

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
- [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
- [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
- [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
- [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Чтобы получить произведение 700, остальные цифры равны 1, т.к. 7, 2, 5 — простые числа. Итак, наш набор чисел: 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7.

Для начала составим кол-во случаев 7-значного числа из этих цифр 7, 2, 5, 1.

$$7! \text{ или } 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ числа варианта}$$

Напишем в это число „вставляем“ остальные числа.

1. Цифра 5. Вторую 5 можно поставить на 4 и 5 место, т.к. в окрестности 5 два места дают одно и то же число

$$\underline{7} \underline{2} \underline{5} \underline{1} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$$

эквив.

потому кол-во 5-значных чисел из 7, 2, 5, 5, 1 это $24 \cdot 4 = 96$

2. цифра 2. Вторую 2 можно поставить на 5 и 6 место

ан-но с 1 пунктом

$$\underline{7} \underline{2} \underline{5} \underline{1} \underline{2} \underline{\quad} \underline{\quad}$$

эквив.

потому 6-значных чисел с 7, 2, 5, 5, 2, 1 — $5 \cdot 96 = 480$

3. цифра 1. Вторую 1 можно поставить на 6 и 7 место

в каждом из 480 чисел (ан-но с 1 и 2 пунктами)

$$\underline{7} \underline{2} \underline{5} \underline{5} \underline{2} \underline{1} \underline{1}$$

эквив.

потому 7-значных чисел с 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1 — $7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 480 \cdot 6 = 2880$

Дана ч. цифра 1.

Всего 10 цифр 2 возможных случая расположения 2 групп единиц (1 - вместе, 2 - раздельно) 3-ю единицу можно только поставить лишь на 6 и 8 мест

1) 7 2 2 5 5 1 1

2) 7 2 2 1 5 5 1 эквив.

Поэтому всего таких восьмизначных чисел будет.

$$6 \cdot 2880 = 17280$$

Ответ: 17280 чисел

~ 3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad \text{ОДЗ: } x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4) \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{2}$$

$$x = -6$$

$x \neq 6$, $x \neq 6 \Rightarrow$ не евл. корни, т.к. не входит в ОДЗ. $\rightarrow$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)\sqrt{2} \quad x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

Схема Горнера:

	1	-2	-20	48
очев. корень 4.	4	18	-12	0

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}, \quad x_2 - \text{не подх. по ОДЗ}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{13} - \text{подх.}$$

Ответ: $x = 4; -1 + \sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

при $x \geq 2$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$, при $x \geq 2$ это выражение
т.к. ее можно разбить на пары $x^3(2x-3) + x(7x-4) + 4 \geq 0$
то обе из функций возр. и при $x \geq 2$ уже > 0
при $x < 2$ значение $x \geq 2$ нам не подх.

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

применим схему Горнера:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad -5 \quad -4 \quad 4 \\ 1 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \\ -2 \quad 2 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad -2 < -\frac{1-\sqrt{17}}{2} < -\frac{1+\sqrt{17}}{2} < 1$$

найдем промежутки, где
многочлен неотрицателен

т.к. мы рассматриваем $x < 2$, то из этого следует.

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{2}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1; 2)$$

Объединив оба случая получим, что

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{2}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1; +\infty)$$

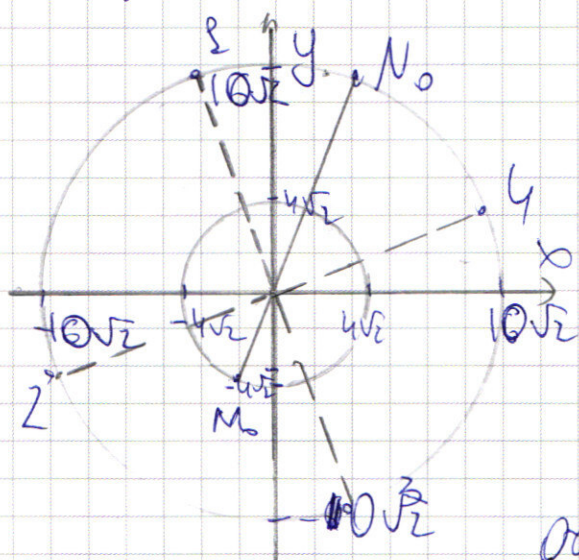
N 5

$v_0 = 2v_m = 2x$ Пусть x — скорость туча, тогда

Если точки M_0 и N_0 лежат на окружностях, то можно найти их радиусы, исходя из формулы окр. в координатной плоскости

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow R_0 = \sqrt{4 + 28} = 4\sqrt{2}$$

$$R_m = \sqrt{25 + 175} = 10\sqrt{2}$$



Несложно проверить, что указанные тучи и воданерка находятся диаметрально противоположно относительно центра

$$\begin{cases} -2\sqrt{7} = k_1 \cdot 2 \\ 5\sqrt{7} = k_2 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2$$

Очевидно, что кратчайшее расстояние это $10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, т.е. разность радиусов.

В начале движения мы и мы должны найти время до их первой встречи.

ω_0 — угловая скорость воданерки

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R_0} = \frac{2x}{4\sqrt{2}}$$

ω_m — угловая скорость туча

$$\omega_m = \frac{x}{10\sqrt{2}}$$

ω_0 — угловая скорость до столкновения воданерки

И то есть можно представить, что туча стоит (на самом деле он движется)

$$\omega_0 = \frac{2x}{4\sqrt{2}} - \frac{x}{10\sqrt{2}} = \frac{8x}{20\sqrt{2}} = \frac{2x}{5\sqrt{2}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} \text{ (время до 1 встр.)}$$

$$t_1 = \frac{10\sqrt{2}\pi}{2x} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{x}$$

За это время туча пройдет

$$S_1 = 6\sqrt{2} \cdot t_1 \cdot \omega_m = \frac{5\sqrt{2}\pi \cdot x}{2} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$\frac{S_1}{2\pi R_m} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{40\sqrt{2}\pi} = \frac{1}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

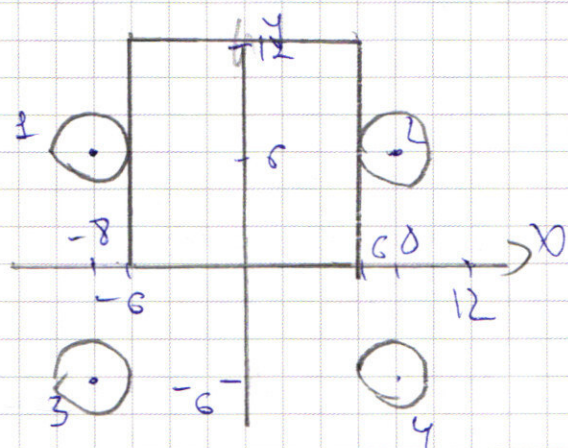
Значит ~~дальше~~ тук окажутся в т. с координатами
 $(-5; 5\sqrt{2})$ а воданерка в $(-2; 2\sqrt{2})$
 Далее ветром будет происходить через $t_0 = 2t_1 = \frac{5\sqrt{2}}{11}$
 Значит тук будет проходить четверть до "ветри" с воданеркой. И точки ветром это т. 1, т. 2, т. 3, т. 4 (указанные на рисунке) ~~показаны на рисунке~~
 Ответ:

тук $(-5; 5\sqrt{2})$	$(-5\sqrt{2}; -5)$	$(5; -5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}; 5)$
воданерка $(-2; 2\sqrt{2})$	$(-2\sqrt{2}; -2)$	$(2; -2\sqrt{2})$	$(2\sqrt{2}; 2)$

нз

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$
 $((|x|-3)^2 + (y-6)^2 = 9)$
 условие раскрытие 1 модуль со зн. + $-y \geq 6+x$
 условие раскрытие 2 модуль со зн. + $-y \geq 6-x$
 Раскрываем по ~~1-му~~ 2-му. После записи ур. График-квадрат:
 график 1 ур-а симметричен отн. y, т.к. $|y-6-x|$ и $|y-6+x|$ меняются местами при ~~одн.~~ и противоп. значениях.
 нарисовав график, видно, что это квадрат со стороной 12 и ~~точкой~~ центром в $(6; 6)$
 2-ое ур-е. Т.к. при x и при y стоит модуль, то график симметричен отн. x и y. А значит графиком явл. 4 окружности с центрами в т. $(8; 6)$, $(-8; 6)$, $(6; 8)$, $(6; -8)$

$$(-8; 6); (+8; -6); (-8; -6); (8; 6)$$



1, 2, 3, 4 - центры

Чтобы система имела 2 решения надо, чтобы окр. 1 и 2 не касались квадрата, в противном случае либо внутренние окружности касаются или пересекут, либо вершины пересекут, либо вообще будет касание тангент, что решений не будет.

внутр. касание быть не может, т.к. касаться будет сразу 2-х вершин. $\Rightarrow a = r^2$

$$r = 2 \Rightarrow a = 4$$

Ответ: $a = 4$

~ 2

$$S = b_1 + b_2 q + b_3 q^2 + \dots + b_n q^n$$

$$qS = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + \dots + b_n q^{n+1}$$

$$\frac{qS}{q} = b_1 + b_2 q + b_3 q^2 + \dots + b_n q^n$$

применяя формулу суммы геом. прогр. видим, что

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$qS = \frac{b_1(q^{3000} - q^2)}{q^3 - 1}, \quad b_2 \neq b_1 q^2$$

$$\frac{qS}{q} = b_1 q^2 (q^{2998} - 1)$$

$$\frac{q}{q^3 - 1} b_1 (q^{3000} - q^2) = \frac{b_1 (q^{3000} - q^2)}{q^3 - 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{3000} - 1)}{q^k} = \frac{(q^{3000} - q^2)}{q^2 + q + 1}$$

$$1) (q^{3000} - 1)(q^2 + q + 1) = (q^{3000} - q^2)$$

$$XS = b_1 + 2b_1q + b_1q^2 + 2b_1q^3 + \dots + 2b_1q^{3000}$$

$$(X-1)S = \dots$$

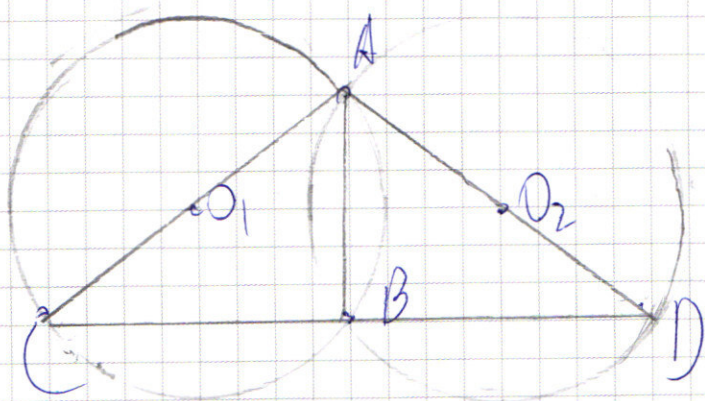
$$XS = \frac{b_1q(q^{3000} - q)}{q^2 - 1}$$

$$X \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - q)}{q^2 - 1}$$

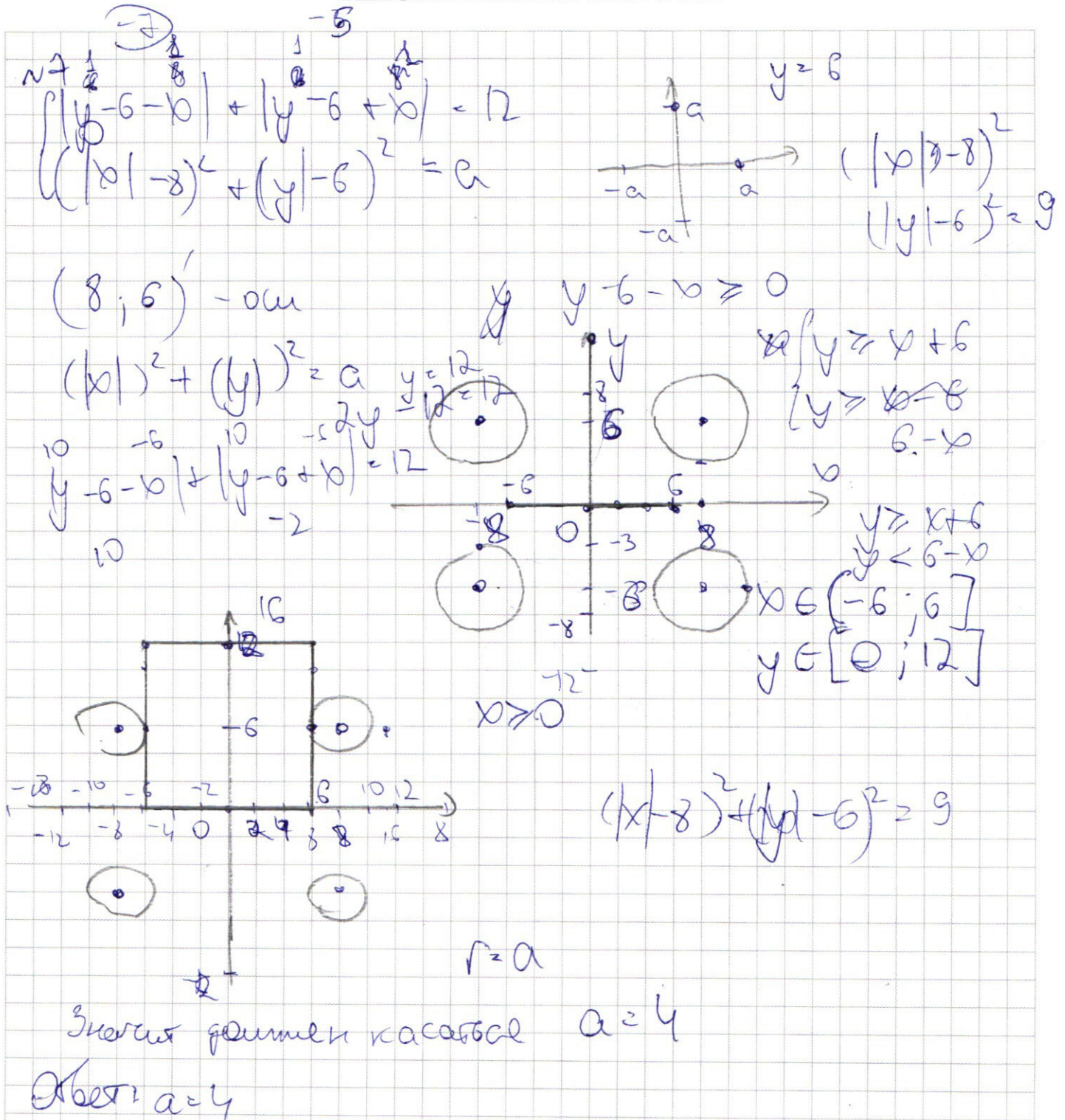
$$X = \frac{(q^{3000} - q)(q - 1)}{(q + 1)(q - 1)(q^{3000} - 1)}$$

q не равно 1 и не равно -1

№6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



н 3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

OD3D

$$1) x = -6$$

$$(1) x + 6 = 0$$

$$OD3: -5x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)$$

1	0	-4	80
16	16		

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)\sqrt{2}$$

5	1	0	2
5			

4	1	0	4
4			

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \left(\sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+4)\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)\sqrt{2}$$

$$-4 \leq -4 \leq 2$$

$$(x+4)\sqrt{2} \geq 0$$

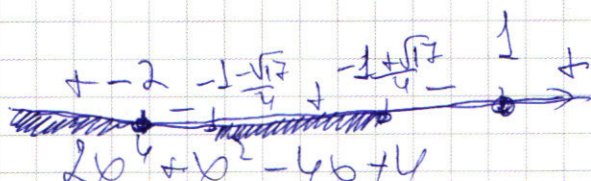
$$x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

1	-2	-20	48
6	1	4	4
3	1	1	-12



н 4

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 / (x-2) + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$x \geq 2$ верно всегда

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

при x

1	2	3	-5	-4	4
2	2	9	18		

2	2	9	18
---	---	---	----

-2	2	1	-2
----	---	---	----

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2]; \left[-\frac{1-\sqrt{7}}{4}; -\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right]; [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$700 = 800 - 7 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ - используемые цифры

11122557

11125725

11122575

11125752

11122755

$7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1$

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

11125267

11125275

6 2880

$\times 6$
17 280

5) 7 2 5 1 1

$$4 \cdot 24 = 96$$

3) ~~7 2 5 1 1 2~~

7 2 5 1 1

$$5 \cdot 96 = 480$$

4) 7 2 5 5 1 1

2) ~~7 2 2 5~~

$$6 \cdot 480 = 2880$$

2880 секунд 7 групп расстановок

1) ~~7 2 5 5 1 1~~

~~7 2 5 5 1~~

~~7 2 2 5 5 1~~

7 2 2 5 1 5 1

1. 5

7 2 5 1

$$24 \cdot 4 = 96$$

2. 2

7 2 5 5 1

$$96 \cdot 5 = 480$$

3. 1

~~7 2 2 5 5 1~~

480 тысяч

2400

~~7 2 2 5 5 1~~

$$480 \cdot 6 = 2880$$

7 2 2 5 5 1 1

у нас 480

~~7 2 2 5 5 1~~

4. 1)

$$6 \cdot 480 = 2880$$

~~7 2 2 5 5 1~~ 7 2 2 5 5 1

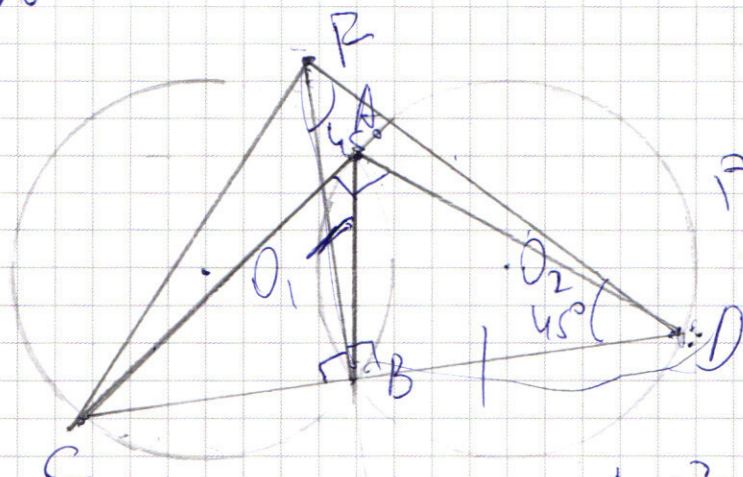
7 2 2 5 5 (11)

2)

$$6 \cdot 2880 =$$

Ответ: 17280 Остаток 2400

26



$b, b, q, b, q^2, b, q^3, b, q^4, b, q^5$
 $1700 - 14^2 + 5^2 + 3^2$
 $72 = 1728$

 b, q^6, b, q^7, b, q^8

$$1800 - 14^2 + 5^2 + 13^2$$

$$FD = \sqrt{2} BD$$

$$496,9^2 \text{ l}$$

$$9524b^2 + 4961b +$$

$$\frac{gS}{4gB_1} = q^2(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q^2} = 1$$

$$10S = b_1 + b_1 q + 50b_1 q^2 + \dots$$

$$\frac{9S}{49b_1} = q^2(1 + q + q^2 + q^3)$$

$$10S = b_1 + b_1 q + 50b_1 q^2 + \dots$$

$$10S = b_1 + b_1 q + b_1$$

$$10S = b_1 + b_2 q + 50b_2 q^2 + \dots b$$

$$K S_{\infty} = b_1 + 2b_2 + b_3$$

Sp. big

$$(k-1)S = b_1 q + b_1^k q + b_1 q^3$$

$$(K-1)S = \frac{b_0}{1-q} (1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots)$$

$$27$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{-12} - \frac{20}{0} + \frac{48}{0} \right)$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$g_2 = \frac{h_1(q^{n-1})}{q^s}$$

$$\begin{array}{r} \div 2 \div 5 \div 7 \div 1 \div 24 \\ \hline 2 \ 5 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \cdot 96 \ 24 = \\ 96 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

