ по 45°) тоже получается $45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (·)F лежит на прямой AD и $BD=BF$. +1

$CF=\sqrt{CB^2+BF^2}$

$AB=13\sqrt2$ $\left(\frac{13}{\cos 45}\right)$

$\angle AO_1B=\angle AO_2B=90^\circ$

$CF=\sqrt{CA^2+AF^2}$

$\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2$

($\Delta AO_1O_2=\Delta BO_1O_2$ общ. сторона и 2 одинак. стороны)

$CB^2+BF^2=CA^2+AF^2$

O_1AO_2B — квадр.

Присутствует гориз симм $\Rightarrow$

$\Rightarrow F\in O_1O_2 \Rightarrow \boxed{CF=13(\sqrt2+1)}$

II п. $CB=10$

~~$BF=\sqrt{338+26\sqrt2+169}$~~

$100+BF^2=169(3+2\sqrt2) \Rightarrow BF^2=407+338\sqrt2$.

$\overset{\parallel}{AF}$

$S=\frac{CA\cdot AF}{2}=\frac{10\cdot\sqrt{407+338\sqrt2}}{2}$ (=)

—

не верно

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\text{б)}\ \boxed{5\sqrt{407+338\sqrt{2}}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Ответ: }&\text{а) } 13(\sqrt{2}+1)\\ &\text{б) } 5\sqrt{407+338\sqrt{2}}\end{aligned}}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)