РЕШЕНИЕ БИЛЕТА III (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, $R = \frac{\sqrt{265}}{32}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC \cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{4}$ и $BD = \frac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда $BD = \frac{3\sqrt{5}}{8}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{64} - \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{53}{64}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{53}}{16}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{265}}{32}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x\cos 5x - \sin 2x\cos 6x}{\cos x} = 0.$$

Ответ: $\pi n, \quad \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 3x\cos 5x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 2x\right),$$

$$\sin 2x\cos 6x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 4x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\cos x} = \frac{\sin x\cos 3x}{\cos x} = 0.$$

Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем

$$\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = \sin x\left(2\cos 2x - 1\right) = 0$$

при условии $\cos x \neq 0$. Тогда либо $\sin x = 0$ и $x = \pi n$ — решения, либо $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ — решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18 - x}{2 + x}} > -x.$$

Ответ: $x \in (-2, 18]$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-2, 18]$. Если $x \in (0, 18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in (-2, 0]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + 2x^2 + x - 18 = (x - 2)(x^2 + 4x + 9).$$

Так как $x^2 + 4x + 9 > 0$ при всех x, то получаем $0 > x - 2$ — верно при всех $x \in (-2, 0]$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(y + 1) & = & 4\log_{x+2}\sqrt{y - 1}, \\ \\ \log_{y-1}(x + 2) & = & \log_x\left(\dfrac{x^3}{y + 1}\right). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($x > 0$, $y > 1$, $x \neq 1$, $y \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv & = & 2, \\ u + v & = & 3, \end{cases}$$

где $u = \log_x(y + 1)$, $v = \log_{y-1}(x + 2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} y + 1 & = & x, \\ x + 2 & = & (y - 1)^2. \end{cases}$$

Далее $y^2 - 3y - 2 = 0$, откуда $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} y+1 = x^2, \\ x+2 = y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2 - x - 4 = 0$, откуда $x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y = \frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a = 2 + \sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $x^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(0;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y = 1$. Если $a < 1$, то окружность лежит ниже прямой $y = 1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(0;1)$. При $a = 1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(0;1)$. Если же $a > 1$, то окружность расположена выше прямой $y = 1$, и система кроме решения $(0;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x = 0$) в том случае, когда окружность касается прямых $y = x$ и $y = -x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $x^2 + (x-a)^2 = (a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$, откуда $D = 4a^2 - 8(2a-1) = 4(a^2 - 4a + 2) = 0$, т. е. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. Так как $a > 1$, то получаем $a = 2 + \sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1 = 6$, $\rho = \frac{18}{5}$, $R = \frac{4\sqrt{39}}{5}$.

Решение. Обозначим $AB = 2b = 8$, $SC = h = 15$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE = x$, $OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1 \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E \perp AB$. Аналогично $C_1E \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E = C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE = CE = b = 4$. Тогда $B_1B = \frac{b}{2} = C_1C$, $C_1A = B_1A = \frac{3}{2}b$, $B_1E = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1 = AB_1 = \frac{3}{2}b = 6$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK = CE = b$ и $SK = h - x$, то $SO^2 = (h-x)^2 + b^2 = OA_1^2 + SA_1^2$, где $OA_1^2 = R^2 = OE^2 + B_1E^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2$, $SA_1 = SA - AA_1 = \sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2 + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + \left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2 + h^2 - 2xh + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + h^2 + 4b^2 + \frac{9}{4}b^2 - 3b\sqrt{h^2 + 4b^2},$$

т. е. $x = \frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - 2b\right) = \frac{12}{30}\left(\sqrt{15 \cdot 15 + 64} - 8\right) = \frac{2}{5}(17 - 8) = \frac{18}{5}$. Тогда $R = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\frac{18 \cdot 18}{25} + \frac{3}{4} \cdot 16} = \frac{4\sqrt{39}}{5}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{2}{\sqrt{10}}$, $R = \frac{\sqrt{85}}{18}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 3$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{3}$ и $BD = \frac{2BC}{3}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда $BD = \frac{\sqrt{10}}{3}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{\sqrt{10}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{18} - \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{17}{18}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{17}}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{85}}{18}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x\cos 3x - \sin 7x\cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\quad\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\quad n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right),$$

$$\sin 7x\cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 6x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 2x - \sin 6x}{2(\cos 2x + \sin 2x)} = -\frac{\sin 2x\cos 4x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

Так как $\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$, то получаем

$$\sin 2x(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

при условии $\cos 2x + \sin 2x \neq 0$. Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$, причём $\cos 2x + \sin 2x = (-1)^n \neq 0$, т. е. это решения. Если $\cos 2x - \sin 2x = 0$, то $\cos 2x \neq 0$ и $\operatorname{tg} 2x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. При этом $\cos 2x + \sin 2x = 2\cos 2x \neq 0$, т. е. это решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+4}{2-x}} > x.$$

Ответ: $x \in [-4, 2)$.

Решение. ОДЗ: $x \in [-4, 2)$. Если $x \in [-4, 0)$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in [0, 2)$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 < x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x+1)(x^2 - 3x + 4).$$

Так как $x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x, то получаем $0 < x + 1$ — верно при всех $x \in [0, 2)$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} &=& \log_{2y+1} x, \\ \log_x \left(\dfrac{x^3}{2y+1} \right) &=& \log_{2y-1}(x+2). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($x > 0$, $y > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $y \neq 1$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv &=& 2, \\ u+v &=& 3, \end{cases}$$

где $u = \log_x(2y+1)$, $v = \log_{2y-1}(x+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} 2y+1 &=& x, \\ x+2 &=& (2y-1)^2. \end{cases}$$

Далее $2y^2-3y-1=0$, откуда $y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$, $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} 2y+1 = x^2, \\ x+2 = 2y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2-x-4=0$, откуда $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|x-2|-2y = 0, \\ \\ x^2-2x+y^2-2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a=2+\sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 2, \\ 1-x, & x<0, \\ x-1, & x>2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x-1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(1;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(1;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(1;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(1;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(1;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x=1$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x-1$ и $y=1-x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x-1, \\ (x-1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x-1)^2+(x-1-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x-1)^2-2a(x-1)+ + 2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=4(a^2-4a+2)=0$, т. е. $a=2\pm\sqrt{2}$. Так как $a>1$, то получаем $a=2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1=\frac{15}{4}$, $\rho=\frac{5}{2}$, $R=\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Решение. Обозначим $AB=2b=5$, $SC=h=12$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE=x$, $OA_1=OB_1= =OC_1=R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1\perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E\perp AB$. Аналогично $C_1E\perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E=C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE=CE=b=\frac{5}{2}$. Тогда $B_1B=\frac{b}{2}=C_1C$, $C_1A=B_1A=\frac{3}{2}b$, $B_1E=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1=AB_1=\frac{3}{2}b= =\frac{15}{4}$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK=CE=b$ и $SK=h-x$, то $SO^2=(h-x)^2+b^2=OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2=R^2= =OE^2+B_1E^2=x^2+\frac{3}{4}b^2$, $SA_1=SA-AA_1=\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+\left(\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2+h^2-2xh+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+h^2+4b^2+\frac{9}{4}b^2-3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x=\frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2}-2b\right)=\frac{15}{48}\left(\sqrt{12\cdot12+25}-5\right)=\frac{5}{16}(13-5)=\frac{5}{2}$. Тогда $R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ф (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{9}{4\sqrt{10}}$, $R = \frac{\sqrt{145}}{24}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{4}$ и $BD = \frac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда $BD = \frac{3\sqrt{10}}{8}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{4\sqrt{10}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{32} - \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{29}{32}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{29}}{8\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{145}}{24}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x\cos 10x - \sin 4x\cos 8x}{\cos 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\quad \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $\quad n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 2x\cos 10x = \frac{1}{2}\left(\sin 12x - \sin 8x\right),$$

$$\sin 4x\cos 8x = \frac{1}{2}\left(\sin 12x - \sin 4x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 8x}{2\cos 2x} = -\frac{\sin 2x\cos 6x}{\cos 2x} = 0.$$

Так как $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$, то получаем

$$\sin 2x(4\cos^2 2x - 3) = \sin 2x(2\cos 4x - 1) = 0$$

при условии $\cos 2x \neq 0$. Тогда либо $\sin 2x = 0$ и $x = \frac{\pi n}{2}$ — решения, либо $\cos 4x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ — решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} > -x.$$

Ответ: $x \in (-1, 3]$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-1, 3]$. Если $x \in (0, 3]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in (-1, 0]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3).$$

Так как $x^2 + 2x + 3 > 0$ при всех x, то получаем $0 > x - 1$ — верно при всех $x \in (-1, 0]$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y(x+1) & = & \log_{y+2}(x-1)^2, \\ \log_{x-1}(y+2) & = & \log_y\left(\dfrac{y^3}{x+1}\right). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($y > 0$, $x > 1$, $y \neq 1$, $x \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv & = & 2, \\ u + v & = & 3, \end{cases}$$

где $u = \log_y(x+1)$, $v = \log_{x-1}(y+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} x + 1 & = & y, \\ y + 2 & = & (x-1)^2. \end{cases}$$

Далее $x^2-3x-2=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} x+1 &= y^2, \\ y+2 &= x-1. \end{cases}$$

Далее $y^2-y-4=0$, откуда $y=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|x-3|-2y &= 0, \\ \\ x^2-4x+y^2-2ay+2a &= -3 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a=2+\sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & 1\le x\le 3, \\ 2-x, & x<1, \\ x-2, & x>3. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x-2)^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(2;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(2;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(2;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(2;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(2;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x=2$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x-2$ и $y=2-x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x-2, \\ (x-2)^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x-2)^2+(x-2-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x-2)^2-2a(x-2)+$ $+2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=4(a^2-4a+2)=0$, т. е. $a=2\pm\sqrt{2}$. Так как $a>1$, то получаем $a=2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 16. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 30. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1=12$, $\rho=\frac{36}{5}$, $R=\frac{8\sqrt{39}}{5}$.

Решение. Обозначим $AB=2b=16$, $SC=h=30$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE=x$, $OA_1=OB_1=$ $=OC_1=R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1\perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E\perp AB$. Аналогично $C_1E\perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E=C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE=CE=b=8$. Тогда $B_1B=\frac{b}{2}=C_1C$, $C_1A=B_1A=\frac{3}{2}b$, $B_1E=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1=AB_1=\frac{3}{2}b=$ $=12$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK=CE=b$ и $SK=h-x$, то $SO^2=(h-x)^2+b^2=OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2=R^2=$ $=OE^2+B_1E^2=x^2+\frac{3}{4}b^2$, $SA_1=SA-AA_1=\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+\left(\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2+h^2-2xh+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+h^2+4b^2+\frac{9}{4}b^2-3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x=\frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2}-2b\right)=\frac{24}{60}\left(\sqrt{30\cdot30+4\cdot64}-16\right)=\frac{2}{5}(2\cdot17-16)=\frac{36}{5}$. Тогда $R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{\frac{36\cdot36}{25}+\frac{3}{4}\cdot64}=\frac{4}{5}\sqrt{81+75}=\frac{8\sqrt{39}}{5}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Р (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{8}{3\sqrt{17}}$, $R = \frac{\sqrt{697}}{48}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 3$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{3}$ и $BD = \frac{2BC}{3}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$. Тогда $BD = \frac{\sqrt{17}}{3}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{17}}{3}\cdot\frac{8}{17} = \frac{8}{3\sqrt{17}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{17}{36} - \frac{\sqrt{17}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{41}{36}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{41}}{12}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{697}}{48}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 7x\cos x - \sin 5x\cos 3x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\quad -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\quad n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 7x\cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 6x\right),$$

$$\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 6x - \sin 2x}{2(\cos 2x - \sin 2x)} = \frac{\sin 2x\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

Так как $\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$, то получаем

$$\sin 2x(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

при условии $\cos 2x - \sin 2x \neq 0$. Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$, причём $\cos 2x - - \sin 2x = (-1)^n \neq 0$, т. е. это решения. Если $\cos 2x + \sin 2x = 0$, то $\cos 2x \neq 0$ и $\operatorname{tg} 2x = -1$, т. е. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. При этом $\cos 2x - \sin 2x = 2\cos 2x \neq 0$, т. е. это решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+14}{1-x}} > x.$$

Ответ: $x \in [-14, 1)$.

Решение. ОДЗ: $x \in [-14, 1)$. Если $x \in [-14, 0)$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in [0, 1)$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 < x^3 - x^2 + x + 14 = (x+2)(x^2 - 3x + 7).$$

Так как $x^2 - 3x + 7 > 0$ при всех x, то получаем $0 < x + 2$ — верно при всех $x \in [0, 1)$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log_{x-1}\sqrt{y+2} & = & \log_{x+1} y, \\ \\ \log_y\left(\dfrac{y^3}{x+1}\right) & = & \log_{x-1}(y+2) \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($y > 0$, $x > 1$, $y \neq 1$, $x \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\left\{\begin{array}{rcl} uv & = & 2, \\ u + v & = & 3, \end{array}\right.$$

где $u = \log_y(x+1)$, $v = \log_{x-1}(y+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 & = & y, \\ y+2 & = & (x-1)^2. \end{array}\right.$$

Далее $x^2-3x-2=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} x+1 &= y^2, \\ y+2 &= x-1. \end{cases}$$

Далее $y^2-y-4=0$, откуда $y=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|x+2|-2y &= 0, \\ \\ x^2+2x+y^2-2ay &= -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a=2+\sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & -2\le x\le 0, \\ -1-x, & x<-2, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x+1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(-1;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(-1;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(-1;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(-1;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(-1;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x=-1$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x+1$ и $y=-x-1$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x+1, \\ (x+1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x+1)^2+(x+1-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x+1)^2-2a(x+1)+$ $+2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=4(a^2-4a+2)=0$, т. е. $a=2\pm\sqrt{2}$. Так как $a>1$, то получаем $a=2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 10. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 24. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1=\frac{15}{2}$, $\rho=5$, $R=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Обозначим $AB=2b=10$, $SC=h=24$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE=x$, $OA_1=OB_1=$ $=OC_1=R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1\perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E\perp AB$. Аналогично $C_1E\perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E=C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE=CE=b=5$. Тогда $B_1B=\frac{b}{2}=C_1C$, $C_1A=B_1A=\frac{3}{2}b$, $B_1E=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1=AB_1=\frac{3}{2}b=$ $=\frac{15}{2}$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK=CE=b$ и $SK=h-x$, то $SO^2=(h-x)^2+b^2=OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2=R^2=$ $=OE^2+B_1E^2=x^2+\frac{3}{4}b^2$, $SA_1=SA-AA_1=\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+\left(\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2+h^2-2xh+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+h^2+4b^2+\frac{9}{4}b^2-3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x=\frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2}-2b\right)=\frac{15}{48}\left(\sqrt{24\cdot24+4\cdot25}-10\right)=\frac{5}{16}\left(2\cdot13-10\right)=5$. Тогда $R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{25+\frac{3}{4}\cdot25}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА III (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+2)}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \le 1.$$

Ответ: $(-2,-1) \cup [1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ $x \in (-2,-1) \cup (-1,+\infty)$. Если $x \in (-2,-1)$, то $x+2 < 1$, а $\sqrt{x+3}+1 > 1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+2)}\left(\sqrt{x+3}+1\right) < 0 < 1$, и поэтому $x \in (-2,-1)$ — решения. Если же $x > -1$, то $x+2 > 1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+3} \le x+1$, которое имеет решение $x \in [1,+\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2} - \sqrt{25-y^2} &= 1, \\ \sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2} &= y^2 - 2x^2 + 2x + 3. \end{cases}$$

Ответ: $(3;4)$, $(3;-4)$, $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $y^2-x^2 = y^2-2x^2+2x+3$, т. е. $x^2-2x-3=0$, откуда $x=3$ или $x=-1$.

При $x=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=3$, откуда $y=\pm 4$. Подставляя $x=3$ и $y=\pm 4$ во второе уравнение системы, получаем $4+3=7=16-18+6+3$ — тождество. Таким образом, обе пары $(3;-4)$ и $(3;4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=2\sqrt{6}-1$, откуда $y^2=4\sqrt{6}$ и $y=\pm 2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $x=-1$ и $y=\pm 2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}+\sqrt{25-4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}-4+3$, т. е. $\sqrt{25-4\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}-1$, что равносильно $25-4\sqrt{6}=24-4\sqrt{6}+1$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$ и $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$\sin 3x + 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

Ответ: $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t=\sin x \ge 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x + 3\sin x = -2\sin 3x \sin x$. Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, то получаем

$(3t-4t^3)(1+2t)+3t=0$. Отсюда находим

$$t(4t^3+2t^2-3t-3)=t(t-1)(4t^2+6t+3)=0.$$

Уравнение $4t^2+6t+3=0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t=\sin x=0$ и $x=\pi n$, либо $t=\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t=\sin x<0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2(4t^2+2t-3)=0$. Уравнение $4t^2+2t-3=0$ имеет корни $t_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}<-1$ и $t_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}>0$, т. е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS:KO=1:3$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки D до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SD.

Ответ: площадь $=\frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $=\frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $=\arcsin\frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $AO=1$, $AS=\sqrt{5}$. Пусть $2\alpha=\angle ASC$, $2\beta=\angle ASD$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta=\frac{3}{5}$, $\cos 2\beta=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta=\frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми AS, CS и DS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM==SK\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN=\frac{SM}{\cos 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN=SN\sin 2\alpha=\frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости ASD из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP=SM\operatorname{tg}2\beta=\frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP=\frac{SM}{\cos 2\beta}=\frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SD и плоскостью Π является $\angle SPM=\frac{\pi}{2}-2\beta=\arcsin\frac{4}{5}$. Так как $DP==SD-SP=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки D до плоскости Π равно $DP\sin\angle SPM=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости CDS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2=\frac{5}{16}++\frac{5}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN=\varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9\cdot 16}=\frac{9}{16\cdot 5}+\frac{16}{9\cdot 5}-\frac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\frac{145}{9\cdot 16}=\frac{9\cdot 9+16\cdot 16}{9\cdot 16}-2\cos\varphi$, и $\cos\varphi=\frac{81+256-145}{18\cdot 16}=\frac{192}{18\cdot 16}=\frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь сечения равна $MP\cdot MN\cdot\sin\varphi=\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{2}\cos y & = & \frac{3}{2}, \\ \sqrt{2}\sin y + \sqrt{3}\cos x & = & \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ и $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно. Пусть P — середина AB, Q — середина CD, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек B и C на AD. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $BM = BK = x$, $CN = CK = y$. Тогда $AM = AE = 3 - x$, $DN = DE = 5 - y$, $BC = x + y$, $AD = AE + DE = 8 - (x + y)$, $PQ = \frac{BC+AD}{2} = 4$, $AF = AE - FE = 3 - 2x$, $DT = DE - TE = 5 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PBCQ$ и $APQD$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(BC + PQ) = \frac{R}{2}(4 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AD) = \frac{R}{2}(12 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{4+x+y}{12-(x+y)}$, откуда $x + y = 1$. Так как $BF^2 = h^2 = AB^2 - AF^2 = 9 - (3-2x)^2 = 4(3x - x^2)$ и $CT^2 = h^2 = CD^2 - DT^2 = 25 - (5-2y)^2 = 4(5y - y^2)$, то $3x - x^2 = 5y - y^2$. Поскольку $x = 1 - y$, то $3(1-y) - (1-y)^2 = 5y - y^2$, откуда $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $R = \sqrt{5y - y^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AT = 3 - x + y = \frac{8}{3}$, $DF = 5 - y + x = \frac{16}{3}$, $AC = \sqrt{CT^2 + AT^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{64}{9}} = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{256}{9}} = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+5)}\left(\sqrt{x+8}+3\right) \leq 1.$$

Ответ: $(-5,-4)\cup[1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ $x\in(-5,-4)\cup(-4,+\infty)$. Если $x\in(-5,-4)$, то $x+5<1$, а $\sqrt{x+8}+3>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+5)}\left(\sqrt{x+8}+3\right)<0<1$, и поэтому $x\in(-5,-4)$ — решения. Если же $x>-4$, то $x+5>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+8}\leq x+2$, которое имеет решение $x\in[1,+\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2} &= 7, \\ \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2} &= \frac{1}{7}(y^2-2x^2+2x+3). \end{cases}$$

Ответ: $(3;4)$, $(3;-4)$, $\left(-1;2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$, $\left(-1;-2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $y^2-x^2=y^2-2x^2+2x+3$, т. е. $x^2-2x-3=0$, откуда $x=3$ или $x=-1$.

При $x=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=3$, откуда $y=\pm4$. Подставляя $x=3$ и $y=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4-3=1=\frac{1}{7}(16-18+6+3)$ — тождество. Таким образом, обе пары $(3;-4)$ и $(3;4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=7-2\sqrt{6}$, откуда $y^2=28\sqrt{6}-48$ и $y=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$. Подставляя найденные значения $x=-1$ и $y=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}-\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=\frac{1}{7}\left(28\sqrt{6}-49\right)=4\sqrt{6}-7$, т. е. $\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=7-2\sqrt{6}$, что равносильно $25+48-28\sqrt{6}=49-28\sqrt{6}+24$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1;2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$ и $\left(-1;-2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$\sin 3x-3|\sin x|=\cos 4x-\cos 2x.$$

Ответ: $x=\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \sin x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x - 3\sin x = -2\sin 3x \sin x$. Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, то получаем $(3t - 4t^3)(1 + 2t) - 3t = 0$. Отсюда находим $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < 0$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \in (0, 1)$. Следовательно, либо $t = \sin x = t_2$ и $x = (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n$, либо $t = \sin x = 0$ и $x = \pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \sin x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t - 1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки A до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SA.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin \frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $BO = 1$, $AB = \sqrt{2}$. Пусть $2\alpha = \angle BSD$, $2\beta = \angle ASB$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми BS, DS и AS в точках M, N и P соответственно. В плоскости BSD из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = SK \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN \sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости ASB из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SA и плоскостью Π является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin \frac{4}{5}$. Так как $AP = SA - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки A до плоскости Π равно $AP \sin \angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости ADS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{9 \cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9 \cdot 16} = \frac{9}{16 \cdot 5} + \frac{16}{9 \cdot 5} - \frac{2}{5} \cos \varphi$, откуда $\frac{145}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 9 + 16 \cdot 16}{9 \cdot 16} - 2\cos \varphi$, и $\cos \varphi = \frac{81 + 256 - 145}{18 \cdot 16} = \frac{192}{18 \cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}\cos y & = & \frac{5}{2}, \\ \\ \sin y + \sqrt{2}\cos x & = & -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$2\sin\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(y + \tfrac{\pi}{3}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Следовательно, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ и $y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ и $-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AD и BC равны соответственно 6 и 10, а длина основания CD больше длины AB. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите длины оснований трапеции и радиус вписанной в неё окружности.

Ответ: $AB = 2$, $CD = 14$, $R = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AD, AB, BC и CD соответственно. Пусть P — середина AD, Q — середина BC, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек A и B на CD. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $AM = AK = x$, $BN = BK = y$. Тогда $DM = DE = 6 - x$, $CN = CE = 10 - y$, $AB = x + y$, $CD = DE + CE = 16 - (x + y)$, $PQ = \frac{AB+CD}{2} = 8$, $DF = DE - FE = 6 - 2x$, $CT = CE - TE = 10 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PABQ$ и $DPQC$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(AB + PQ) = \frac{R}{2}(8 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + CD) = \frac{R}{2}(24 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{8+x+y}{24-(x+y)}$, откуда $x + y = 2$. Тогда основания трапеции $CD = 16 - (x + y) = 14$ и $AB = x + y = 2$. Так как $AF^2 = h^2 = AD^2 - DF^2 = 36 - (6 - 2x)^2 = 4(6x - x^2)$ и $BT^2 = h^2 = BC^2 - CT^2 = 100 - (10 - 2y)^2 = 4(10y - y^2)$, то $6x - x^2 = 10y - y^2$. Поскольку $x = 2 - y$, то $6(2 - y) - (2 - y)^2 = 10y - y^2$, откуда $y = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$, и $R = \sqrt{10y - y^2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Φ (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+1)}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\leq 1.$$

Ответ: $(-1,0)\cup\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

Решение: ОДЗ $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Если $x\in(-1,0)$, то $x+1<1$, а $\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+1)}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)<0<1$, и поэтому $x\in(-1,0)$ — решения. Если же $x>0$, то $x+1>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+4}\leq x+\frac{1}{4}$, которое имеет решение $x\in\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2} &= 1,\\[2ex] \sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2} &= x^2-2y^2+2y+3.\end{cases}$$

Ответ: $(4;3)$, $(-4;3)$, $\left(2\sqrt[4]{6};-1\right)$, $\left(-2\sqrt[4]{6};-1\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $x^2-y^2=x^2-2y^2+2y+3$, т. е. $y^2-2y-3=0$, откуда $y=3$ или $y=-1$.

При $y=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=\pm4$. Подставляя $y=3$ и $x=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4+3=7=16-18+6+3$ — тождество. Таким образом, обе пары $(-4;3)$ и $(4;3)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $y=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=2\sqrt{6}-1$, откуда $x^2=4\sqrt{6}$ и $x=\pm2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $y=-1$ и $x=\pm2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}+\sqrt{25-4\sqrt{6}}=4\sqrt{6}-4+3$, т. е. $\sqrt{25-4\sqrt{6}}=$ $=2\sqrt{6}-1$, что равносильно $25-4\sqrt{6}=24-4\sqrt{6}+1$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(2\sqrt[4]{6};-1\right)$ и $\left(-2\sqrt[4]{6};-1\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$3|\cos x|-\cos 3x=\cos 4x+\cos 2x.$$

Ответ: $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \cos x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $3\cos x - \cos 3x = 2\cos 3x \cos x$. Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем $(4t^3 - 3t)(1 + 2t) - 3t = 0$. Отсюда находим

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t - 1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t = \cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $t = \cos x = 1$ и $x = 2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \cos x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < -1$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} > 0$, т. е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость $\mathit{\Pi}$, перпендикулярная прямой SC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathit{\Pi}$, расстояние от точки B до плоскости $\mathit{\Pi}$ и угол между плоскостью $\mathit{\Pi}$ и прямой SB.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin\frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $CO = 1$, $SO = 2$, $CS = \sqrt{5}$. Пусть $2\alpha = \angle ASC$, $2\beta = \angle BSC$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость $\mathit{\Pi}$ пересекается с прямыми CS, AS и BS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = SK\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN\sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости BSC из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости $\mathit{\Pi}$, то углом между прямой SB и плоскостью $\mathit{\Pi}$ является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\frac{4}{5}$. Так как $BP = SB - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки B до плоскости $\mathit{\Pi}$ равно $BP\sin\angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости ABS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9\cdot 16} = \frac{9}{16\cdot 5} + \frac{16}{9\cdot 5} - \frac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\frac{145}{9\cdot 16} = \frac{9\cdot 9 + 16\cdot 16}{9\cdot 16} - 2\cos\varphi$, и $\cos\varphi = \frac{81+256-145}{18\cdot 16} = \frac{192}{18\cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2}\cos y &= \frac{5}{2}, \\ \\ \sqrt{2}\sin y - \cos x &= \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi s,\ k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(y - \tfrac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ и $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi s,\ k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ и $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 15 и 9, а длина основания AD меньше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

Ответ: $R = \sqrt{14},\ AC = 2\sqrt{30},\ BD = 2\sqrt{78}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами CD, AD, AB и BC соответственно. Пусть P — середина CD, Q — середина AB, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек D и A на BC. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $DM = DK = x$, $AN = AK = y$. Тогда $CM = CE = 9 - x$, $BN = BE = 15 - y$, $AD = x + y$, $BC = CE + BE = 24 - (x + y)$, $PQ = \frac{BC + AD}{2} = 12$, $CF = CE - FE = 9 - 2x$, $BT = BE - TE = 15 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PDAQ$ и $CPQB$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(AD + PQ) = \frac{R}{2}(12 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + BC) = \frac{R}{2}(36 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{12 + x + y}{36 - (x + y)}$, откуда $x + y = 3$. Так как $DF^2 = h^2 = CD^2 - CF^2 = 81 - (9 - 2x)^2 = 4(9x - x^2)$ и $AT^2 = h^2 = AB^2 - BT^2 = 225 - (15 - 2y)^2 = 4(15y - y^2)$, то $9x - x^2 = 15y - y^2$. Поскольку $x = 3 - y$, то $9(3 - y) - (3 - y)^2 = 15y - y^2$, откуда $y = 1$, $x = 2$, $R = \sqrt{15y - y^2} = \sqrt{14}$, $CT = 9 - x + y = 8$, $BF = 15 - y + x = 16$, $AC = \sqrt{AT^2 + CT^2} = \sqrt{56 + 64} = 2\sqrt{30}$, $BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \sqrt{56 + 256} = 2\sqrt{78}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1.Решите неравенство

$$\log_{(x+4)}\left(\sqrt{x+5}+1\right) \le 1.$$

Ответ: $(-4,-3)\cup[-1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ $x \in (-4,-3)\cup(-3,+\infty)$. Если $x \in (-4,-3)$, то $x+4<1$, а $\sqrt{x+5}+1>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+4)}\left(\sqrt{x+5}+1\right) < 0 < 1$, и поэтому $x \in (-4,-3)$ — решения. Если же $x>-3$, то $x+4>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+5} \le x+3$, которое имеет решение $x \in [-1,+\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2} &= 7, \\ \\ \sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2} &= \frac{1}{7}(x^2-2y^2+2y+3). \end{cases}$$

Ответ: $(4;3)$, $(-4;3)$, $\left(2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$, $\left(-2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $x^2-y^2=x^2-2y^2+2y+3$, т. е. $y^2-2y-3=0$, откуда $y=3$ или $y=-1$.

При $y=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=\pm4$. Подставляя $y=3$ и $x=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4-3=1=\frac{1}{7}(16-18+6+3)$ — тождество. Таким образом, обе пары $(-4;3)$ и $(4;3)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $y=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=7-2\sqrt{6}$, откуда $x^2=28\sqrt{6}-48$ и $x=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$. Подставляя найденные значения $y=-1$ и $x=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}-\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=\frac{1}{7}\left(28\sqrt{6}-49\right)=4\sqrt{6}-7$, т. е. $\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=7-2\sqrt{6}$, что равносильно $25+48-28\sqrt{6}=49-28\sqrt{6}+24$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$ и $\left(-2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$3|\cos x|+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \cos x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $3\cos x + \cos 3x + 2\cos 3x \cos x = 0$. Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем $(4t^3 - 3t)(1 + 2t) + 3t = 0$. Отсюда находим $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + {} + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < 0$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \in (0, 1)$. Следовательно, либо $t = \cos x = t_2$ и $x = \pm \arccos t_2 + 2\pi n$, либо $t = \cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \cos x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t - 1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, угол между боковым ребром и ребром основания равен $\operatorname{arctg} 3$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SD. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки C до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SC.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin \frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $AB = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$, $AO = 1$, $SO = 2$. Пусть $2\alpha = \angle BSD$, $2\beta = \angle CSD$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми DS, BS и CS в точках M, N и P соответственно. В плоскости BSD из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = {} = SK \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN \sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости CSD из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SC и плоскостью Π является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin \frac{4}{5}$. Так как $CP = {} = SC - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки C до плоскости Π равно $CP \sin \angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости BCS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + {} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{9 \cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9 \cdot 16} = \frac{9}{16 \cdot 5} + \frac{16}{9 \cdot 5} - \frac{2}{5} \cos \varphi$, откуда $\frac{145}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 9 + 16 \cdot 16}{9 \cdot 16} - 2\cos \varphi$, и $\cos \varphi = \frac{81 + 256 - 145}{18 \cdot 16} = \frac{192}{18 \cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \sqrt{3}\sin y & = & \frac{5}{2}, \\ \\ \cos y - \sqrt{2}\sin x & = & -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(y + \tfrac{\pi}{6}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = -1$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ и $-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон BC и AD равны соответственно 12 и 20, а длина основания CD меньше длины AB. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите длины оснований трапеции и радиус вписанной в неё окружности.

Ответ: $CD = 4$, $AB = 28$, $R = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами BC, CD, AD и AB соответственно. Пусть P — середина BC, Q — середина AD, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек C и D на AB. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $CM = CK = x$, $DN = DK = y$. Тогда $BM = BE = 12 - x$, $AN = AE = 20 - y$, $CD = x + y$, $AB = AE + BE = 32 - (x + y)$, $PQ = \frac{AB+CD}{2} = 16$, $BF = BE - FE = 12 - 2x$, $AT = AE - TE = 20 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PCDQ$ и $BPQA$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(CD + PQ) = \frac{R}{2}(16 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AB) = \frac{R}{2}(48 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{16+x+y}{48-(x+y)}$, откуда $x + y = 4$. Тогда основания трапеции $AB = 32-(x+y) = 28$ и $CD = x+y = 4$. Так как $CF^2 = h^2 = BC^2-BF^2 = 144-$ $-(12-2x)^2 = 4(12x-x^2)$ и $DT^2 = h^2 = AD^2-AT^2 = 400-(20-2y)^2 = 4(20y-y^2)$, то $12x - x^2 = 20y - y^2$. Поскольку $x = 4 - y$, то $12(4 - y) - (4 - y)^2 = 20y - y^2$, откуда $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{3}$, и $R = \sqrt{20y - y^2} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.