

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

второй раз $\varphi = 200^\circ$

третий раз $\varphi = 320^\circ$

4 раз $\varphi = 80^\circ$

П.к. условия ск. муравья в 2
разы больше, чем ск. муравья.
Значит муравей $\Rightarrow$ 3 раз прошел.

почему?

по 120°, а муравей 240°
от окруж.

A $(4 \cos 80^\circ; 4 \sin 80^\circ)$

A₂ $(4 \cos 200^\circ; 4 \sin 200^\circ)$

A₃ $(4 \cos 320^\circ; 4 \sin 320^\circ)$

Вначале (до 1 востр.)

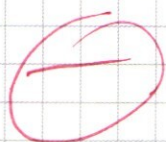
муравей пройдет 20°;

а муравей — 40°;

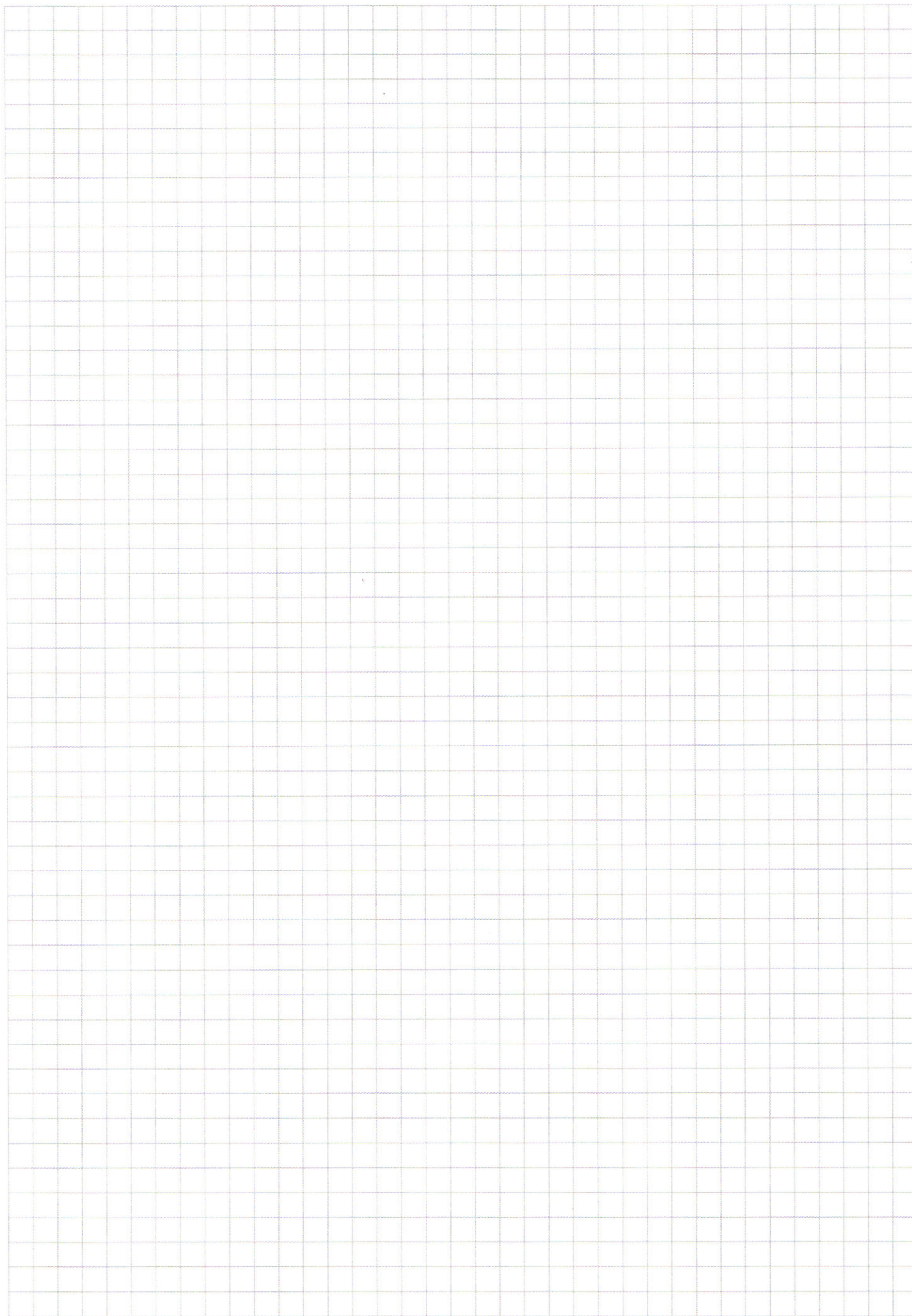
т.к. $\angle, - \varphi, = 60^\circ$, а муравей

пройдет $\varphi = 20^\circ \Rightarrow 20^\circ + 60^\circ =$

$= 80^\circ$.



Ответ: $(4 \cos 80^\circ; 4 \sin 80^\circ)$
 $(4 \cos 200^\circ; 4 \sin 200^\circ)$
 $(4 \cos 320^\circ; 4 \sin 320^\circ)$



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

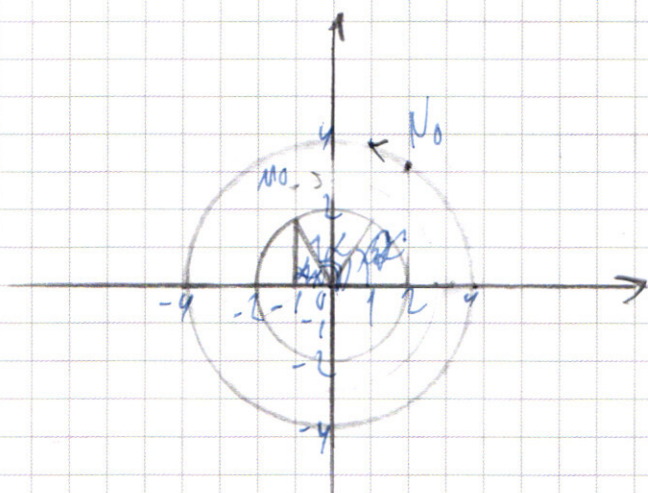
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

м.



Вычисляем радиусы.

1/ $No(-1; \sqrt{3})$

$$(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

2/ $No(2\sqrt{3}; 2)$

$$(2\sqrt{3})^2 + 2^2 = R^2$$

$$R^2 = 16$$

$$R = 4$$

Длина окруж.

$$L_m = 2\pi r = 2\pi \sqrt{10}$$

$$L_d = 2\pi R = 8\pi$$

$$\begin{cases} \frac{x_m}{\sqrt{10}} = \frac{x_d}{4} & 4x_m = x_d \sqrt{10} \\ \frac{y_m}{\sqrt{10}} = \frac{y_d}{4} & 4y_m = y_d \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\frac{x_m}{y_m} = \frac{x_d}{y_d}$$

$$\omega T = 2\pi \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$vT = 2\pi R$$

$$\beta = 60^\circ \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\alpha_1 = 110^\circ$$

$$\beta_1 = 60^\circ$$

$$\omega_d = \frac{v}{4} \quad \omega_m = \frac{v}{2} \quad \text{Для кратчайшего расстояния надо, чтобы } \alpha = \beta$$

$$\alpha = \alpha_1 - \omega_m \quad \beta = \beta_1 - \omega_m \quad \text{Первый раз при } v = 80^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^3 + x^2 + 3x + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 & 1 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}$$

49

Очевидно, что выражение $x^3 + x^2 + 3x + 14$ на промежутке $x \in [-2; +\infty)$ будет принимать минимальное значение при $x = -2$. / раскл $x^3 + x^2 + 3x = x(x^2 + x + 3) \Rightarrow$ верну

$$\Rightarrow \text{при } x = -2 \quad -8 + 4 - 6 + 14 = 4 \Rightarrow \text{выражение}$$

$x^3 + x^2 + 3x + 14$ не принимает отрицательных значений.

$$\begin{cases} (x-2)/(x^2+x-3) = 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \sqrt{13} > \sqrt{9} \Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < -2$$

Корень $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ не годится.

П. к. выше мы выяснили, что $x^3 - x^2 + 10$ меньше 0 только при $x < 0$, а $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0 \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ - корень.

Ответ: $2; \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

13.

$$(x+3)/\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)/\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)/(x+2)$$

$$x^3 - x + 10 = x^3 - 2x^2 + 2x + 4$$

$$-2x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$-2x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - x + 10 : x+2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - x + 10 \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 3x + 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x + 10 = x^3 - \\ \underline{x^3 - 1x + 10} \\ 0 \end{array}$$

Рассмотрим подкоренные выражения:

$x^3 - x + 10$. Это делится на 0. Это меньше 0 только когда $x < 0$, т.к. в пр. $x \in [1; +\infty)$ $x^3 + 10 \geq x$ а в пр. $x \in [0; 1]$ $10 \geq x$

Теперь проверим, подходит ли $x = -3$ и сократим,

$$(-3)^3 + 3 + 10 \geq 0$$

$$-27 + 3 + 10 \geq 0$$

$$-14 \geq 0$$

III. е. $x = -3$ — не корень ур-ния. Можно сокр.

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$|x^3 - x + 10| = |x + 2|^2$$

$$x^3 - x + 10 = \pm (x + 2)^2 \quad \text{После решения проверим на III.}$$

$$\begin{cases} x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4 \\ x^3 - x + 10 = -x^2 - 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Сначала разложим число 1400 на множители

$$\begin{array}{r} 1400 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 700 \\ \quad \swarrow \searrow \\ \quad 2 \quad 350 \\ \quad \quad \swarrow \searrow \\ \quad \quad 2 \quad 175 \\ \quad \quad \quad \swarrow \searrow \\ \quad \quad \quad 5 \quad 35 \\ \quad \quad \quad \quad \swarrow \searrow \\ \quad \quad \quad \quad 5 \quad 7 \end{array}$$

Получается 6 цифр

2; 2; 2; 5; 5; 7.

Еще надо 8 цифр $\Rightarrow$ будем использовать цифру 1. (т.к. по условию 1-е место занята)

1) Вариант, когда 2 нас три 2

1; 1; 2; 2; 2; 5; 5; 7.

В этом варианте получается 8! комбинаций

2) вар, когда две двойки образуют 4.

1; 1; 1; 2; 4; 5; 5; 7.

Получается 8! комбинаций.

3) вар, когда три двойки образуют 8

1; 1; 1; 1; 5; 5; 7; 8.

Получается 8! комбинаций

Всего 3 $\cdot$ 8! комбинаций, т.к. цифр состоит из разных цифр.

$$3 \cdot 8! = 3 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3 \cdot 720 \cdot 7 \cdot 8 = 35040 \cdot 8 =$$

$$= 3 \cdot 282240 = 120960 \text{ чисел.}$$

Ответ: 120960 чисел

разбор
проверка

Ⓢ

$$\begin{array}{r} \times 720 \\ 720 \\ \times 5040 \\ 362880 \\ \times 40320 \\ 1209600 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ 48 - 6ab - 3a^2 - 3b^2 = 0 \end{cases}$$

$$48 - 6ab - 3a^2 - 3b^2 = 0$$

$$48 - 6ab - 3(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow 48 - 3(a+b)^2 = 0$$

$$ab = d$$

$$a+b = s$$

$$12 = (a+b)^2$$

$$a+b = \pm \sqrt{12}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{b} + b = \sqrt{12}$$

$$u = \frac{\sqrt{12}}{b}$$

$$\Rightarrow b^2 - \sqrt{12}b + \sqrt{12} = 0$$

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{12} \\ ab = \sqrt{12} \end{cases}$$

$$ab = \sqrt{12}$$

$$\begin{cases} a+b = -\sqrt{12} \\ ab = -\sqrt{12} \end{cases}$$

$$ab = -\sqrt{12}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ 48 - 3(a+b)^2 = 0 \end{cases}$$

$$48 - 3(a+b)^2 = 0$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = \pm 4$$

$$a+b = 4$$

$$ab = 3$$

$$a+b = -4$$

$$ab = -3$$

$$a = 3$$

$$b = 1$$

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$a^2 + 4a - 3 = 0$$

$$b = \frac{-3}{a}$$

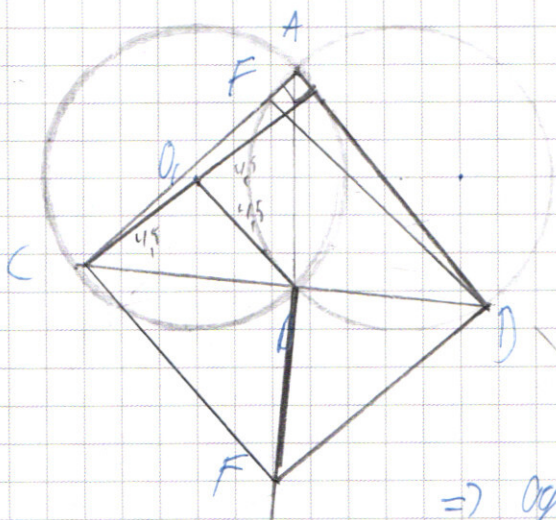
$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = 4 + 3 = 7, a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7} \\ b = \frac{-3}{-2 \pm \sqrt{7}} = -2 \mp \sqrt{7} \end{cases}$$

$$b = \frac{-3}{-2 \pm \sqrt{7}} = -2 \mp \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } (3; 1); (1; 3); (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}); (-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7})$$

(F-?)

Земельные:



$\Rightarrow$ angle $u \angle 75^\circ$, a given
measure.

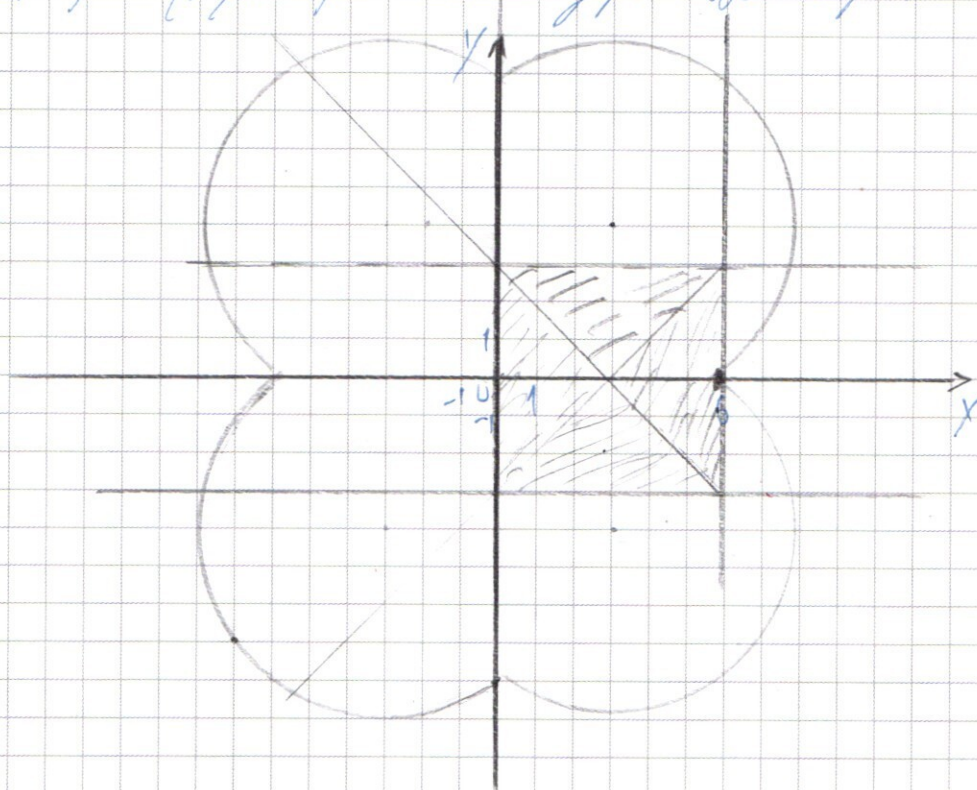
Problem: $CF = 18$.

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 - \text{уравнение окружности}$$



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$y \leq x-3 \quad y \geq 3-x$$

$$x-3-y \leq x-3+y \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$y \geq x-3 \quad y \leq 3-x$$

$$-x+3+y \leq -x+3-y \leq 6$$

$$x \geq 0$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-3$$

$$x-3+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 3-x$$

$$x-3-y - (x-3+y) \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x-3$$

$$x-3+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 3-x$$

$$-(x-3+y) + (x-3+y) \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

fy

По рисунку видно, что единственными решениями являются $(6; 0)$

$$\begin{cases} |6-3-0| + |6-3+0| \leq 6 \\ (|6|-3)^2 + (|0|-4)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 6 \\ 25 = 25 \end{cases}$$

Ответ: $(6; 0)$ $(0; 6)$ — верные пары слагаемых

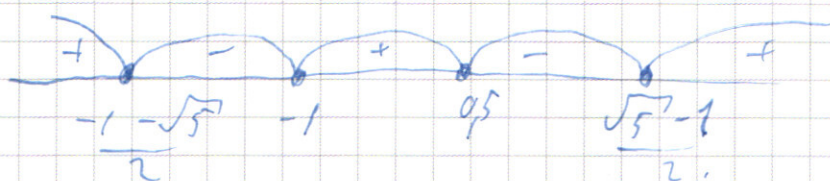
$$(x+1)/(2x)(x^2+x-1) \neq 0 \quad |x^2+x-1| \neq 0$$

$$(x+1)/(2x-1) \neq 0$$

$$(x+1)/(2x-1) \neq 0 \quad |x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}| \neq 0 \quad |x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}| \neq 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



(+6)

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \in (-\infty; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 0.5] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty) \\ x \in [1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Answer: } (-\infty; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 0.5] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = 0 \\ 4bx + (a+6b)y = 1 \end{cases}$$

$$3ax + 3bx + 12y = 0 \Rightarrow y = \frac{a - 3ax - 3bx}{12}$$

$$4bx + aby + b^2y = 1$$

$$4bx + \frac{a - 3ax - 3bx}{12} (ab + b^2) = 1$$

$$48bx + a^2b + ab^2 - 3a^2bx - 3ab^2x - 3ab^2x - 3b^3x = 12$$

$$\begin{cases} 48bx - 6a^2bx - 3a^2bx - 3b^3x = 0 \Rightarrow \\ a^2b + ab^2 = 12 \end{cases}$$

Надо, чтобы были. Когда при $x \neq 0$, тогда $\frac{a^2b + ab^2}{x} = \frac{12}{x}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

нч.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / (x-1) + 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 1$$

$$-2 \quad 2 \quad -10$$

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 / (2x^2 - 3x + 3) + (x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Таким } 2x^2 - 3x + 3$$

$$D = 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3, < 0; \quad a > 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 3 \geq 0$$

П.к. $x^2 / (2x^2 - 3x + 3) \neq 0$ при $x \neq 0$, а $(x-1)^2 \neq 0$ при $x \neq 1$, но всё выражение всегда ≥ 0 (при $x \neq 1$)

$$x \leq 1.$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 \quad 3 \quad -2 \quad -2 \quad 1$$

$$-1 \quad 2 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \quad 0$$

$$(x+1) / (2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0.$$

$$(x+1) / (x(x-1)(2x+3) + 1)$$

$$(x+1) / (2x^3 + 12x^2 - x^2 - 2x - x + 1) \geq 0$$