МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР 20013685

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 700 на простые множители:

$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

Т.к. множителей < 8 – остальные множители это единицы. Есть 2 набора цифр, произведение которых дает 700:

I) $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ или II) $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Для первого способа:

8! – способы расставить цифры в клетки + надо разделить на 3! (единицы меняются местами) $\cdot$ 2! (двойки меняются местами) $\cdot$ 2! (пятерки меняются местами)

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 1680$$

Для второго способа:

8! – способы расставить цифры в клетки + надо разделить на 4! (единицы меняются местами) $\cdot$ 2! (пятерки меняются местами)

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Всего способов: $1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

№2.

$S_{1}' = 10 S_1^{*}$ $S'' = k \cdot S_1$ $k = ?$

Разложим сумму изначальной прогрессии S_1 на сумму сумм трех прогрессий

~~Высшей~~ а – прогрессия (геометрическая), в которой участвуют числа изначальной прогрессии, номер которых $\equiv 1 \pmod 3$. Тогда первый член этой прогрессии $= b_1$ (первый член изначальной прогрессии), знаменатель $= q_1^3$ (знаменатель изначальной прогрессии)

в – геометрическая прогрессия, в которой участвуют числа изначальной прогрессии, номер которых $\equiv 2 \pmod 3$ Тогда первый член прогрессии $= b_1 q_1$ (b_1 – первый член изначальной прогрессии; q_1 – знаменатель изначальной прогрессии), а знаменатель $= q_1^3$ (*т.к. члены идут через 3 относительно изнач. прогр. $\Rightarrow \frac{b_{n}}{b_{n+3}} = \frac{1}{q^3}$)

с – геометрическая прогрессия, в которой участвуют числа изначальной прогрессии, номер которых $\equiv 0 \pmod 3$. Тогда первый член прогрессии $= b_1 q_1^2$ (b_1 – первый член изначальной прогрессии, q_1 – знаменатель изначальной прогрессии), а знаменатель $= q_1^{3\,*}$

$S_1 = S_a + S_в + S_c$

$10 S_a + 10 S_в + 10 S_c = S_a + S_в + 50 \cdot S_c$ ← т.к. каждый член $\cdot 50$, сумма $\cdot 50$

$9(S_a + S_в) = 40 S_c$

$S_a = \frac{b_1 \cdot (1 - q_a^{1000})}{1 - q_1^3}$ $S_в = q\left(\frac{b_1 \cdot (1 - q_в^{1000})}{1 - q_1^3}\right)$

$S_c = q^2\left(\frac{b_1 \cdot (1 - q_c^{1000})}{1 - q_1^3}\right)$ заметим, что $q_a = q_в = q_c$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Таким образом ур-ние принимает вид:

$$9(1+q_1)\left(\frac{b_1\cdot(1-q_a^{1000})}{1-q_1^3}\right)=40q^2\left(\frac{b_1\cdot(1-q_a^{1000})}{1-q_1^3}\right)$$

$$\text{т.к. } \underbrace{\left(\frac{b_1\cdot(1-q_a^{1000})}{1-q_1^3}\right)}\neq 0$$ (иначе $S_a=0=S_e=S_c$ => не каждый член положителен)

=> сократим на эту величину наше уравнение

$9+9q=40q^2$

$40q^2-9q-9=0$

$D=81+160\cdot9=(39)^2$

$q_{12}=\frac{9\pm39}{80}$ (т.к все члены $>0\Rightarrow q>0$)

$q=\frac{9+39}{80}=0{,}6$

разобьем начальную прогрессию на две прогрессии: элементы, которые в изначальной прогрессии были четными и элементы, которые в изначальной прогрессии были нечетными (d и e). Знаменатели обоих прогрессий $=q^2$ (т.к $\frac{b_n}{b_{n+2}}=\frac{1}{q^2}$) После изменения прогрессии $S_d'=2S_d$ т.к каждый элемент $\cdot 2$ => сумму $\cdot 2$

$$\frac{S''}{S_1}=\frac{S_e+2S_d}{S_e+S_d}\qquad S_e=\frac{b_1(1-q_e^{1500})}{1-q_1^2}\qquad S_d=\frac{q_1 b_1(1-q_e^{1500})}{1-q_1^2}$$

$$\frac{S''}{S_1}=\frac{(2q_1+1)\left(\frac{b_1(1-q_e^{1500})}{1-q_1^2}\right)}{(q_1+1)\;\frac{(b_1)(1-q_e^{1500})}{1-q_1^2}}$$ – можно сократить на $\frac{(b_1)(1-q_e^{1500})}{(1-q_1^2)}$, т.к. иначе $S_e=0\Rightarrow$ не все члены полож.

$$S''=\frac{(2q_1+1)(S_1)}{q+1}=\frac{2{,}2\,S_1}{1{,}6}=\frac{11}{8}S_1$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt2}+3\sqrt2\right)\underbrace{\sqrt{x^3-4x+80}}_{F(x)}=x^2+10x+24$$

приведем к общему знаменателю.

разложим на множители

$$\frac{x+6}{\sqrt2}\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$$

сократим на $x+6$, т.к. $f(x)\geqslant 0$, а $F(-6)<0$

$$\sqrt2\,(x+4)=\sqrt{x^3-4x+80}\qquad x\geqslant-4$$

возводим в квадрат с этим условием

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

по т. Безу подбираем корень $=+4$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{x^3-4x^2} & x^2+2x-12 \\ \quad 2x^2-20x & \\ \quad \underline{2x^2-8x} & \\ \qquad -12x+48 & \end{array}$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$D=4+48=\sqrt{52}^2$$

$$x_{12}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$$

$x=-1+\sqrt{13}$, т.к $-1-\sqrt{13}<-4$ $(-\sqrt{13}<-3)$

$f(4) > 0$

$f(-1+\sqrt{13}) = \underbrace{(\sqrt{13}-1)^3}_{>0} \underbrace{- 4\sqrt{13} + 52}_{>0,\ \text{т.к. } \sqrt{13} < 13} \Rightarrow f(-1+\sqrt{13}) > 0$

Ответ: $4;\ -1+\sqrt{13}$

№4

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

$(x-2)^2 - 3x^2|x-2| + 2x^4 \geq 0$

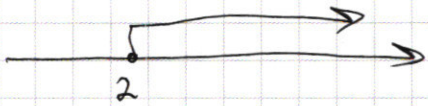
$|x-2| = t;\ t \geq 0 \qquad t^2 - 3tx^2 + 2x^4 \geq 0$

$(t - x^2)(t - 2x^2) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} t \geq 2x^2 \\ 0 \leq t \leq x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2| \geq 2x^2 \\ |x-2| \leq x^2 \end{array}\right.$

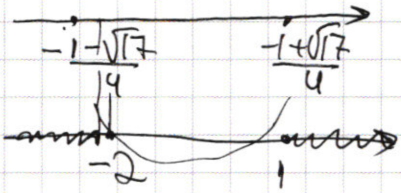
при $x \geq 2$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - x + 2 \leq 0 \quad \varnothing \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \ \text{— всегда}\ D < 0 \end{array}\right.$



при $x < 2$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{array}\right.$

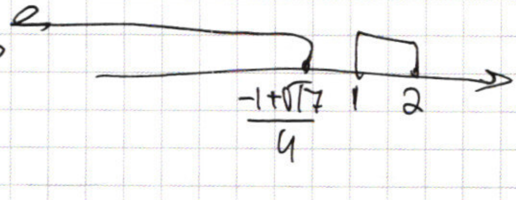


$D = \sqrt{17}^2 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$-2 > \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, т.к. $-\frac{\sqrt{17}}{4} < -2 \qquad \sqrt{17} > 4$

$1 > \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \leftarrow$ числитель < 4

$\Sigma = 4 \Rightarrow$



Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Между ними кратчайшее расстояние, когда тангенс угла прямой, проведенной из центра сист. координат с осью ox в точку нахождения существа совпадает. Кроме того, заметим, что через раз при равенстве тангенсов они будут находиться максимально далеко друг от друга.

$R_{окр\ вод} = \sqrt{(2)^2+(2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$

$R_{окр\ плыв.} = \sqrt{(5)^2+(5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$

$l_{окр\ вод} = 8\sqrt{2}\cdot\pi \qquad l_{окр\ плыв} = 20\sqrt{2}\pi$

$y_{вод} = \sin\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right)4\sqrt{2}$, где S – расстояние, пройденное от начала окружности (совп. с началом тригон. окр)

$x_{вод} = \cos\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right)\cdot 4\sqrt{2}$

$y_{плыв} = \sin\left(\frac{2S}{10\sqrt{2}}\right)\cdot 10\sqrt{2} \qquad x_{плыв} = \cos\left(\frac{2S}{10\sqrt{2}}\right)\cdot 10\sqrt{2}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ приравняем тангенсы

$tg\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right) = tg\left(\frac{2S}{10\sqrt{2}}\right)$

Заметим, что изначально расстояние между сущ. $= \pi$

$\frac{S}{4\sqrt{2}} = \frac{2S}{10\sqrt{2}} + 2\pi n \quad |\cdot 20\sqrt{2}$

$S = 40\sqrt{2}\pi n \qquad n \in Z$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

мин. расст. каждые $40\sqrt{2}\pi$ => min или max расст. каждые $20\sqrt{2}\pi$. Через это расстояние пловун. придет в ту же точку, в кот. наход, а вод в (·) $(2;2\sqrt{7})$

Ответ: $(2;2\sqrt{7})$; $(5;5\sqrt{7})$

№7

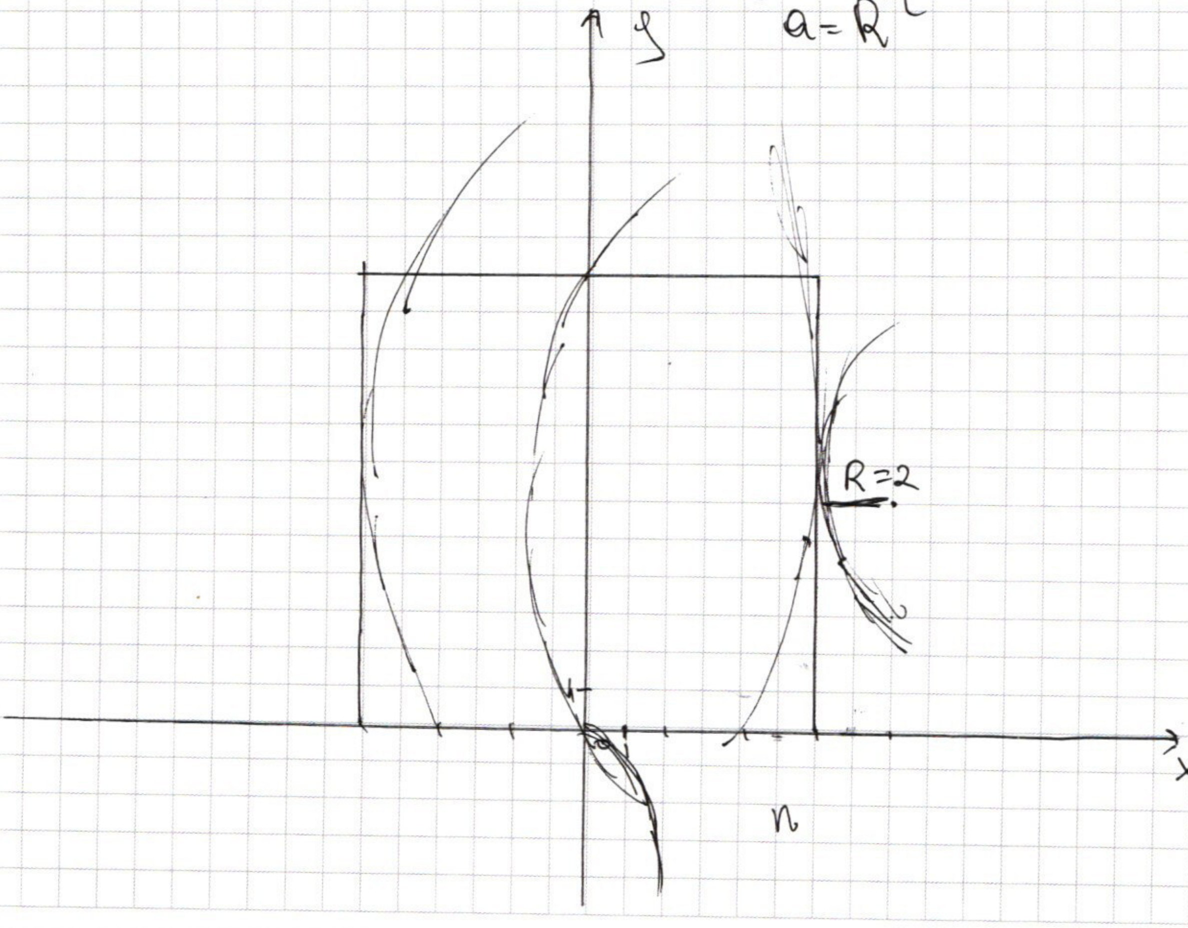
$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

– это ур-ние квадрата.

– это ур-ние фиг, такой, что она симметрична относ обоих осей и изнач. похожа на окр.

$O(8;6)$

$a=R^2$



при $a<4$ ~~??~~ фигура не доходит до кв.

при $a=4$ 1 касание в I четв и 1 кас во II четв

при $a\in(4;100)$ – $\underbrace{\text{II кас в I четв и II кас во II четв}}$

при $a=100$ ~~II~~ 2 кас на оси $\underline{Oy}$

при $a\in(100;14^2)$ ═══ II ═══

при $a=14^2$ ~~3~~ кас I четв ~~3~~ кас II четв

Ответ: ~~??~~ ; 100 ; 4

дальше $a\in(14^2;\sqrt{232})$ 2 кас в I и II

$a>232$ – 0 кас (нигде) окружность будет

слиш

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$

ОДЗ:

$x^3-4x+80 \geq 0$

$x=4$

$x^3-4x+80 \mid x-$

$(x+6)(x+4)$

$-64+16+80$

$36 \cdot 6 = 216$

$\frac{(x+6)}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^3-4x+80}\right) = (x+6)(x+4)$ $\quad x \neq -6$ (ОДЗ

$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = x+4$ при $x \geq -4$

$\frac{x^3-4x+80}{2} = x^2+16x+16$

$x^3-4x+80 = 2x^2+32x+32$

$x^3-2x^2-36x+48=0$

$216 + 72 = 288$

$572 - 288 - 128 + 48$

$36 \cdot 4 = 144$

32

36

6

$216-72-216+48$

черновик ☒ чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

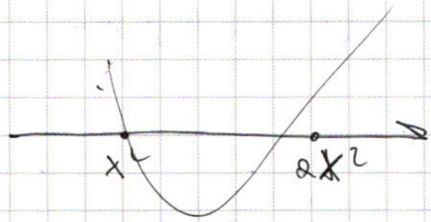
$$\frac{(x+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3-4x+80} = \cancel{(x+6)}(x+4)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$t = |x-2|$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 \geq 0$$



$$D_t = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t_{12} = \frac{3x^2 \pm x^2}{2} = x^2;\ 2x^2$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t \geq 2x^2 \\ t \leq x^2 \end{array}\right. \text{ — обратная замена.}$$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2| \geq 2x^2 \\ |x-2| \leq x^2 \end{array}\right.$$

при $x \geq 2$

$$\left[\begin{array}{ll} x-2 \geq 2x^2 & 2x^2 - x + 2 \leq 0 \\ x-2 \leq x^2 & x^2 - x + 2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$\varnothing$

всегда

$D < 0$

при $x < 2$

$$\left[\begin{array}{l} 2 - x \geq 2x^2 \\ 2 - x \leq x^2 \end{array}\right.$$

$D = 16 + 1 = \sqrt{17}^2$

$x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

$x_{12} = 1;\ -2$

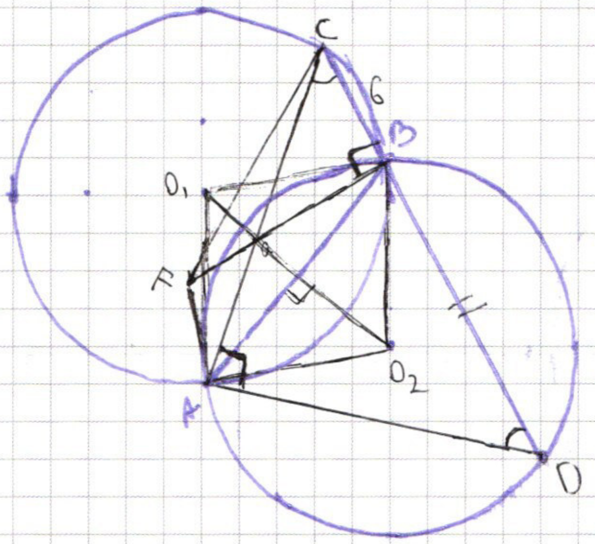
-2 1 2

Ответ: если $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4};\ 1\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle CAD = 90°$

$BF = BD$

$CF = ?$

$\angle ACD = \angle ADC = 45°$

$AC = CD$

$\angle AO_2B = 90°$

$AO_2 = BO_2 = 5$

$AB = 5\sqrt{2}$

$\triangle ACD \sim \triangle BCQ$

$\angle CBO_1 = FBO_2$

O_1BO_2A - квадрат

$$tg\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right) = tg\left(\frac{S}{10\sqrt{2}}\right)$$

$$tg\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right) = tg\left(\frac{2S}{10\sqrt{2}} + \pi\right)$$

$$\frac{S}{4\sqrt{2}} = \frac{2S}{10\sqrt{2}} + \cancel{\pi} + \pi n \quad |20\sqrt{2}$$

$20\sqrt{2}$

$5S = 4S + \cancel{20\sqrt{2}\pi} + \pi n \quad S = 20\sqrt{2}\pi n$

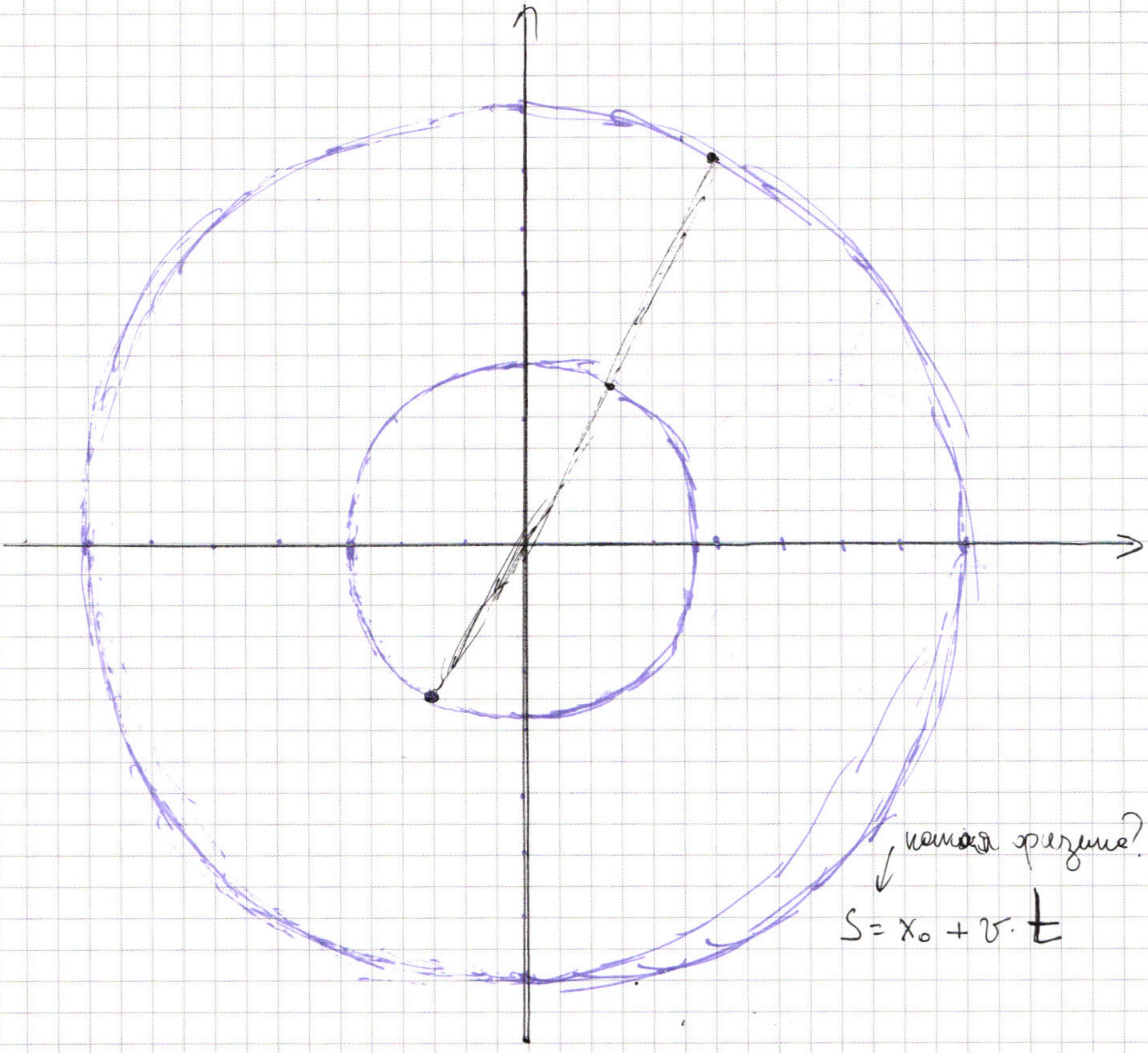
В тех же точках

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



какая функция?

$S = x_0 + v \cdot t$

Между ними кратчайшее расстояние, когда тангенс угла прямой, проведенной из центра до точки совпадает

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$ В данном положении расстояние между ними максимально $\Rightarrow$ в след раз оно минимально. Потом опять макс. и т.д.

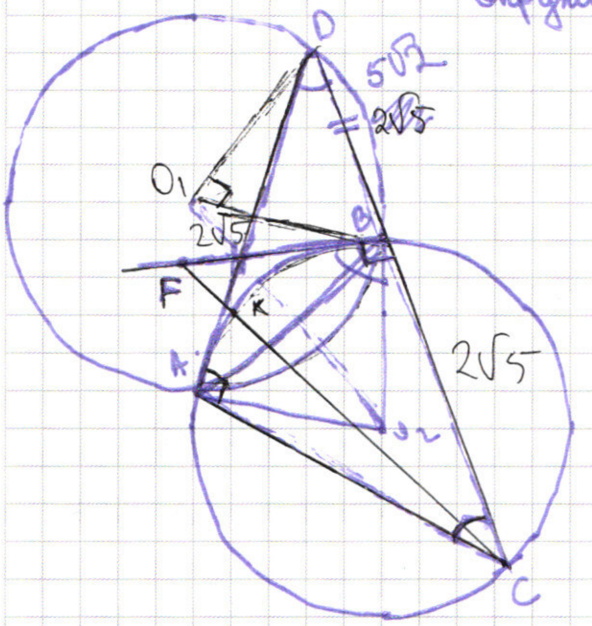
у водомерки, у которой скорость больше $l_{окр} = 8\sqrt{2}\,\pi$

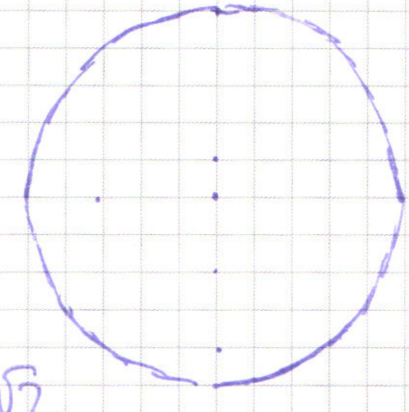
у плывунца $l_{окр} = 20\sqrt{2}\,\pi$ $y_в = \sin\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right) \cdot 4\sqrt{2}$ $x_в = \cos\left(\frac{S}{4\sqrt{2}}\right) \cdot 4\sqrt{2}$

$y_п = \sin\left(\frac{S}{10\sqrt{2}}\right) \cdot 10\sqrt{2}$ $x_п = \cos\left(\frac{S}{10\sqrt{2}}\right) \cdot 10\sqrt{2}$

$R=5$

Окружности совпадают





$AB=5\sqrt{2}$

$\cancel{DF}$ $\boxed{DB=BF}$

$\angle ACD = \angle ADC$, т.к дуги AB - одинаковые

$\Rightarrow ACB = 45°$

(.)K - точка пересеч окр. $\Rightarrow FK \cdot FC = FB^2$

$FB = BD$

$BD \cdot DC = DA^2$

$DA = DC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BD = \frac{1}{2} DC \Rightarrow$

FB - медиана и высота $\Rightarrow$

A лежит на прямой FB

$\angle DO_1B = ? = 2DAB$ AB - бис $\Rightarrow \angle DAB = 45°$

$\Rightarrow O_1 = 90°$

$BC = 2\sqrt{5}$ $50+50=100$

$FC=10$

□ черновик □ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ц.о. $= (0; 0)$

$M_в = (-2; -2\sqrt{7})$. $R = \sqrt{4+28} = 32 = 4\sqrt{2}$

$M_ж = (5; 5\sqrt{7})$ $4 \cdot 7 = 28$ $R = \sqrt{25+8} = 10\sqrt{2}$

$v_в = 2 v_ж$ $-\frac{25}{7}$ min расст тогда, когда они находятся на одном радиусе

$l_в = 8\sqrt{2} \cdot \pi$

$l_ж = 20\sqrt{2}\pi$

$x^3 - 4x + 80 = (x^2 + 8x + 16) \cdot 2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

$27 - 18 \cdot 4 + 48$

$27 - 18 - 18 \cdot 3 + 48 = 0$?

$x^3 - 2x^2$ при $x \le -4$

мин знач в -4

$-64 - 32 + 72 + 48$

$3 \cdot 3 \cdot 2$ $D = 4 + 72 = 76$

$x(x^2 - 2x - 18)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

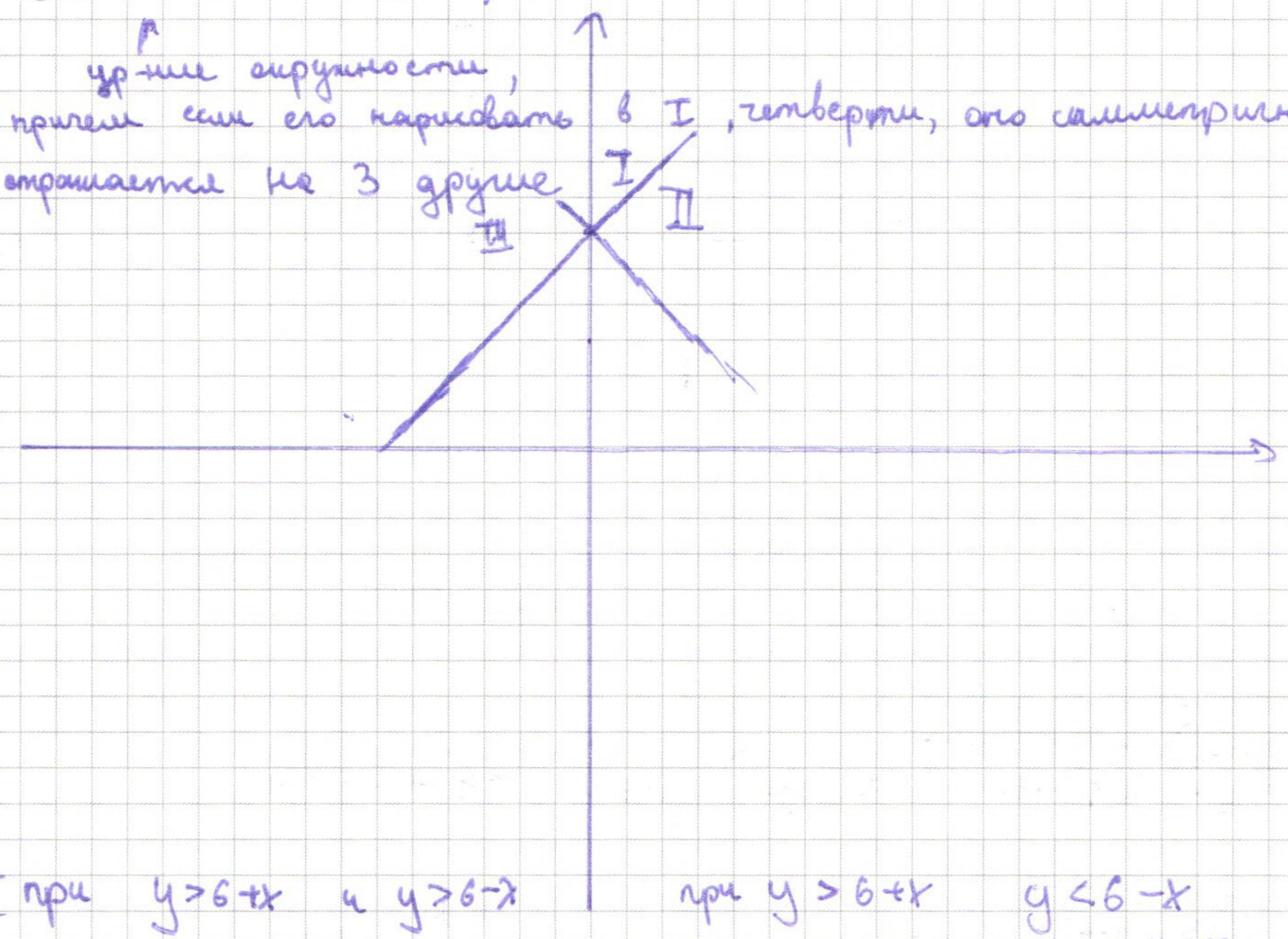
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

ур-ние окружности,
причем если его нарисовать в I четверти, оно симметрично
отражается на 3 другие



I при $y>6+x$ и $y>6-x$

$2y-12=12$

$y=12$

II при $y<6+x$ $y>6-x$

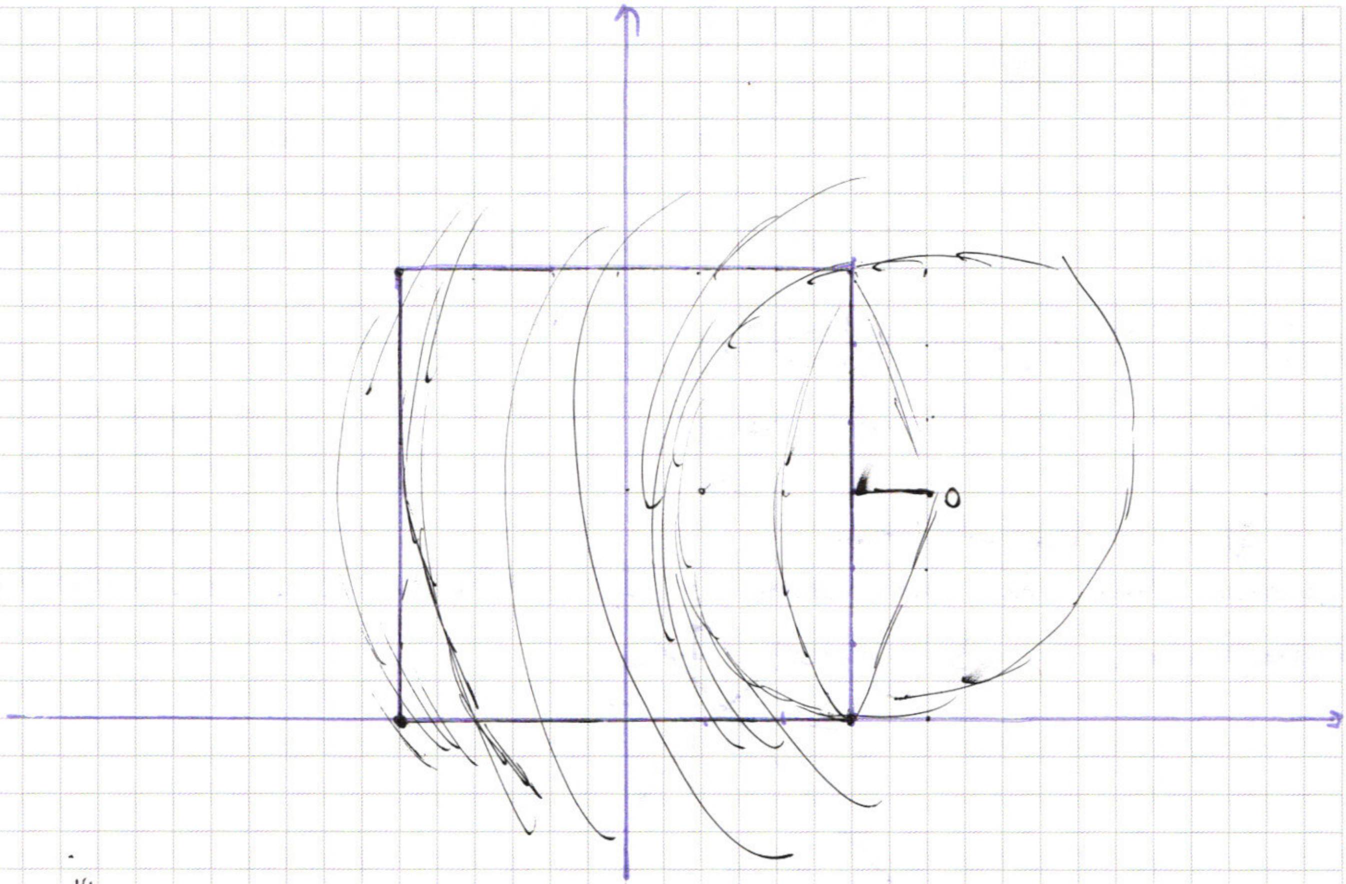
$-y+6+x+y-6+x=12$

$x=6$

при $y>6+x$ $y<6-x$

$\cancel{y}-\cancel{6}-x-\cancel{y}+\cancel{6}-x=12$

$x=-6$



$14 \cdot 14 = 56$, 14, 196

14^2+6^2

$196+36=$

$\sqrt{232}$

$a \in (2;14)$; $\{\sqrt{232}\}$

$\frac{\cancel{(x+6)}}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3-4x+80} = \cancel{(x+6)}(x+4)$ -6 – не реш.

$\frac{\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt{2}} = x+4$ $x \geq -4$ $x+4$

$18 \cdot 4 = 72$

$x^3-4x+80=(x+4)^2 \cdot 2$ $64-32-72+48$

$x^2+8x+16$ $32-24 \neq 0$

$x^3-4x+80=2x^2+16x+32$ $-216-72+108+48$

$x^3-2x^2-20x+48=0$ ~~$216-108-72+48$~~

64 -32 $+18\cdot 4$ $+48$

$64-32-80+48$ 32 $x=4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $700 = 7\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1$

Итого: число составляется из трех единиц, 2-х двоек 2-х пятерок и одной семерки

$$\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot2\cdot6} = 8\cdot7\cdot5\cdot3\cdot2$$

$7\cdot6\cdot5\cdot4$

10

30

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot2}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}$$

42

$56 \times 30 = 1680$

840

Ответ: 1680

№2

геом прогр: $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены положительны, сумма $= S$. Если все члены на 3-их местах $\cdot 50 \Rightarrow$

$S_1 = 10S$ $\quad S_2 = ?$ $\quad$ Пусть a - числа, которые дают 1 : 3

$S = S_a + S_b + S_c$ $\quad$ b - 2 : 3

Если мы все члены S_c $\quad$ c - 0 : 3

прогрессии заменяем на члены, большие пред. в 50 раз. $\Rightarrow$ Это тоже будет прогрессия, только $b_1^c = 50b_1$,

$10S = S'$

$10S_a + 10S_b + 10S_c = S_a + S_b + 50S_c$

$9(S_a + S_b) = 40S_c$

$$S_{\text{геом прогр}(a)} = \frac{b_1 \cdot (1-q_a^{1000})}{1-q_a}$$

$$S_{\text{геом прог}(в)} = \frac{q\cdot b_1 \cdot (1-q_a^{1000})}{1-q_a}$$

$$S_{\text{геом}(c)} = \frac{q^2 b_1 \cdot (1-q_a^{1000})}{1-q_a}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$9(1+q) = 40q^2$

$40q^2 - 9q - 9$

$D = 81 + 1440 =$ $\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 1440 \end{array}$

$1521 = (39)^2$

$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$

т.к все члены положительны

$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80}$ (т.к. $q \geq 0$) $q = \frac{48}{80} = 0,6$

$S_1 = S_d + S_e$ S_d – элементы под нечетными номерами. S_e – элементы с четными номерами.

$S_1' = S_d + S_e'$

$S_e' = 2S_e$

$S_d = \frac{b_1(1-q_d^{1500})}{1-q_d}$ $S_e = \frac{b_1 \cdot q(1-q_d^{1500})}{1-q_d}$

$$\frac{S_1' = 2,2\left(\frac{b_1(1-q_d^{1500})}{(1-q_d)}\right)}{S_1 = 1,6\left(\frac{b_1(1-q^{1500})}{(1-q_d)}\right)}$$

$\frac{S_1'}{S_1} = \frac{11}{8}$

$S_1' = \frac{11}{8} S_1$